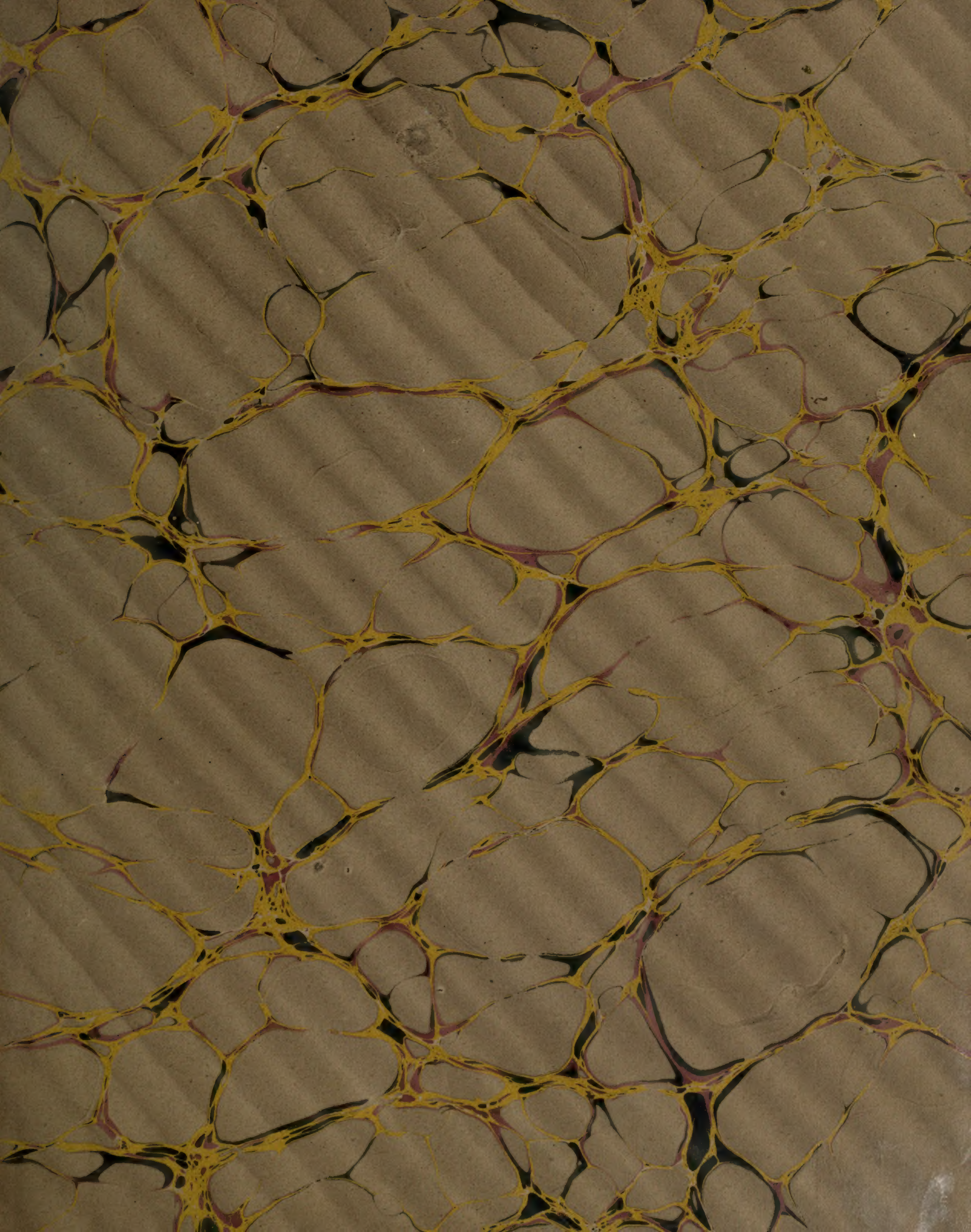




Ecole Polytechnique

2e Division.

Cours d'Analyse.

Mr Humbert Professeur.

Le Cours d'Analyse de première année comprend le calcul différentiel, les premiers principes du calcul intégral et les applications géométriques.

Première Partie.

Calcul différentiel.

Chapitre I.

Dérivées et différentielles.

I. _ Limites; infiniment petits.

1. _ Soit une suite indéfinie de quantités réelles

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n, \ldots\ldots,$$

on dit qu'elles tendent vers une limite, A, lorsque, étant donnée une -

quantité positive ε, aussi petite qu'on veut, on peut assigner un nombre N tel que, pour toute valeur de n supérieure ou égale à N, on ait

$$\text{mod}\,(a_n - A) < \varepsilon$$

le symbole mod désignant la valeur absolue de $a_n - A$.

Si l'on considère deux suites:

$$a_1 \; a_2 \ldots\ldots a_n \ldots$$
$$b_1 \; b_2 \ldots\ldots b_n \ldots,$$

ayant pour limites respectives A et B, il est clair que:

1° Les quantités $a_n \pm b_n$ ont pour limite $A \pm B$;

2° Les produits $a_n b_n$ ——————— $A\,B$

3° Les quotients $\frac{a_n}{b_n}$ ——————— $\frac{A}{B}$, à condition toutefois que B ne soit pas nul. Si $B = 0$ et $A \gtrless 0$, la valeur absolue de $\frac{a_n}{b_n}$ croît évidemment au-delà de toute limite.

Infiniment petits.

2. — Un infiniment petit est une quantité variable qui a pour limite zéro, c'est-à-dire qui prend successivement une série de valeurs tendant vers zéro. Une quantité fixe, si petite qu'on la suppose, ne peut donc être un infiniment petit.

Un infiniment petit ne figure jamais seul dans un calcul, car à la limite, il faudrait le remplacer par zéro, et il eût été inutile de l'introduire au début; on introduit simultanément plusieurs infiniment petits, de manière que, dans les équations obtenues, chaque terme ait un infiniment petit en facteur.

Si x est un infiniment petit et si une fonction $f(x)$ tend vers zéro quand x tend vers zéro, d'une manière quelconque, on dit que $f(x)$ est infiniment petit avec x: Ce nouvel infiniment petit est fonction du premier, x, lequel est dit infiniment petit principal.

On dit que l'infiniment petit $f(x)$ est d'ordre m par rapport à x lorsque le rapport $\frac{f(x)}{x^m}$ tend vers une limite finie et non nulle pour $x = 0$ (m est essentiellement une quantité positive.

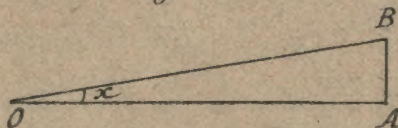
3 — Exemples d'infiniment petits. — La fonction $\sin x$ est infiniment petite du premier ordre avec x; la fonction $(\sin x - x)$ est infiniment petite du troisième ordre, car

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots\ldots$$

La fonction $1 - \cos x$ est infiniment petite du second ordre (toujours pour $x = 0$) car

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$$

De là résulte cette conséquence géométrique : si un triangle rectangle a un angle, x, infiniment petit, la différence des deux côtés qui comprennent cet angle est infiniment petite du second



ordre par rapport à x. Car

$$OB - OA = OB(1 - \cos x) = OB\,\frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12} \dots\right)$$

On dit aussi que les deux côtés considérés sont égaux au second ordre près.

Cette remarque a une certaine importance dans les applications.

Il existe des infiniment petits qui ne sont d'aucun ordre ; ainsi $x \log x$ tend vers zéro avec x, mais, quelque soit le nombre positif m, $\frac{x \log x}{x^m}$ n'a pas de limite finie et non nulle pour $x = 0$: car si m est supérieur ou égal à 1, l'expression devient infinie ; si m est inférieur à 1, elle devient nulle. L'infiniment petit $x \log x$ n'a donc pas d'ordre par rapport à x.

4. — D'après la définition, un infiniment petit, y, d'ordre m par rapport à x, satisfait à la relation

$$\frac{y}{x^m} = A + \varepsilon$$

A étant une quantité finie et non nulle, et ε tendent vers zéro avec x. On en tire

$$y = Ax^m + \varepsilon x^m.$$

Le terme Ax^m se nomme la valeur principale de l'infiniment petit y. Soit de même Bx^n $(n > m)$ la valeur principale de l'infiniment petit εx^m, on a :

$$y = Ax^m + Bx^n + \varepsilon_1 x^n$$

ε_1 étant un infiniment petit. On peut continuer ce calcul, et mettre ainsi y sous forme d'une somme de deux, trois, quatre, ... termes infiniment petits, dont chacun est d'ordre supérieur aux précédents.

5. — L'inverse d'un infiniment petit est une quantité dont la valeur absolue croît au-delà de toute limite, c'est-à-dire un infiniment grand. On dira qu'un infiniment grand, $F(x)$ est d'ordre m par rapport à x quand $\frac{1}{F(x)}$ sera un infiniment petit d'ordre m; on a ainsi :

$$\frac{1}{F(x)} = Ax^m + \varepsilon x^m$$

d'où

$$F(x) = \frac{1}{A+\varepsilon} \cdot \frac{1}{x^m} = \frac{1}{Ax^m} \left[1 - \frac{\varepsilon}{A+\varepsilon} \right]$$

et $\frac{1}{Ax^m}$ sera la valeur principale de l'infiniment grand $F(x)$.

6. — Soient deux infiniment petits, y et z, fonctions d'un même infiniment petit principal, x, et d'ordres m et n :

1° Si y et z sont du même ordre $(m = n)$ la limite du rapport $\frac{y}{z}$, quand x tend vers zéro, est le quotient des valeurs principales de y et de z.

2° Si y est d'ordre supérieur à z $(m > n)$, $\frac{y}{z}$ est un infinim^t^ petit dont la valeur principale est le quotient des valeurs principales de y et de z.

3° Si y est d'ordre inférieur à z $(m < n)$ $\frac{y}{z}$ est un infiniment grand dont la valeur principale est encore le quotient des valeurs principales de y et de z.

Ces propositions résultent des définitions :

$$y = x^m (A+\varepsilon) \; ; \qquad z = x^n (B+\varepsilon') \; ; \quad \text{d'où :}$$

$$\frac{y}{z} = x^{m-n} \frac{A+\varepsilon}{B+\varepsilon'} = \frac{A}{B} x^{m-n} \left[1 + \frac{B\varepsilon - A\varepsilon'}{A(B+\varepsilon')} \right] \; ;$$

au dernier membre, $\frac{A}{B} x^{m-n}$ est le quotient des valeurs principales, Ax^m et Bx^n, de y et de z, et la quantité entre crochets tend vers 1 pour $x = 0$, ce qui démontre les trois cas du théorème.

II. – Dérivées et différentielles des fonctions d'une variable.

7 — Continuité. — On dit qu'une fonction réelle, $f(x)$, est continue pour une valeur $x = a$ lorsque, étant donné un nombre positif, ε,

aussi petit qu'on veut, on peut assigner un nombre positif, η, tel que pour toutes les valeurs de x comprises entre $a-\eta$ et $a+\eta$ on ait :

$$\operatorname{mod}\left[f(x)-f(a)\right] < \varepsilon$$

Cette définition s'étend d'elle-même aux fonctions de plusieurs variables indépendantes. Ainsi, $f(x,y)$ sera continue pour $x=a$, $y=b$, si, étant donné ε, on peut assigner η tel que l'on ait

$$\operatorname{mod}\left[f(x,y)-f(a,b)\right] < \varepsilon$$

pour toutes les valeurs de x comprises entre $a-\eta$ et $a+\eta$, et toutes les valeurs de y comprises entre $b-\eta$ et $b+\eta$.

La fonction $f(x)$ sera dite continue entre $x=A$ et $x=B$ si elle est continue pour toutes les valeurs de x comprises entre A et B. De même $f(x,y)$ sera dite continue dans une région du plan si elle est continue pour tous les systèmes de valeurs de x, y qui sont les coordonnées des points de cette région : ainsi $f(x,y)$ sera continue à l'intérieur du cercle $x^2+y^2-1=0$ si elle est continue pour tous les systèmes de valeurs de x, y qui rendent x^2+y^2-1 négatif.

8. – Dérivée. – Si $f(x)$ est une fonction continue pour $x=a$, la différence $f(a+h)-f(a)$ est, d'après la définition de la continuité, infiniment petite avec h ; si de plus le quotient

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

tend vers une limite finie et déterminée lorsque h tend vers zéro d'une manière quelconque, cette limite sera dite la dérivée de la fonction $f(x)$ pour $x=a$. On la représente par $f'(a)$.

Dans cet énoncé les mots "d'une manière quelconque" sont indispensables : en effet, faire tendre h vers zéro, c'est (N° 1) faire passer h par une suite de valeurs successives :

$$b_1\,,\ b_2\,,\ldots\ b_n\,,\ldots$$

ayant pour limite zéro ; or, il peut se faire que pour deux suites convenablement choisies, le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ait deux limites différentes. Voici un exemple.

Soit

$$f(x) = x \sin\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad a = 0\,.$$

On a $f(0)=0$, et :

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \sin\frac{1}{h}\,,$$

expression qui tend vers 1, si h tend vers zéro en passant par la suite

de valeurs

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2K\pi}\ ,\quad \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2(K+1)\pi}\ ,\ \ldots\ldots\quad \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\ ,\ \ldots\ldots$$

et qui tend vers θ, si h tend vers zéro en passant par la suite de valeurs

$$\frac{1}{2K\pi}\ ,\quad \frac{1}{2(K+1)\pi}\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\quad \frac{1}{2n\pi}\ ,\ \ldots\ldots$$

La fonction $f(x)$ d'apres cela, n'a pas de dérivée pour $x=0$.

Remarque. — Il est clair qu'une fonction qui admet une dérivée pour $x=a$ est continue en ce point ; on a cru longtemps que la réciproque était vraie, c'est-à-dire qu'une fonction continue admettait nécessairement une dérivée. Il n'en est rien, comme l'a montré M. Weierstrass qui a donné un exemple de fonction continue sans dérivée ; mais de tels cas sont exceptionnels, et on n'aura à considérer dans ce Cours que des fonctions (continues) admettant des dérivées.

9. — Formule des accroissements finis. — On a établi, dans le cours de spéciales, l'importante proposition suivante :

Si $f(x)$ désigne une fonction continue entre $x=a$ et $x=b$, admettant dans cet intervalle une dérivée finie et déterminée, on a :

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h),$$

pour toutes les valeurs de $x+h$ et de x comprises entre a et b, en désignant par θ une quantité comprise entre 0 et 1.

Notation différentielle.

10. — Différentielle première. — Soit y une fonction de x, $y=f(x)$; si elle admet une dérivée on a :

$$\lim.\ (\text{pour } h=0)\ \text{de}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

c'est-à-dire que $f(x+h)-f(x)$ est, par rapport à h, un infiniment petit du premier ordre, dont la valeur principale est $hf'(x)$. On désigne cette valeur principale par dy, et on l'appelle <u>différentielle</u> ou <u>différentielle première</u> de la fonction y. Ainsi, par définition :

$$dy=hf'(x)$$

Appliquons cette formule à la fonction $y=x$, il vient (car $f'(x)=1$)

$$dx=h$$

et par suite

$$dy = f'(x)\,dx$$

La différentielle d'une fonction de x est donc le produit de la dérivée par l'accroissement infiniment petit, dx, de la variable.

D'après cela, et d'après les théorèmes connus sur les dérivées, les différentielles des expressions :

$$y \pm z\ ; \qquad yz\ ; \qquad \frac{y}{z}\ ; \quad \text{sont :}$$
$$dy \pm dz\ ; \qquad y\,dz + z\,dy\ ; \qquad \frac{z\,dy - y\,dz}{z^2}\ ;$$

Plus généralement, en vertu de la règle de dérivation des fonctions composées, la dérivée de la fonction $\varphi(u, v, w)$ où u, v, w sont des fonctions de x, étant :

$$\varphi'_u\, u'_x + \varphi'_v\, v'_x + \varphi'_w\, w'_x\ ,$$

la différentielle sera (en observant que $u'_x\, dx = du$) :

$$(1) \qquad d\varphi(u, v, w) = \varphi'_u\, du + \varphi'_v\, dv + \varphi'_w\, dw,$$

formule importante, où φ'_u, φ'_v, ... sont les dérivées partielles de φ par rapport à $u, v, \ldots$ c'est-à-dire que φ'_u est la dérivée de φ quand on regarde u comme variable indépendante et v, w comme constants.

11. — Remarques. — 1° La relation $dy = f'(x)\,dx$ montre que la dérivée $f'(x) = y'_x$, de y par rapport à x, est le quotient des différentielles dy et dx, dy étant la différentielle de y qui correspond à l'accroissement dx :

$$y'_x = \frac{dy}{dx}.$$

Soient de même : u une autre fonction de x, du sa différentielle correspondant au même accroissement dx, que ci-dessus ; on a

$$u'_x = \frac{du}{dx}$$

Donc.

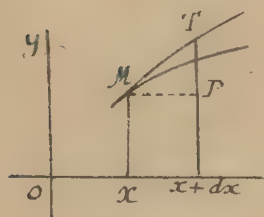
$$y'_x : u'_x = \frac{dy}{du}$$

Or, d'après la théorie des dérivées, si l'on regarde y comme fonction de u, $y'_x : u'_x$ est la dérivée de y par rapport à u ; cette dérivée est donc égale à $\frac{dy}{du}$, en représentant par dy et du les différentielles de y et de u pour un <u>même</u> accroissement de la variable indépendante dont dépendent ces deux fonctions.

C'est là une propriété importante des différentielles premières,

et qu'on ne retrouve plus dans les différentielles d'ordre supérieur.

2° Géométriquement, $f'(x)$ est le coëfficient angulaire de la tangente, MT, menée à la courbe $y = f(x)$ au point M d'abcisse x;



Si on mène la parallèle à Oy d'abcisse $x+dx$, le triangle TMP donne :

$$TP = MP \operatorname{tg} \widehat{M}$$
$$= dx\, f'(x)$$

Donc $dy = TP$, c'est-à-dire que dy est rigoureusement égal à l'accroissement de l'ordonnée quand on passe du point d'abcisse x, sur la courbe, au point d'abcisse $x + dx$ sur la tangente à la courbe au point x.

12. – Différentielle seconde. — Soient x et x_1 deux valeurs de la variable indépendante; comparons les différentielles d'une même fonction, $y = f(x)$, pour ces deux valeurs :

$$dy = f'(x)\,dx \quad ; \quad dy_1 = f'(x_1)\,dx_1$$

Comme dy et dy_1 dépendent de dx et de dx_1, qui sont deux infiniment petits indépendants l'un de l'autre, on ne peut les comparer qu'en établissant une liaison entre dx et dx_1 : il est naturel de supposer $dx_1 = dx$, c'est-à-dire d'admettre que les deux accroissements de x sont les mêmes.

Dans cette hypothèse, formons la différence $dy_1 - dy$:

$$dy_1 - dy = \left[f'(x_1) - f'(x)\right] dx .$$

Supposons maintenant que x_1 tende vers x, en faisant $x_1 = x + \delta x$; on aura, d'après le théorême des accroissements finis :

$$dy_1 - dy = f''(x + \theta . \delta x)\, dx . \delta x ,$$

et, à la limite, en faisant tendre δx vers zéro :

$$\text{valeur principale de } \left[dy_1 - dy\right] = f''(x)\, dx . \delta x$$

Le premier membre est donc un infiniment petit, dépendant du produit de deux infiniment petits, dx et δx, qui, d'après la manière même dont on les a introduits et définis, sont arbitraires et n'ont entre eux aucune liaison : nous les supposerons égaux (bien que cette hypothèse ne soit pas indispensable) afin de simplifier l'écriture il vient ainsi :

$$\text{val. principale de } \left[dy_1 - dy\right] = f''(x)\, dx^2 ;$$

le premier membre, valeur principale de la différence des différentielles dy et dy qui correspondent respectivement aux valeurs $x + dx$ et x de la variable, et au même accroissement dx, se nomme différentielle seconde de la fonction y, et se désigne par d^2y. Ainsi :

$$(2) \qquad d^2y = f''(x)\, dx^2$$

On voit qu'on obtient d^2y en différentiant l'expression $f'(x)\,dx$, de dy, et en traitant dans ce calcul le facteur dx comme une constante : c'est ce qui fait dire que d^2y est la différentielle de dy, lorsqu'on suppose l'accroissement dx indépendant de x ; mais cette manière de voir ne saurait, sans obscurité, être présentée comme la définition de la différentielle seconde.

13. — Différentielle seconde d'une fonction composée. — Soit $y = \varphi(u, v, w)$, u, v, w étant des fonctions de x ; on sait (N° 10) que

$$(3) \qquad dy = A\,du + B\,dv + C\,dw\,;$$

A, B, C étant les trois dérivées partielles de φ. Proposons-nous de calculer d^2y. On peut écrire :

$$dy = (Au' + Bv' + Cw')\,dx,$$

$u', v', \ldots$ étant les dérivées de $u, v, \ldots$ par rapport à x ; et par suite :

$$d^2y = \Big[Au' + Bv' + Cw'\Big]'_x\, dx^2$$

$$= \Big[Au'' + A'u' + \ldots\ldots\Big]\, dx^2,$$

Or, en vertu des relations $u'\,dx = du$; $A'\,dx = dA$; $u''dx^2 = d^2u$, on peut écrire :

$$(4) \qquad d^2y = A\,d^2u + dA.\,du + B\,d^2v + dB\,dv + \ldots\ldots$$

ce qui montre que d^2y s'obtient en différentiant l'expression (3) de dy, et en écrivant d^2u, d^2v, ... pour les différentielles de du, dv ..

14. — Remarques. — 1° La différentielle seconde de la variable indépendante, x, est nulle, car la dérivée seconde de la fonction $(f(x) =)\, x$ est égale à zéro. Ainsi $d^2x = 0$.

Cette relation est une conséquence de l'hypothèse, faite au N° 12, que $dx_1 = dx$, et aurait pu ne pas avoir lieu pour une autre hypothèse.

2° — En vertu de (2), la dérivée seconde de y, $f''(x)$ ou y''_x, est

égale au quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$. De même, si y et u sont fonctions de x, y admet, par rapport à u, une dérivée, y''_u, égale à $\frac{d^2y}{du^2}$: mais il importe d'observer que les deux numérateurs, dans les expressions $\frac{d^2y}{dx^2}$ et $\frac{d^2y}{du^2}$ ne représentent pas la même quantité. En effet, le premier d^2y est la différentielle seconde quand on suppose que x est la variable indépendante, c'est-à-dire $d^2x = 0$, tandis que le second d^2y est la différentielle seconde quand on suppose $d^2u = 0$.[1]

On peut d'ailleurs se rendre compte autrement de ce fait.

Soit

$$y = \varphi(u),$$

y et u étant fonctions de x. On a :

$$dy = \varphi'(u)\, du\,;$$

et en différentiant encore une fois, <u>x étant la variable indépendante</u> :

$$d^2y = \varphi''(u)\, du^2 + \varphi'(u)\, d^2u$$

Cette formule montre que $\varphi''(u)$, c'est-à-dire y''_u, n'est pas égal au quotient $\frac{d^2y}{du^2}$, où d^2y (premier membre de la formule) est la différentielle seconde de y quand x est la variable indépendante.

15. — Différentielles d'ordre supérieur. — En raisonnant sur la différentielle seconde comme on l'a fait sur la différentielle première, on définit de même la différentielle troisième :

$$d^3y = f'''(x)\, dx^3\,;$$

et en général

$$d^ny = f^n(x)\, dx^n\,;$$

d'où

$$f^n(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

Dans le cas d'une fonction composée, on calcule d^3y en différentiant l'expression (4) de d^2y, et en écrivant d^3u, d^3v, ... pour les différentielles de d^2u, d^2v, ...

---

(1) Au contraire (n° 11) dans les deux expressions des deux dérivées premières : $y'_x = \frac{dy}{dx}$; $y'_u = \frac{dy}{du}$, les deux numérateurs dy représentent la même quantité.

III – Dérivées et différentielles des fonctions de plusieurs variables.

16. — Soit $z = f(x,y)$ une fonction de deux variables indépendantes, on désignera par f'_x sa dérivée partielle par rapport à x, c'est-à-dire la dérivée de $f(x,y)$ lorsque x est regardé comme variable indépendante, et y comme constant. On définit de même f'_y. La dérivée partielle de f'_x par rapport à x s'écrit f''_{x^2} ; sa dérivée partielle par rapport à y, f''_{xy} ; et on définit de même f''_{yx} et f''_{y^2}, etc........

Théorème. — On peut intervertir arbitrairement l'ordre des dérivations. — Montrons d'abord que $f''_{xy} = f''_{yx}$; et, à cet effet, établissons que chacun des deux membres est la limite de l'expression :

$$(5) \qquad \frac{f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x,y)}{hk},$$

lorsque h et k tendent vers zéro d'une manière quelconque.

Posons :

$$f(x, y+k) - f(x,y) = \varphi(x,y) ;$$

l'expression (5) s'écrit :

$$\frac{1}{hk}\Big[\varphi(x+h) - \varphi(x,y)\Big],$$

ou, en vertu de la formule des accroissements finis

$$\frac{1}{k}\varphi'(x+\theta h, y), \ldots \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{k}\Big[f'_x(x+\theta h, y+k) - f'_x(x+\theta h, y)\Big]$$

Appliquons encore la même formule ; la dernière expression s'écrit :

$$f''_{xy}(x+\theta h, y+\theta_1 k),$$

et sa limite, pour h et k nuls, est bien f''_{xy}, à condition toutefois que f''_{xy} soit continue au point x, y. On établirait de même que (5) a pour limite f''_{yx}. Donc $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Remarque. – Cette démonstration suppose qu'on peut appliquer aux fonctions φ (c'est-à-dire f), f'_x et f'_y la formule des accroissements finis : il faut donc que f, f'_x, f'_y soient des fonctions continues aux environs du point x, y et que f''_{xy}, f''_{yx} soient finies et déterminées en ce point. De plus, comme on l'a dit explicitement, il faut aussi

que f''_{xy} et f''_{yx} soient continues au même point.

Généralisation. — Si on a plus de deux indices de dérivation, on peut intervertir des indices consécutifs. Ainsi je dis que :

(6) $$f^{v}_{xy\underline{x}xy} = f^{v}_{x\underline{xy}xy}$$

Car, d'après le théorème ci-dessus :

(7) $$f'''_{xyx} = f'''_{xxy}$$

puisque les deux membres, en posant $f'_x = \psi$, sont ψ''_{yx} et ψ''_{xy}. Dérivant maintenant les deux membres de (7) par rapport à x, puis par rapport à y, on obtient bien la formule (6).

Il en résulte qu'on peut intervertir arbitrairement l'ordre des indices de dérivation, car on peut toujours passer d'un ordre à un autre par une série de permutations effectuées entre deux indices consécutifs.

17. — Différentielle totale. — Dans la fonction $z = f(x, y)$ donnons à x et y des accroissements h et k ; l'accroissement Δz, de z, peut s'écrire :

$$\Delta z = f(x+h, y+k) - f(x, y+k) + f(x, y+k) - f(x, y),$$

et, par la formule des accroissements finis :

$$\Delta z = hf'_x(x+\theta h, y+k) + kf'_y(x, y+\theta_1 k).$$

Si f'_x et f'_y sont continues aux environs du point x, y, on a :

$$f'_x(x+\theta h, y+k) = f'_x(x, y) + \varepsilon$$

$$f'_y(x, y+\theta_1 k) = f'_y(x, y) + \varepsilon'$$

ε et ε' étant infiniment petits en même temps que h et k ; il vient alors :

$$\Delta z = hf'_x + kf'_y + \varepsilon h + \varepsilon' k$$

Les deux derniers termes sont d'ordre infinitésimal supérieur, l'un à hf'_x, l'autre à kf'_y, c'est-à-dire que les deux premiers termes donnent la valeur principale de Δz[1]. Ces deux termes forment ce qu'on nomme la différentielle totale de z, pour les valeurs x, y et les accroissements h et k des variables ; on la désigne par dz :

---

(1) Si dans l'expression d'un infiniment petit, Δz, qui dépend de deux ou

$$dz = h f'_x + k f'_y$$

En particulier, si $z = x$, on a $f'_y = 0$, $f'_x = 1$, d'où :

$$dx = h \text{ et de même } dy = k \;;$$

on peut donc écrire :

(8) $$dz = f'_x\, dx + f'_y\, dy$$

Notations diverses. – Les dérivées partielles de $z = f(x,y)$ s'écrivent :

$$f'_x \text{ et } f'_y \;;\; \text{ou } z'_x \,;\, z'_y \qquad \text{(Lagrange)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} \;;\; \text{ou } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \qquad \text{(Jacobi)}$$

On aura toujours soin, quand il s'agira de dérivées partielles, de prendre la lettre ∂, en réservant le d pour les différentielles totales; on écrira donc :

(9) $$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Pour une fonction, $y = f(x)$, d'une seule variable, la dérivée s'écrira $\frac{dy}{dx}$, parce qu'elle est le quotient de deux différentielles totales; mais pour la fonction $z = f(x,y)$, la dérivée par rapport à x ne saurait s'écrire $\frac{dz}{dx}$, parce qu'elle n'est pas le quotient de la différentielle totale (8) par dx; de là l'utilité de la représenter par $\frac{\partial z}{\partial x}$.

18. – Différentielle totale d'une fonction composée. – Soit

$$z = \varphi(u, v, w)$$

une fonction de u, v, w qui sont eux-mêmes fonctions des variables

---

plusieurs infiniment petits, $h, k, \ldots$ indépendants entre eux, on supprime tout terme qui est certainement d'un ordre infinitésimal supérieur à un autre, l'expression restante est ce qu'on peut appeler valeur principale de Δz. Par exemple, pour les infiniment petits :

$$5h + 2k^2 + 3hk + 4k^3 \;;\qquad 4h^2 + 3hk + 2hk^2 \;;\qquad hk + 6h^2k + 8k^3$$

les valeurs principales sont respectivement :

$$5h + 2k^2 \quad;\quad 4h^2 + 3hk \quad;\quad hk + 8k^3$$

car, dans la première expression, $3hk$ est d'ordre supérieur à $5h$, et $4k^3$ d'ordre supérieur à $2k^2$; dans la seconde $2hk^2$ est d'ordre supérieur à $3hk$; dans la troisième $6h^2k$ est d'ordre supérieur à hk.

indépendantes x, y. On aura, par la formule (9)

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy ;$$

et, par la théorie des dérivées :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \dots\dots\dots$$

d'où :

$$dz = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\left[\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right] + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\left[\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right] + \dots\dots$$

c'est-à-dire :

$$dz = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv + \frac{\partial \varphi}{\partial w} dw,$$

formule fondamentale dans laquelle les variables indépendantes et leurs différentielles ne figurent pas explicitement : c'est la même formule que dans le cas d'une seule variable indépendante (N° 10, équation (1)).

En particulier, si des fonctions u, v, w de deux (ou n) variables indépendantes sont liées par la relation :

$$0 = \varphi(u, v, w),$$

on en déduira, puisque la différentielle du premier membre est évidemment nulle :

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv + \frac{\partial \varphi}{\partial w} dw,$$

quelques soient les variables indépendantes et quelque soit leur nombre.

Remarque. — Soit $z = f(x, y)$; changeons de variables indépendantes en prenant pour nouvelles variables deux fonctions, X et Y, de x et y : aux accroissements dx et dy correspondent, pour X et Y, des accroissements dX et dY et pour z un accroissement Δz, de valeur principale dz. Inversement, il est clair que si X et Y sont les variables indépendantes, aux accroissements dX et dY ci-dessus correspondent, pour x et y, les mêmes accroissements dx et dy, et par suite le même accroissement de z, c'est-à-dire la même valeur de dz. En d'autres termes, la différentielle première, dz, garde la même <u>valeur</u> quand on change les variables indépendantes, pourvu, bien entendu que les accroissements des variables indépendantes anciennes et nouvelles soient correspondants.

Cette propriété, comme on le verra, ne subsiste pas pour

les différentielles d'ordre supérieur.

19. – Théorème. – Si on a obtenu, d'une manière quelconque, l'expression de la différentielle totale d'une fonction z, de deux variables indépendantes x et y, sous la forme :

$$dz = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy ,$$

on a nécessairement

$$P = \frac{\partial z}{\partial x} \; ; \qquad Q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

En effet, d'après l'expression (9) de dz :

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = P dx + Q dy ,$$

égalité qui doit avoir lieu pour tous les systèmes de valeurs infiniment petits de dx et dy, car, d'après l'hypothèse, x et y, et par suite leurs accroissements, sont indépendants l'un de l'autre. En particulier, faisant $dy = 0$ et divisant par dx il reste $\frac{\partial z}{\partial x} = P$, de même $\frac{\partial z}{\partial y} = Q$.

20. – Utilité des différentielles totales. – Supposons qu'on ait un système de m équations entre $m+n$ quantités, qui ne sont d'ailleurs liées par aucune autre relation ; par exemple $m=3$, $n=2$:

$$(10) \qquad \begin{aligned} \varphi_1(x,y,z,t,u) &= 0 \\ \varphi_2(x,y,z,t,u) &= 0 \\ \varphi_3(x,y,z,t,u) &= 0 \end{aligned}$$

Comme il y a 5 quantités et 3 équations, $5-3=2$ de ces quantités, x et y, par exemple, pourront être regardées comme variables indépendantes, les trois autres seront des fonctions de celles-là.

Dérivons nos équations, comme on a toujours le droit de le faire, par rapport aux variables indépendantes x et y ; il vient :

$$(11) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \cdots\cdots\cdots = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

soit en tout six équations, où figurent les six dérivées partielles

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} .$$

Le système (11) peut être remplacé, si l'on emploie les différentielles totales, par un système équivalent, formé de trois équations seulement, et en outre avec cet avantage qu'on n'est pas obligé de choisir dès le début les variables indépendantes.

Différentions en effet les équations (10) : il est inutile, pour cela, de fixer les variables indépendantes, puisque le résultat de la différentiation garde toujours la même forme (N°18). On a ainsi :

$$(12)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}dz + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}dt + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}du = 0 \\ &\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}dx + \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 0 \\ &\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}dx + \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 0 \end{aligned}$$

Le système (12) est d'ailleurs équivalent au système (11) : supposons en effet que les variables indépendantes soient x, y, et faisons, dans la première équation (12), $dy = 0$: dz, dt, du sont alors les valeurs principales des accroissements de z, t, u quand x augmente de dx, y, restant constant ; leurs quotients par dx sont donc les dérivées de z, t, u par rapport à x. L'équation considérée devient donc, après division par dx :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

c'est-à-dire la première des équations (11). De même en faisant, dans la première équation (12), $dx = 0$, on trouverait la seconde équation (11), et ainsi de suite. Le système (12) contient donc le système (11).

Mais le système (12) est généralement plus utile que le système (11), principalement en Géométrie, en Physique et en Mécanique, où l'on a souvent besoin des relations qui lient les différentielles (ou les accroissements) des quantités variables considérées dans un problème.

21. – **Différentielle seconde.** – Comparons les différentielles dz et (dz_1) d'une fonction $z = f(x, y)$ pour deux systèmes de valeurs x, y et x_1, y_1 des variables :

$$dz = f'_x(x,y)\,dx + f'_y(x,y)\,dy\,; \qquad dz_1 = f'_x(x_1,y_1)\,dx_1 + f'_y(x_1,y_1)\,dy_1$$

Pour que la comparaison ait un sens, il faut que les infiniment petits, dx_1 et dy_1, qui sont arbitraires soient liés à dx et dy : on fera les hypothèses $dx_1 = dx$; $dy_1 = dy$. Il vient alors :

(13) $$dz_1 - dz = \left[f'_x(x_1, y_1) - f'_x(x,y)\right] dx + \left[f'_y(x_1, y_1) - f'_y(x,y)\right] dy$$

Faisons tendre x_1 et y_1 vers x et y, en posant

$$x_1 = x + \delta x \; ; \quad y_1 = y + \delta y \; ;$$

et cherchons la valeur principale du second membre. La valeur principale de

$f'_x(x_1, y_1) - f'_x(x,y)$ est (n° 17) : $\delta x \, f''_{x^2}(x,y) + \delta y \, f''_{xy}(x,y)$; celle de $f'_x(x_1, y_1) - f'_y(x,y)$ est de même $\delta x \, f''_{yx} + \delta y \, f''_{y^2}$; il vient ainsi :

$$\text{valeur principale de } \left[dz_1 - dz\right] = f''_{x^2} \, dx \, \delta x + f''_{xy}(dx \, \delta y + dy \, \delta x) + f''_{y^2} \, dy \, \delta y$$

On supposera maintenant (hypothèses non indispensables) que :

$$\delta x = dy \; ; \qquad \delta y = dy \; ,$$

et on désignera par d^2z (différentielle seconde) le premier membre, c'est-à-dire la valeur principale de la quantité $dz_1 - dz$, en représentant par dz la différentielle totale qui correspond aux valeurs x, y, et aux accroissements dx, dy, des variables, et par dz_1 la différentielle qui correspond aux valeurs $x + dx$, $y + dy$, et aux accroissements dx, dy des variables. Ainsi :

$$d^2z = f''_{x^2} \, dx^2 + 2 f''_{xy} \, dx \, dy + f''_{y^2} \, dy^2 \; ;$$

ce qu'on écrit aussi :

(14) $$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} dx \, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 \; ;$$

en posant, d'une manière générale :

$$f^{(\alpha+\beta)}_{x^\alpha y^\beta}(x,y) = \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \, \partial y^\beta}$$

On voit qu'on obtient l'expression (14) de d^2z en différentiant le second membre de la relation :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \; ,$$

et en traitant, dans ce calcul, les facteurs dx, dy comme des constantes : En effet,

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} dy$$

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \, \partial x} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy \, .$$

et on a bien :

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy$$

On peut donc dire que d^2z est la différentielle de dz, lorsqu'on suppose les accroissements dx, dy indépendants de x et y.

D'après la définition, à cause des hypothèses $dx_1 = dx$, $dy_1 = dy$, d^2z n'est déterminé que si on se fixe les variables indépendantes dont dépend z ; on devrait donc écrire $d^2_{xy}z$ pour préciser.

22. — Différentielle seconde d'une fonction composée. — Soit

$$z = f\,(u, v)$$

une fonction des quantités u, v qui sont elles-mêmes fonctions des variables indépendantes $x\,y$. On a (N° 18) :

$$dz = A\,du + B\,dv \ldots\ldots\ldots \left(A \text{ et } B \text{ étant } \frac{\partial f}{\partial u} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$= A\left[\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right] + B\left[\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right]$$

On a ainsi mis dz sous la forme $P\,dx + Q\,dy$; pour obtenir $d^2_{xy}z$, il faut, d'après la règle du N° précédent, différentier le second membre, en traitant dans le calcul dx et dy comme des constantes. Il vient ainsi :

$$d^2_{xy}z = dA\left[\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right] + A\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2\right] + \cdots$$

c'est-à-dire :

$$(15) \qquad d^2z = dA\,du + A\,d^2u + dB\,dv + B\,d^2v$$

En d'autres termes, d^2z s'obtient en différentiant l'expression $A\,du + B\,dv$, de dz, et en écrivant d^2u et d^2v pour les différentielles de du et de dv : c'est la même règle que pour les fonctions composées d'une seule variable.

On peut d'ailleurs donner une autre forme à la formule (15). On a :

$$A = \frac{\partial f}{\partial u}\,; \qquad B = \frac{\partial f}{\partial v}\,; \qquad \text{d'où :}$$

$$dA = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}du + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}dv$$

$$dB = \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}du + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}dv\,;$$

ce qui donne, dans (15) :

$$(16) \qquad d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial f}{\partial u}d^2u + \frac{\partial f}{\partial v}d^2v.$$

formule où les variables indépendantes n'entrent pas <u>explicitement</u>.

23. – Remarques. – 1°. – Les différentielles secondes des variables indépendantes x et y sont nulles, en vertu de (14); donc : $d^2x = d^2y = 0$, relations qui sont des conséquences des hypothèses du N° 21 : $dx_1 = dx$, $dy_1 = dy$, et auraient pu ne pas avoir lieu pour d'autres hypothèses.

2°. La différentielle <u>seconde</u> d'une fonction composée, $z = f(u,v)$

$$(16) \qquad d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial f}{\partial u}d^2u + \frac{\partial f}{\partial v}d^2v$$

n'a pas la même <u>valeur</u> que si u et v étaient les variables indépendantes, la différence provient des termes en d^2u et d^2v : ainsi $d^2_{xy}z$ n'est pas la même que $d^2_{uv}z$; cette dernière serait donnée par (16) où l'on ferait $d^2u = d^2v = 0$.

Il importe également d'observer que la <u>forme</u> (16) de d^2z reste la même si l'on substitue aux variables anciennes, x et y, d'autres variables X et Y; cela résulte de ce que les variables indépendantes ne figurent pas explicitement dans le second membre de (16), de sorte que $d^2_{xy}z$ et $d^2_{xy}z$ sont tous les deux représentés par ce second membre; seulement, d^2u et d^2v désignent dans le premier cas $d^2_{xy}u$ et $d^2_{xy}v$; dans le second cas $d^2_{xy}u$ et $d^2_{xy}v$, et l'on voit ainsi que si la <u>forme</u> de d^2z est restée la même, sa <u>valeur</u> a changé.

3°. On a supposé que z n'était fonction composée que des <u>deux</u> fonctions u et v; si $z = f(u,v,w)$ on a :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv + \frac{\partial z}{\partial w}dw$$

et en différentiant, suivant la règle :

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial w^2}dw^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}du\,dv + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial w}du\,dw + 2\frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial w}dv\,dw$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial u}d^2u + \frac{\partial z}{\partial v}d^2v + \frac{\partial z}{\partial w}d^2w.$$

4°. De même, si z est fonction de trois variables indépendantes, x, y, t on a

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}dt^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial t}dx\,dt + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial t}dy\,dt;$$

il n'y a pas de termes en d^2x, d^2y, d^2t puisque ces quantités sont nulles, x, y, t étant les variables indépendantes.

L'extension des formules 3°. et 4°. à un nombre quelconque de fonctions ou de variables indépendantes est immédiate.

5°. La dérivée seconde partielle $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ n'est pas le quotient de la différentielle seconde, $d^2 z$, par le carré de dx; la formule

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

le montre immédiatement. Même observation pour $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, et de là encore l'utilité, pour éviter toute confusion, d'employer la lettre ∂ dans les dérivées partielles.

24. — Différentielles d'ordre supérieur. — En raisonnant sur la différentielle seconde, $d^2 z$, comme on l'a fait sur dz, on définit la différentielle troisième, $d^3 z$ d'une fonction, z, de deux variables indépendantes x et y : celle-ci s'obtient en différentiant l'expression de $d^2 z$, et en traitant, dans ce calcul, dx et dy comme des constantes. Ainsi, de la relation :

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 ,$$

on déduit :

$$d^3_{xy} z = d\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) dx^2 + 2 d\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) dx\, dy + d\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) dy^2$$

Or :

$$d\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx + \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dy$$

. . . .

ce qui donne facilement :

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3 .$$

On aurait de même $d^4 z$, et ainsi de suite.

La loi de formation est évidente ; les coefficients sont ceux du binôme, de sorte qu'en général :

$$(17) \qquad d^n z = \frac{\partial^n z}{\partial x^n} dx^n + n \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2} \partial y^2} dx^{n-2} dy^2 + \dots$$

Pour établir cette formule, vérifiée pour $n = 1$ et $n = 2$, montrons que si elle est vraie pour une valeur, n, elle est vraie pour $n + 1$. A cet effet, différentions (17), en traitant, dans le calcul, dx et dy comme des constantes ; il vient :

$$(18) \qquad d^{n+1} z = \left[\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}} dx + \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n \partial y} dy \right] dx^n + \dots\dots$$

On voit que le coefficient du terme en $\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{p+1} \partial y^{n-p}} dx^{p+1} dy^{n-p}$ est

la somme de deux coefficients consécutifs du second membre (17), à savoir ceux des termes en $\frac{\partial^n z}{\partial x^{p+1} \partial y^{n-p-1}}$ et $\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}}$, coefficients qui, dans la notation des combinaisons, se représentent par C_n^{p+1} et C_n^p. Or on a (cours de spéciales):

$$C_n^{p+1} + C_n^p = C_{n+1}^{p+1},$$

ce qui démontre le théorème.

25. _ Différentielles successives d'une fonction composée. _ Les différentielles successives d'une fonction composée $z = f(u, v)$ s'obtiennent (N° 22) en différentiant une, deux, trois ... fois la relation:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv,$$

et en écrivant d^2u, d^3u, ... pour les différentielles successives de du, d^2u, ... La démonstration est la même que celle donnée au N° 22 pour d^2z:

On obtiendra ainsi l'expression de $d^n z$ en fonction de

$$du, dv, d^2u, d^2v, \dots d^nu, d^nv,$$

toutes ces différentielles correspondant bien entendu au même choix des variables indépendantes.

26. _ Différentielles d'un produit. _ En particulier, soit la fonction composée

$$z = uv;$$

on a;

$$dz = u\,dv + v\,du,$$
$$d^2z = u\,d^2v + 2\,du\,dv + v\,d^2u,$$

et en général:

$$d^nz = u\,d^nv + n\,du\,d^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2} d^2u\,d^{n-2}v + \dots$$

les coefficients étant ceux du binôme. On établit cette formule par la méthode du N° 24; elle est due à Leibnitz.

27. _ Théorème. _ Si on a obtenu d'une manière quelconque l'expression de la différentielle seconde d'une fonction z, de deux variables indépendantes, x et y, sous la forme:

$$d^2z = A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + C\,dy^2,$$

on a nécessairement $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Car les deux expressions $\left(\text{où } \lambda = \frac{dy}{dx}\right)$:

$$A + 2B\lambda + C\lambda^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,\lambda + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,\lambda^2$$

doivent être identiques, quelle que soit la valeur de λ.

L'extension à d^3z, d^4z, ... et à un nombre quelconque de variables indépendantes est immédiate.

28. — Dans le cas particulier d'une fonction, z, de <u>deux</u> variables indépendantes x et y, on fait souvent usage des notations suivantes, qu'il est utile de connaître. On pose :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \;; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r \;; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = s \;; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t .$$

On a ainsi :

$$dz = p\,dx + q\,dy$$
$$d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 .$$

L'équation $z = f(x, y)$ représente une surface ; en un point de cette surface (x, y, z), on sait que le plan tangent a pour équation

$$Z - z = f'_x (X - x) + f'_y (Y - y) ;$$

ou, avec les notations ci-dessus :

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y) .$$

IV. Déterminants fonctionnels.

---

29. — Définition ; première propriété. — Soient n fonctions de n variables indépendantes, $n = 3$ par exemple :

$$u = f_1(x, y, z) \;; \quad v = f_2(x, y, z) \;; \quad w = f_3(x, y, z) .$$

On nomme <u>déterminant fonctionnel</u> ou <u>Jacobien</u> de ces fonctions le déterminant de leurs dérivées partielles :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

et on le désigne souvent par la notation $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$. Cette notation est justifiée par ce fait que le Jacobien joue, dans la théorie des fonctions de plusieurs variables, un rôle analogue à celui de la dérivée dans celle des fonctions d'une variable.

La première propriété du Jacobien est la généralisation de la formule :

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{du}{dx}\,\frac{dx}{d\xi}$$

où u et ξ sont des fonctions de x. Pour le Jacobien, on a la formule analogue :

$$(19)\qquad \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} = \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} \cdot \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)},$$

en supposant que u, v, w soient des fonctions de x, y, z et que x, y, z soient eux-mêmes des fonctions de trois autres variables indépendantes, ξ, η, ζ.

Cette formule, en effet, n'est autre, par définition, que celle-ci :

$$(20)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial u}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}$$

Or on a, d'après la théorie des dérivées :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial \xi}$$

et des expressions semblables pour $\frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \dots \frac{\partial w}{\partial \zeta}$. Si on porte ces valeurs dans le premier des trois déterminants (20), on obtient un déterminant, qui, en vertu d'une règle connue, est le produit du second et du troisième déterminants (20) : la formule (19) est donc vérifiée.

30. – Corollaire. – Si u, v, w sont fonctions de x, y, z, on peut inversement considérer x, y, z comme fonctions de u, v, w, c'est-à-dire que pour les variables ξ, η, ζ du N° précédent, on peut prendre u, v, w. Faisons donc dans la formule (20) $\xi = u$; $\eta = v$; $\zeta = w$; le premier membre se réduit au détrimant $\begin{vmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{vmatrix} = 1$, et il reste :

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} \cdot \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = 1 \quad ,$$

c'est-à-dire que le Jacobien de u, v, w par rapport à x, y, z est l'inverse du Jacobien de x, y, z par rapport à u, v, w.

31. – Seconde propriété. – La condition nécessaire et suffisante pour que n fonctions de n variables indépendantes soient liées par une relation est que leur Jacobien, par rapport à ces variables, soit nul.

Soient par exemple les trois fonctions de trois variables :

$$u = f_1(x,y,z) \; ; \qquad v = f_2(x,y,z) \; ; \qquad w = f_3(x,y,z) \; ;$$

je dis que la condition énoncée $\left[\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = 0\right]$ est nécessaire et suffisante.

1° En effet, si u, v, w sont liées par une relation

$$\varphi(u, v, w) = 0 ,$$

(où ne figure, bien entendu, explicitement aucune des variables x, y, z) on en déduit en dérivant successivement par rapport aux trois variables indépendantes x, y, z :

$$(21) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} &= 0 , \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} &= 0 , \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} &= 0 , \end{aligned}$$

c'est-à-dire trois équations linéaires et homogènes en $\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \frac{\partial\varphi}{\partial w}$; comme la fonction φ contient, par hypothèse, une au moins des quantités u, v, w ; les trois dérivées partielles, $\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \frac{\partial\varphi}{\partial w}$ ne sont pas nulles simultanément, ce qui exige que le déterminant de leurs coefficients, dans le système (21), soit identiquement nul. Ce déterminant étant précisément le Jacobien $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$, la condition énoncée est nécessaire.

2° Elle est suffisante : car, dire que le déterminant Jacobien est nul, c'est dire qu'on peut déterminer trois fonctions, α, β, γ de x, y, z, non nulles simultanément et vérifiant les relations :

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial x} + \gamma \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$
$$\alpha \frac{\partial u}{\partial y} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$
$$\alpha \frac{\partial u}{\partial z} + \beta \frac{\partial v}{\partial z} + \gamma \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Multiplions la première de ces relations par dx, la seconde par dy, la troisième par dz, et ajoutons membre à membre ; il vient :

$$(22) \qquad \alpha\, du + \beta\, dv + \gamma\, dw = 0,$$

et je dis que cette équation (22) établit que u, v, w ne sont pas indépendants l'un de l'autre, c'est-à-dire sont liés par une relation. En effet, si u, v, w étaient indépendants, on pourrait les prendre comme variables indépendantes à la place de x, y, z, de sorte que leurs différentielles totales, (ou accroissements) du, dv, dw seraient absolument arbitraires : du, dv, dw seraient donc indépendants entre eux et indépendants aussi des valeurs de x, y, z, u, v, w, c'est-à-dire qu'aucune équation telle que (22) ne pourrait avoir lieu. L'existence d'une telle équation entraîne donc la conséquence que u, v, w sont liés par une relation $\varphi(u, v, w) = 0$. C. q. f. d.

Exemple. — Les fonctions de deux variables indépendantes :

$$u = xy \,; \qquad v = \log x + \log y$$

sont liées par une relation, car leur Jacobien :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \end{vmatrix} = 0$$

On a en effet $v = \log u$, comme on le voyait a priori.

Chapitre II.

Changements de variables.

32. — Énoncé du problème. — Soit z une fonction de n variables indépendantes, $x, y, \ldots\ldots$, $z = f(x, y, \ldots)$; On se donne $n+1$ quantités, $u, v, \ldots\ldots w$, fonctions de $x, y, \ldots z$:

$$u = \varphi(x, y, \ldots z)\ ; \quad v = \psi(x, y, \ldots z); \ldots\ldots w = \chi(x, y, \ldots z).$$

En vertu de ces expressions et de l'équation $z = f(x, y, \ldots)$, il existe une relation entre $u, v, \ldots w$, c'est-à-dire que w est fonction de $u, v, \ldots\ldots$ Cela posé, le problème du changement de variables est le suivant :

Exprimer les dérivées partielles successives de z par rapport à $x, y, \ldots$ $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots\ldots$ en fonction des dérivées partielles successives de w par rapport à $u, v, \ldots\ldots$, $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \ldots$; ou inversement : exprimer $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, \ldots$ en fonction de $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \ldots\ldots$

Ce problème peut être traité de bien des manières ; on n'indiquera ici qu'une seule méthode, reposant sur l'emploi des différentielles totales. Afin de préciser l'énoncé de la règle finale, on appellera :

fonction et variables anciennes celles qui figurent dans les dérivées dont on cherche l'expression ;

fonction et variables nouvelles celles qui figurent dans les dérivées à l'aide desquelles on veut exprimer les précédentes.

Ainsi si on cherche l'expression de $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots$ en fonction de $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, \ldots$ la fonction ancienne sera z, les variables anciennes $x, y, \ldots$; la fonction nouvelle sera w, les variables nouvelles $u, v, \ldots$

Solution.

33. — Cela posé, supposons, pour simplifier l'écriture, $n=2$; z est fonction des deux variables indépendantes, x, y et on se donne les équations qui définissent le changement de variables:

$$(1) \qquad u = \varphi(x,y,z)\,; \quad v = \psi(x,y,z)\,; \quad w = \chi(x,y,z).$$

Admettons que les fonction et variables anciennes soient z, x, y c'est-à-dire qu'on cherche à exprimer $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, ... en fonction de $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$, ...

Partons de la relation de différentielles totales entre la fonction et les variables nouvelles:

$$(2) \qquad dw = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv,$$

et différentions les équations du changement de variables (1):

$$(3) \qquad \begin{aligned} du &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz \\ dv &= \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \dots\dots\dots\dots \\ dw &= \frac{\partial \chi}{\partial x}dx + \dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Portons maintenant ces valeurs (3) de du, dv, dw [1] dans la relation (2); il vient, en ordonnant par rapport à dx, dy, dz:

$$0 = dx\left[\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \chi}{\partial x}\right] + dy\left[\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \cdots\right] + dz\left[\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \cdots\right]$$

Si l'on résout cette équation par rapport à dz, on a une relation de la forme:

$$(4) \qquad dz = P\,dx + Q\,dy,$$

et, d'après le N° 19, le coefficient P est égal à $\frac{\partial z}{\partial x}$, Q à $\frac{\partial z}{\partial y}$. Donc:

---

[1] Il n'est pas nécessaire de supposer, comme nous l'avons fait pour simplifier les écritures, que les trois équations (1) du changement de variables sont résolues par rapport aux variables nouvelles u, v, w: quelle que soit leur forme, en les différentiant on obtiendra trois equations (3), d'où l'on tirera linéairement du, dv, dw pour les porter dans (2). En d'autres termes on éliminera du, dv, dw entre (2) et (3).

$$(5)\qquad -\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial x}-\frac{\partial \chi}{\partial x}}{\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial z}-\frac{\partial \chi}{\partial z}}\ ;\qquad -\frac{\partial z}{\partial y}=\text{———}$$

ce qui donne les expressions cherchées de $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, en fonction de $\frac{\partial W}{\partial u}, \frac{\partial W}{\partial v}$ (et des dérivées partielles des fonctions données φ, ψ, χ).

Le problème du changement de variables est donc résolu pour les dérivées premières ; reste à calculer les dérivées secondes, etc....

On opère d'une manière analogue, en différentiant les équations (2) et (3) dont on vient de se servir, et en regardant comme variables indépendantes les variables anciennes, x, y.
On trouve ainsi :

$$(2\ bis)\qquad d^2W=\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v}du\,dv+\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}dv^2+\frac{\partial W}{\partial u}d^2u+\frac{\partial W}{\partial v}d^2v$$

$$d^2u=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\cdots\cdots+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}dz^2+\frac{\partial\varphi}{\partial z}d^2z$$

$$(3\ bis)\qquad d^2v=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dx^2+\cdots\cdots$$

$$d^2W=\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}dx^2+\cdots\cdots$$

Portons dans (2 bis) les valeurs de d^2u, d^2v, d^2W tirées de (3 bis) et les valeurs de du, dv tirées de (3) ; nous obtenons ainsi une relation de la forme :

$$0=M\,dx^2+N\,dy^2+P\,dz^2+2Q\,dx\,dy+2R\,dx\,dz+2S\,dy\,dz+T\,d^2z\ ;$$

dans laquelle nous remplacerons dz par sa valeur (4) ce qui donne une relation finale de la forme :

$$C\,dx^2+2D\,dx\,dy+E\,dy^2+T\,d^2z=0,$$

où C, D, E, T sont des fonctions de $\frac{\partial W}{\partial u}, \frac{\partial W}{\partial v}, \frac{\partial^2 W}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v}, \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}$ et des dérivées partielles premières et secondes des fonctions données φ, ψ, χ.
Résolvant par rapport à d^2z, on sait (N° 27) que les coefficients de dx^2, $2\,dx\,dy$, dy^2 sont $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, en sorte que :

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{C}{T}\ ;\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{D}{T}\ ;\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{E}{T},$$

ce qui résout le problème pour les dérivées secondes.

On obtiendrait de même les dérivées troisièmes en différentiant les équations (2 bis) et (3 bis), et ainsi de suite.

Voici donc la règle qui résume la solution du problème des changements de variables.

34. _ Règle. _ Soient z _ x, y la fonction et les variables anciennes; w _ u, v la fonction et les variables nouvelles:

1° On écrit l'équation de différentielles totales entre la fonction et les variables nouvelles (équation A: $dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv$).

2° On différentie les équations qui définissent le changement de variables (équations B).

3° On élimine entre A et B les différentielles des fonctions et variables nouvelles, dw, du, dv.

On obtient ainsi une relation, C, entre dz, dx, dy qui donne immédiatement (N° 19) l'expression de $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}$.

Pour exprimer les dérivées secondes de z, on différentie A et B, et regardant comme variables indépendantes les variables anciennes, x et y; entre ces nouvelles relations, A', B' et les équations B et C (ou B et A) on élimine les différentielles premières et secondes des fonction et variables nouvelles: $dw, du, dv, d^2w, d^2u, d^2v$, ainsi que la différentielle première de la fonction ancienne, dz: le résultat est une relation, C', entre d^2z, dx, dy qui donne immédiatement (N° 27) l'expression de $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

En différentiant encore A' et B', et opérant d'une manière analogue, on aurait les dérivées troisièmes, et ainsi de suite.

Cas particuliers et exemples.

35. _ Exemple I. _ Soit $z = f(x, y)$; on pose

$$u = y + z; \quad v = z + x; \quad w = x + y$$

et on demande d'exprimer $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ en fonction des dérivées partielles (premières et secondes) de w par rapport à u et v.

Appliquons la règle: la fonction et les variables nouvelles étant w _ u, v écrivons:

$$(A) \qquad dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv$$

Les équations (B), obtenues en différentiant les équations du changement de variables sont :

$$(B) \qquad \begin{aligned} du &= dy + dz \\ dv &= dz + dx \\ dw &= dx + dy \end{aligned}$$

Entre (A) et (B) éliminons du, dv, dw pour former la relation (C) entre dx, dy, dz ; il vient :

$$dx\left(\frac{\partial W}{\partial v} - 1\right) + dy\left(\frac{\partial W}{\partial u} - 1\right) + dz\left(\frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\partial W}{\partial v}\right) = 0 \;;$$

ou :

$$(C) \qquad dz = \frac{1 - \frac{\partial W}{\partial v}}{\frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\partial W}{\partial v}}\, dx + \frac{1 - \frac{\partial W}{\partial u}}{\frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\partial W}{\partial v}}\, dy \;;$$

ce qui donne immédiatement (N° 19) les valeurs cherchées de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - \frac{\partial W}{\partial v}}{\frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\partial W}{\partial v}} \;; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 - \frac{\partial W}{\partial u}}{\frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\partial W}{\partial v}}$$

Reste à calculer $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; pour cela différentions (A) et (B), en regardant x et y, variables anciennes, comme les variables indépendantes :

$$(A') \qquad d^2W = \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} du\, dv + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial W}{\partial u} d^2u + \frac{\partial W}{\partial v} d^2v \;;$$

$$(B') \qquad \begin{aligned} d^2u &= d^2z \\ d^2v &= d^2z \\ d^2W &= 0 \end{aligned}$$

Eliminant d^2u, d^2v et d^2W entre (A') et (B'), et remplaçant du, dv par leurs valeurs (B) il vient :

$$0 = \frac{\partial^2 W}{\partial u^2}(dy+dz)^2 + 2\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v}(dy+dz)(dx+dz) + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}(dx+dz)^2 + \frac{\partial W}{\partial u} d^2z + \frac{\partial W}{\partial v} d^2z$$

ou en ordonnant :

$$0 = d^2z\left(\frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\partial W}{\partial v}\right) + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} dx^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} dy^2 + 2\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} dx\, dy + 2\left[\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v}\right] dy\, dz$$
$$+ 2\left[\frac{\partial^2 W}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v}\right] dx\, dz + \left[\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}\right] dz^2$$

Cette équation n'est pas encore l'équation définitive, parce qu'elle contient

non seulement d^2z, dx et dy, mais encore dz; tirons donc dz de (C) suivant la règle, et portons dans l'équation ci-dessus : comme nous cherchons l'expression de $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ nous n'aurons besoin que des coefficients de d^2z et de $dx\,dy$. On a ainsi :

$$(C')\qquad 0 = d^2z\left(\frac{\partial W}{\partial u}+\frac{\partial W}{\partial v}\right)+2\,dx\,dy\left\{\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v}+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v}\right)\frac{1-\frac{\partial W}{\partial v}}{\frac{\partial W}{\partial u}+\frac{\partial W}{\partial v}}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v}\right)\frac{1-\frac{\partial W}{\partial u}}{\frac{\partial W}{\partial u}+\frac{\partial W}{\partial v}}+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}\right)\frac{\left(1-\frac{\partial W}{\partial u}\right)\left(1-\frac{\partial W}{\partial v}\right)}{\left(\frac{\partial W}{\partial u}+\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2}\right\}+\cdots\cdots$$

Par conséquent on a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\{\qquad\}}{\frac{\partial W}{\partial u}+\frac{\partial W}{\partial v}}$$

en désignant par $\{\qquad\}$ le coefficient de $2\,dx\,dy$ dans l'équation (C').

36. _ Exemple II. _ Soit encore z une fonction de x, y; on prend pour variables indépendantes, à la place de x, y les quantités

$$u = \varphi(x,y) \quad ; \quad v = \psi(x,y)$$

et on conserve la fonction z : on demande d'exprimer les dérivées premières et secondes de z par rapport à x, y en fonction des dérivées de z par rapport à u, v.

La fonction et les variables nouvelles sont z, u, v; écrivons donc :

$$(A)\qquad dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

Les équations (B) sont ici

$$(B)\qquad \begin{aligned} du &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy \\ dv &= \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy \end{aligned}$$

D'où en éliminant du et dv :

$$(C)\qquad dz = dx\left[\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right]+dy\left[\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right]$$

ce qui donne :

$$(6)\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial x}\;;\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \cdots\cdots$$

Calculons les dérivées secondes en différentiant A et B, les variables indépendantes étant x et y.

(A') $$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} du\, dv + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial z}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial z}{\partial v} d^2 v$$

(B') $$d^2 u = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dy^2$$
$$d^2 v = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx^2 + \ldots\ldots$$

d'où ; en se servant de (B) :

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy\right)^2 + \ldots\ldots + \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx^2 + \ldots\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{d^2 \psi}{\partial x^2} dx^2 + \ldots\ldots\right)$$

Le second membre ne contenant que dx et dy, et non dz, il n'y a pas à utiliser (C) ; on a ainsi, en ordonnant par rapport à dx et dy :

$$d^2 z = dx^2\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right]$$
$$+ 2\, dx\, dy\left[\qquad\right] + dy^2\left[\qquad\right]$$

Ce qui donne :

(7) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \ldots\ldots\ldots$$

Remarque I. — Si on demande inversement d'exprimer $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \ldots$ en fonction de $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots$, la méthode générale exige qu'on recommence les calculs, en considérant x et y comme les variables nouvelles, u et v comme les variables anciennes. On peut toutefois se servir des calculs précédents, car les équations (6), linéaires par rapport à $\frac{\partial z}{\partial u}$ et $\frac{\partial z}{\partial v}$ fournissent ces quantités en fonction de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$; de même, des équations (7) on peut tirer linéairement $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$. Cette remarque s'applique au cas général.

Remarque II. — Dans le cas de l'exemple II, il est peut-être

plus court d'employer les dérivées au lieu des différentielles. En effet, z étant considéré comme une fonction de u et de v, qui sont eux-mêmes fonctions x et y, on a, par la théorie des dérivées :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

ce sont les équations (6), où l'on écrit $\frac{\partial u}{\partial x}, \dots$ au lieu de $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \dots$, ce qui revient au même, puisque $u = \varphi(x, y)$.

Dérivons ces deux équations successivement par rapport à x et y, en regardant $\frac{\partial z}{\partial u}$ et $\frac{\partial z}{\partial v}$ comme des fonctions de u et v, qui sont eux-mêmes fonctions de x et y ; il vient :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dots\dots\dots$$

c'est-à-dire les équations (7).

37. – Exemple III. – Soit $z = f(x, y)$; on prend pour variables indépendantes, à la place de x et y, $u = x$ et $v = \frac{y}{x}$; on demande d'exprimer $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ en fonction de $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \dots\dots$

La fonction et les variables nouvelles sont cette fois z, x, y ; la fonction et les variables anciennes sont z, u, v. On a :

(A) $\qquad dz = p\,dx + q\,dy \quad \dots \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y},\ n^o\ 28\right)$

D'ailleurs les équations du changement de variables :

$$x = u \quad ; \quad y = vu$$

donnent :

(B) $\qquad dx = du \quad ; \quad dy = v\,du + u\,dv$

Continuons les différentiations, en regardant comme variables indépendantes u et v, variables anciennes :

(A') $\qquad d^2z = p\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 + p\,d^2x + q\,d^2y$

(B') $\qquad d^2x = 0 \quad ; \quad d^2y = 2\,du\,dv$

d'où, en se servant de (B) :

$$d^2z = r\,du^2 + 2s\,du\,(v\,du + u\,dv) + t\,(v\,du + u\,dv)^2 + 2q\,du\,dv$$

La dérivée $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ est le coefficient de du^2 dans le second membre ; donc :

(8) $$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = r + 2sv + tv^2 \text{ .... ou, puisque } v = \frac{y}{x}$$
$$= \frac{1}{x^2}\left[r x^2 + 2s\, xy + ty^2\right]$$

38. _ Exemple IV. _ Soit encore $z = f(x, y)$; cette équation définit aussi y comme fonction de x et de z : on demande d'exprimer les dérivées de y par rapport à x et z, $\left(\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial z}, \ldots\right)$ en fonction des derivees de z par rapport à x et y, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots\right)$

La fonction et les variables nouvelles sont z _ x et y ; on écrira donc :

(A) $$dz = p\,dx + q\,dy$$

Quant aux équations (B), il n'y a pas lieu de les écrire, car elles se réduisent à $dx = dx$, $dy = dy$, $dz = dz$.

Résolvons (A) par rapport à dy :

(C) $$dy = -\frac{p}{q}\,dx + \frac{1}{q}\,dz,$$

ce qui donne

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{p}{q} \; ; \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{q}$$

Différentions (A), en regardant comme variables indépendantes x et z, variables anciennes ; il vient (puisque $d^2x = d^2z = 0$) :

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 + q\,d^2y = 0\,;$$

Enfin, pour obtenir la relation finale entre d^2y, dx et dz remplaçons dy par sa valeur (C) :

$$-q\,d^2y = r\,dx^2 + 2s\,dx\left[-\frac{p}{q}\,dx + \frac{1}{q}\,dz\right] + t\left[\frac{p}{q}\,dx - \frac{1}{q}\,dz\right]^2,$$

ce qui donne :

(9) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{1}{q}\left[r - 2s\frac{p}{q} + t\frac{p^2}{q^2}\right] = -\frac{1}{q^3}\left[rq^2 - 2spq + tp^2\right]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{q}\left[\frac{s}{q} - \frac{tp}{q^2}\right] = -\frac{1}{q^3}\left[qs - pt\right]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -\frac{t}{q^3}.$$

39. _ Exemple V. _ Considérons maintenant une fonction d'une seule variable, $y = f(x)$, et faisons le changement de variables :

$$x = \rho \cos \omega \; ; \quad y = \rho \sin \omega .$$

D'après $y = f(x)$, ρ est fonction de ω : on demande d'exprimer y'_x, y''_x (ou plus simplement y', y'') en fonction de ρ'_ω, ρ''_ω (ou ρ', ρ'').

La fonction et la variable nouvelles sont ρ et ω ; écrivons donc :

(A) $$d\rho = \rho' d\omega$$

(B) $$\begin{cases} dx = d\rho \cos \omega - \rho \sin \omega \, d\omega \\ dy = d\rho \sin \omega + \rho \cos \omega \, d\omega \end{cases}$$

Entre (A) et (B) éliminons $d\rho$ et $d\omega$; il suffit de diviser membre à membre les deux équations (B), ce qui donne en tenant compte de (A) :

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{\rho' \sin \omega + \rho \cos \omega}{\rho' \cos \omega - \rho \sin \omega},$$

c'est l'expression de y' en fonction de ρ'.

Pour calculer y'', différentions (A) et (B) en regardant comme variable indépendante la variable ancienne, x :

(A') $$d^2\rho = \rho'' d\omega^2 + \rho' d^2\omega$$

(B') $$\begin{cases} 0 = d^2\rho \cos \omega - 2 d\rho \, d\omega \sin \omega - \rho \cos \omega \, d\omega^2 - \rho \sin \omega \, d^2\omega \\ d^2y = d^2\rho \sin \omega + 2 d\rho \, d\omega \cos \omega - \rho \sin \omega \, d\omega^2 + \rho \cos \omega \, d^2\omega \end{cases}$$

D'après la méthode générale, il faut, pour obtenir une relation entre d^2y et dx, éliminer $d\rho$, $d\omega$, $d^2\rho$, $d^2\omega$ et dy entre (A), (B), (A'), (B') ; le plus simple est de tirer $d\omega$ et $d\rho$ de (A) et de la première équation (B) :

$$d\omega = \frac{dx}{D} \; ; \quad d\rho = \frac{\rho' dx}{D} \; ; \text{ en posant } D = \rho' \cos \omega - \rho \sin \omega$$

Tirons ensuite $d^2\rho$ et $d^2\omega$ de (A') et de la première équation (B') :

$$d^2\omega = \frac{1}{D}\left[(\rho - \rho'')\cos \omega \, d\omega^2 + 2 \sin \omega \, d\rho \, d\omega\right] = \frac{dx^2}{D^3}\left[(\rho - \rho'')\cos \omega + 2\rho' \sin \omega\right]$$

$$d^2\rho = \frac{1}{D}\left[\rho\left(\rho' \cos \omega - \rho'' \sin \omega\right) d\omega^2 + 2\rho' \sin \omega \, d\rho \, d\omega\right] = \frac{dx^2}{D^3}\left[\rho\left(\rho' \cos \omega - \rho'' \sin \omega\right) + 2\rho'^2 \sin \omega\right]$$

portons enfin toutes ces valeurs dans la seconde équation (B') ; celle-ci devient

$$D^3 \, d^2y = dx^2\left[\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''\right]$$

d'où :

$$y'' = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho' \cos \omega - \rho \sin \omega)^3}$$

40. — Exemple VI. — Soit $y = f(x)$; on pose $x = \varphi(t)$; on demande d'exprimer les dérivées de y par rapport à x en fonction des dérivées de y par rapport à t.

C'est le plus simple des problèmes de changement de variables et la méthode générale s'applique sans difficulté. Il est plus court de se servir des dérivées, au lieu des différentielles, et de raisonner comme il suit.

Soient y'_t, y''_t.... les dérivées de y par rapport à t, soient de même x'_t, x''_t,.... les dérivées connues de $x = \varphi(t)$; on a :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} \;;$$

dérivons les deux membres par rapport à x. Pour dériver le second membre, nous le dériverons par rapport à t et nous multiplierons le résultat par $\frac{dt}{dx}$, c. à. d. $\frac{1}{x'_t}$; il vient alors :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'_t y''_t - y'_t x''_t}{x'^3_t} \;;$$

et ainsi de suite.

Intégration d'une équation différentielle.

41. — On rencontre en Physique (théorie des cordes vibrantes) le problème suivant d'Analyse, dont on peut trouver souvent la solution à l'aide d'un changement de variables :

Déterminer la fonction la plus générale, u, de deux variables indépendantes, x et t, qui satisfait à l'équation :

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (a = \text{const.})$$

Conservons l'ancienne fonction u, et prenons pour nouvelles variables indépendantes les quantités :

$$\xi = x + at$$
$$\eta = x - at \;;$$

cherchons alors ce que devient l'équation (1) après ce changement de variables.

On a, en appliquant la méthode par les dérivées indiquée dans la remarque II du N° 36 :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial \xi} - a\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

de même :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

et en continuant les dérivations :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\left[a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right] - a\left[a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - a\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right]$$

$$= a^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

Portons ces valeurs dans l'équation (1) ; celle-ci se réduit à :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

forme qui s'intègre facilement. En effet, elle exprime que $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ est indépendant de η, puisque sa dérivée par rapport à η est nulle ; on a donc :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi),$$

$f(\xi)$ désignant une fonction de ξ, quelconque d'ailleurs. Remontons aux primitives :

$$u = \varphi(\xi) + C,$$

$\varphi(\xi)$ étant une primitive de $f(\xi)$, et C une constante par rapport à ξ, c'est-à-dire une fonction de η, $\psi(\eta)$, d'ailleurs arbitraire. Quant à $\varphi(\xi)$, c'est aussi une fonction arbitraire, comme primitive d'une fonction arbitraire. On a donc enfin, comme solution la plus générale de l'équation proposée (1) :

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

c'est-à-dire :

$$u = \varphi(x + at) + \psi(x - at),$$

φ et ψ désignant les fonctions arbitraires.

42. – Remarque. – On intégrerait de même l'équation :

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

u étant une fonction inconnue des deux variables indépendantes x, y ; et a, b, c des constantes. On ferait pour cela le changement de variables

$$\xi = x + \lambda y$$
$$\eta = x + \mu y,$$

et on essaierait de déterminer les constantes λ et μ de manière que l'équation différentielle transformée se réduisit à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0$$

On trouve qu'il suffit de prendre pour λ et μ les racines (supposées distinctes) de l'équation :

$$a + 2bX + cX^2 = 0 \,;$$

la solution la plus générale de la proposée est alors :

$$u = \varphi(x + \lambda y) + \psi(x + \mu y).$$

Chapitre III.

Chapitre III.

Formation des équations différentielles.

I. _ Fonctions d'une seule variable.

43. _ Il est souvent avantageux, pour l'étude des fonctions, de former les équations différentielles auxquelles elles satisfont : on appelle équation différentielle une relation entre une variable, une fonction de cette variable et les dérivées de cette fonction ; l'ordre d'une équation différentielle est celui de la dérivée d'ordre le plus élevé (de la fonction) qui y figure.

Si l'on a :

$$y = f(x)$$

on en déduit

$$y' = f'(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^n = f^n(x) ,$$

et toute combinaison de ces équations fournira une équation différentielle à laquelle satisfera la fonction y ; une fonction donnée satisfait donc à une infinité d'équations différentielles, de n'importe quel ordre.

Dans les applications, le problème ne se pose pas avec cette généralité ; la plupart du temps, la fonction donnée, y, dépend d'un certain nombre de coefficients constants, et on se propose de former une équation différentielle à laquelle satisfasse y, quelles que soient les valeurs de ces coefficients.

La fonction y est donc supposée définie par une relation.

(1) $$F(x, y, c_1, c_2, \dots c_n) = 0$$

renfermant n constantes ; on en déduit en dérivant :

(2) $$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0 \quad ;$$

(3) $$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2y' \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial F}{\partial y} y'' = 0$$

- -

Après n dérivations, on aura $(n+1)$ équations (1), (2), (3), ..., entre lesquelles on éliminera les n quantités $C_1, C_2, \dots C_n$; le résultat :

$$\varphi(x, y, y', y'', \dots y^n) = 0$$

sera une équation différentielle d'ordre n [1] vérifiée par la fonction y, quels que soient $C_1, C_2, \dots C_n$: elle convient à toutes les fonctions y définies par (1), où $C_1, \dots C_n$ sont des constantes arbitraires. Voici des exemples :

44. — Equation différentielle des droites du plan. — On a la fonction y définie par

$$y = C_1 x + C_2 ,$$

C_1 et C_2 étant des constantes arbitraires ; la méthode précédente conduit, pour y, à l'équation différentielle évidente :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 .$$

45. — Equation différentielle des cercles du plan. — La fonction y est définie par

$$x^2 + y^2 + 2\lambda x + 2\mu y + h = 0,$$

λ, μ, h étant des constantes arbitraires. Appliquons la méthode ; on a, en dérivant trois fois :

$$x + y y' + \lambda + \mu y' = 0$$

$$1 + y y'' + y'^2 + \mu y'' = 0$$

$$y y''' + 3 y' y'' + \mu y''' = 0 \ ;$$

d'où, en éliminant μ entre les deux dernières relations :

$$y'''(1 + y y'' + y'^2) = y''(y y''' + 3 y' y'')$$

---

[1] Ce raisonnement montre que l'équation est <u>au plus</u> d'ordre n ; on verra, dans le cours de seconde année, que l'ordre est exactement n, lorsque y dépend effectivement de n constantes arbitraires.

c'est-à-dire :

$$y'''(1+y'^2) - 3y'y''^2 = 0 ,$$

c'est l'équation cherchée.

46. — Equation différentielle des coniques. — La relation entre y et x peut s'écrire :

$$y = ax + b + \sqrt{mx^2+2nx+p} ,$$

a, b, m, n, p étant des constantes arbitraires. Dérivons :

$$y' = a + (mx+n)(mx^2+2nx+p)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y'' = m(mx^2+2nx+p)^{-\frac{1}{2}} - (mx+n)^2(mx^2+2nx+p)^{-\frac{3}{2}}$$

c'est-à-dire :

$$y'' = (mx^2+2nx+p)^{-\frac{3}{2}}(mp-n^2)$$

d'où :

$$(y'')^{-\frac{2}{3}} = (mp-n^2)^{-\frac{2}{3}}(mx^2+2nx+p)$$

Trois dérivations successives vont annuler le second membre; l'équation différentielle cherchée prend ainsi la forme simple :

$$\left[y''^{-\frac{2}{3}}\right]''' = 0$$

Pour les paraboles, $m=0$; il suffit donc de deux dérivations pour annuler le second membre, et l'équation différentielle des paraboles est

$$(y''^{-\frac{2}{3}})'' = 0$$

Ces deux équations, développées, donnent :

$$-40\, y'''^3 + 45\, y''y'''y^{\text{iv}} - 9\, y''^2 y^{\text{v}} = 0 \ \ldots\ldots \text{ pour les coniques;}$$

$$5y'''^2 - 3y''y^{\text{iv}} = 0 \ \ldots\ldots\ldots \text{ pour les paraboles.}$$

47. — Elimination des constantes arbitraires dans le cas de plusieurs équations. — Soient, par exemple, deux fonctions, y et z, de x, définies par les deux équations :

$$f(x, y, z, c_1, \ldots c_n) = 0 ; \quad \varphi(x, y, z, c_1, \ldots c_n) = 0$$

Pour avoir une équation différentielle vérifiée par y, quelles que soient les constantes $C_1, C_2, \ldots C_n$, on dérivera n fois, par rapport à x, chacune des équations données; on obtiendra ainsi, en tout $2n+2$ équations, entre lesquelles on éliminera les $2n+1$ quantités $C_1, C_2, \ldots C_n$ et $z, z', z'', \ldots z^n$: il restera une équation différentielle d'ordre n en y.

II. – Fonctions de plusieurs variables.

48. – On opère d'une manière analogue dans le cas d'une fonction de plusieurs variables indépendantes ; si l'on a, par exemple, une fonction, z, de x, y définie par :

(4) $$f(x, y, z, c_1, c_2, \dots c_n) = 0,$$

on dérivera successivement par rapport à chacune des deux variables indépendantes. Comme il y a $k+1$ dérivées partielles d'ordre k, quand on aura écrit toutes les dérivées de (4) par rapport à x et y jusqu'à l'ordre h, inclusivement, on aura en tout

$$1+2+3+\dots+(h+1) = \frac{1}{2}(h+1)(h+2)$$

équations, et on s'arrêtera dès que ce nombre sera supérieur à n. L'élimination de $C_1, C_2, \dots C_n$ conduira alors à $\frac{1}{2}(h+1)(h+2)-n$ équations aux dérivées partielles[1] d'ordre h, auxquelles satisfera la fonction z, quels que soient $C_1, \dots C_n$.

49. – Mais dans le cas des fonctions de plusieurs variables, on peut aller plus loin et éliminer non-seulement des constantes, mais des fonctions arbitraires.

Soit, par exemple, une fonction z, de x, y, définie par

(5) $$F(x, y, z, \varphi_1(\alpha), \varphi_2(\beta), \dots \varphi_n(\lambda)) = 0,$$

où F est une fonction donnée ; $\alpha, \beta, \gamma \dots \lambda$ des fonctions données de x, y, z, et $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ des fonctions arbitraires. L'équation (5) définit ainsi une infinité de fonctions z, ou, géométriquement, une famille de surfaces, qui dépend de n fonctions arbitraires.

Pour former une équation aux dérivées partielles vérifiée par z, quelles que soient les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$, dérivons encore (5) par rapport aux deux variables indépendantes x, y :

---

[1] Une équation différentielle aux dérivées partielles est une relation entre des variables indépendantes, $x, y, \dots$, une fonction z de ces variables, et les dérivées partielles de z par rapport à $x, y, \dots$ L'ordre d'une telle équation est celui de la dérivée partielle de z d'ordre le plus élevé qui y figure ; ainsi $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z$ est une équation de second ordre.

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p + \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} \varphi_1'(\alpha) \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x} + p \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right] + \cdots \cdots = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q + \cdots \cdots \cdots = 0.$$

en posant toujours $p = \frac{\partial z}{\partial x}$; $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. On obtient ainsi deux nouvelles équations, mais on introduit n quantités nouvelles, $\varphi_1', \varphi_2', \ldots \varphi_n'$. En dérivant une seconde fois, on ajoutera trois équations et toujours n quantités nouvelles, $\varphi'', \ldots \varphi_n''$: quand on aura pris toutes les dérivées de (5) jusqu'à l'ordre h (inclus^t), on aura en tout $1 + 2 + \cdots + (h+1) = \frac{1}{2}(h+1)(h+2)$ équations, entre lesquelles il faudra éliminer :

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n ; \quad \varphi_1', \ldots \varphi_n' ; \cdots \cdots ; \varphi_1^h, \ldots \varphi_n^h,$$

soit en tout $n(h+1)$ quantités. Donc, lorsque h sera pris assez grand (ce qui est toujours possible) pour que l'on ait :

$$\frac{1}{2}(h+1)(h+2) > n(h+1),$$

l'élimination pourra se faire[1], et on obtiendra ainsi

$$\frac{1}{2}(h+1)(h+2) - n(h+1)$$

équations aux dérivées partielles d'ordre h[2], vérifiées par la fonction z, quelles que soient les fonctions arbitraires φ.

50 _ Exemple I. _ Équation aux dérivées partielles des cylindres dont les génératrices sont parallèles à la direction :

$$x = az, \quad y = bz.$$

L'équation cartésienne de ces cylindres est, comme on sait :

$$x - az = \varphi(y - bz) \tag{6}$$

φ étant une fonction arbitraire ; pour former une équation aux dérivées partielles vérifiée par z, dérivons (6), selon la méthode générale, par rapport aux variables indépendantes x et y :

$$1 - ap = -bp\varphi'$$
$$-aq = (1 - bq)\varphi'$$

---

(1) Il suffit de prendre h tel que $(h+1)(h+2-2n) > 0$, c. à. d. $h = 2n - 1$, et le nombre des équations aux dérivées partielles est n.

(2) L'ordre peut être inférieur à h ; on verra, dans le cours de seconde année, qu'il est supérieur ou égal à n.

d'où, en éliminant φ' :

$$(1-ap)(1-bq) = abpq$$

c'est-à-dire :

$$ap + bq - 1 = 0^{(1)}$$

51. – Exemple II. – Equation aux dérivées partielles des cônes de sommet donné, a, b, c.

Leur équation cartésienne est :

$$\frac{z-c}{x-a} = \varphi\left(\frac{y-b}{x-a}\right)$$

Dérivons par rapport à x et y :

$$\frac{p(x-a)-(z-c)}{(x-a)^2} = -\frac{y-b}{(x-a)^2}\varphi'$$

$$\frac{q}{x-a} = \frac{1}{x-a}\varphi'$$

d'où en éliminant φ' :

$$p(x-a)+q(y-b) = z-c^{(2)}$$

52. – Exemple III. – Equation aux dérivées partielles des fonctions homogènes.

Une fonction homogène, z, de deux variables x, y et d'ordre m, est définie par la relation :

$$z = x^m\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

où φ est une fonction arbitraire. Dérivons encore par rapport à x et y

$$p = mx^{m-1}\varphi - x^{m-2}y\varphi'$$

$$q = x^{m-1}\varphi'$$

d'où, en éliminant φ et φ' :

$$p = mx^{m-1}\frac{z}{x^m} - x^{m-2}y\frac{q}{x^{m-1}}\text{ ; c'est-à-dire :}$$

$$mz = px + qy.$$

---

(1) Cette équation exprime que le plan tangent à la surface au point x, y, z, plan dont les coefficients (n° 28) sont $p, q, -1$, est parallèle à la direction $a, b, 1$ des génératrices ; on aurait donc pu l'écrire directement.

(2) Cette équation exprime que le plan tangent au point x, y, z – $[p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)=0]$ – passe par le point a, b, c.

53. — Exemple IV. — Équation aux dérivées partielles des surfaces réglées dont les génératrices rencontrent l'axe des z.

Une droite rencontrant Oz a pour équations :

$$y = mx \; ; \quad z = ax + b \; ;$$

pour qu'elle engendre une surface, il faut que m, a, b soient fonctions d'un même paramètre, c'est-à-dire que a et b soient des fonctions de m : $f(m)$ et $\varphi(m)$. L'équation de la surface engendrée est alors

$$(7) \qquad z = x f\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Pour former une équation vérifiée par z, quelles que soient les fonctions f et φ, dérivons par rapport à x et y :

$$p = f - \frac{y}{x^2}\left(xf' + \varphi'\right)$$

$$q = \frac{1}{x}\left(xf' + \varphi'\right)$$

d'où, en éliminant $xf' + \varphi'$:

$$(8) \qquad p + q\frac{y}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

La fonction φ a disparu[1] ; du reste à faire disparaître f. Dérivons encore (8) par rapport à x et y[2] :

$$r + s\frac{y}{x} - q\frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2} f',$$

$$s + t\frac{y}{x} + q\frac{1}{x} = \frac{1}{x} f'.$$

Éliminons enfin f' entre ces deux relations ; il reste :

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0$$

C'est l'équation cherchée.

---

[1] L'équation (8) exprime que le plan tangent à la surface au point x, y, z (n° 28) est parallèle à la direction qui a pour paramètres directeurs $1, \frac{y}{x}, f\left(\frac{y}{x}\right)$, c. à. d. $1, m, a$. En d'autres termes elle exprime que ce plan est parallèle à la génératrice de la surface qui passe par le point de contact, ce qu'on savait a priori, puisque le plan contient la génératrice. On aurait donc pu écrire (8) directement.

[2] On pose, comme d'habitude : $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

On aurait pu l'obtenir autrement ; en effet l'équation (7) montre que si on prend pour variables indépendantes $x = u$ et $\frac{y}{x} = v$, on a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0,$$

quelles que soient les fonctions f et φ. Transformons cette équation différentielle en revenant aux variables x et y ; la formule (8) du N° 37 nous donne :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{1}{x^2}\left(r x^2 + 2 s\, xy + t y^2\right)$$

L'équation différentielle est donc $r x^2 + 2 s\, xy + t y^2 = 0$.

54. – Élimination des fonctions arbitraires dans le cas de plusieurs équations. — Si l'on a, par exemple, deux fonctions, z et t, de deux variables indépendantes x, y, définies par deux équations contenant n fonctions arbitraires, $\varphi_1, \dots \varphi_n$ (1), pour former l'équation en z, quelles que soient ces fonctions, on prendra encore les dérivées partielles, par rapport à x et y, des deux équations données, jusqu'à l'ordre h : on aura ainsi en tout

$$2 \cdot \frac{1}{2}(h+1)(h+2)$$

équations, entre lesquelles on éliminera 1° les n fonctions φ et leurs dérivées, $\varphi'_1, \dots \varphi'_n, \dots \varphi_1^{h}, \dots \varphi_n^{h}$ jusqu'à l'ordre h, soit $n(h+1)$ quantités ; 2° la fonction t et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre h, soit $\frac{1}{2}(h+1)(h+2)$ quantités. On devra donc prendre h assez grand pour que :

$$\frac{1}{2}(h+1)(h+2) > n(h+1),$$

comme au N° 49.

Un cas particulier intéressant est celui où $\varphi, \varphi_2, \dots \varphi_n$ sont des fonctions arbitraires de la seconde fonction, t, seule. Dans cet ordre d'idées, on se bornera à indiquer deux exemples ; le cas plus général donnerait lieu à des calculs analogues.

55. – Exemple I. – Équation aux dérivées partielles des surfaces réglées. – Les équations d'une droite étant

$$(9) \qquad \begin{aligned} x - az - \alpha &= 0, \\ y - bz - \beta &= 0, \end{aligned}$$

---

(1) Comme plus haut, les $\varphi_1 \dots \varphi_n$ sont des fonctions arbitraires respectivement de n quantités $\alpha, \beta, \dots \lambda$, qui elles-mêmes sont des fonctions données de x, y, z, t ; ainsi :

$$\varphi_1 = \varphi_1(\alpha) \dots\dots \varphi_n = \varphi_n(\lambda)$$

cette droite engendrera une surface si a, b, α, β sont des fonctions d'un paramètre t. Les deux équations (9) définissent alors z et t comme fonctions de deux variables indépendantes x et y, et on peut se proposer de former l'équation aux dérivées partielles que vérifie z, quelles que soient les fonctions α, β, a, b, de t.

A cet effet dérivons successivement par rapport à x et y les équations (9):

$$(9')\qquad \begin{cases} 1 - a\dfrac{\partial z}{\partial x} - \left[a'z + \alpha'\right]\dfrac{\partial t}{\partial x} = 0 \\ -a\dfrac{\partial z}{\partial y} - \left[a'z + \alpha'\right]\dfrac{\partial t}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$(9'')\qquad \begin{cases} -b\dfrac{\partial z}{\partial x} - \left[b'z + \beta'\right]\dfrac{\partial t}{\partial x} = 0 \\ 1 - b\dfrac{\partial z}{\partial y} - \left[b'z - \beta'\right]\dfrac{\partial t}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

en désignant par a', b', α', β' les dérivées de a, b, α, β par rapport à t.

Entre les deux équations (9') éliminons $(a'z + \alpha')$; il vient :

$$(10)\qquad \frac{1 - a\dfrac{\partial z}{\partial x}}{-a\dfrac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\left(\dfrac{\partial t}{\partial x}\right)}{\left(\dfrac{\partial t}{\partial y}\right)}$$

De même les deux équations (9'') donnent :

$$\frac{-b\dfrac{\partial z}{\partial x}}{1 - b\dfrac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\left(\dfrac{\partial t}{\partial x}\right)}{\left(\dfrac{\partial t}{\partial y}\right)}$$

d'où, par élimination du quotient $\left(\dfrac{\frac{\partial t}{\partial x}}{\frac{\partial t}{\partial y}}\right)$:

$$\left(1 - a\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(1 - b\frac{\partial z}{\partial y}\right) = ab\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$$

c'est-à-dire :

$$(11)\qquad a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 0 .$$

Cette équation n'est pas l'équation différentielle en z cherchée, puisqu'elle contient encore les fonctions arbitraires a et b; pour obtenir une nouvelle relation, dérivons-la par rapport aux variables indépendantes x, y :

$$(11') \quad \begin{cases} a\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \left(a'\dfrac{\partial z}{\partial x} + b'\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\dfrac{\partial t}{\partial x} = 0 \\[2ex] a\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \left(a'\dfrac{\partial z}{\partial x} + b'\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\dfrac{\partial t}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

d'où en éliminant $a'\dfrac{\partial z}{\partial x} + b'\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$(11'') \quad \frac{a\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}}{a\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}} = \frac{\left(\dfrac{\partial t}{\partial x}\right)}{\left(\dfrac{\partial t}{\partial y}\right)}$$

Or, en vertu de (10) :

$$(12) \quad \frac{\left(\dfrac{\partial t}{\partial x}\right)}{\left(\dfrac{\partial t}{\partial y}\right)} = \frac{1 - a\dfrac{\partial z}{\partial x}}{-a\dfrac{\partial z}{\partial y}} = -\frac{b}{a} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{d'après } 11)$$

On a ainsi, en portant cette valeur dans (11'') :

$$(13) \quad a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2ab\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

nouvelle équation qui contient encore a et b. Les équations (9), (11), (13) ne suffisent pas pour éliminer a, b, α, β ; il faut une relation de plus, que nous obtiendrons de la même manière, en dérivant (13) par rapport à x et y :

$$a^2\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 2ab\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} + b^2\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + M\frac{\partial t}{\partial x} = 0$$

$$a^2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} + 2ab\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + b^2\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} + M\frac{\partial t}{\partial y} = 0 \;;$$

d'où

$$\frac{a^2\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 2ab\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} + b^2\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}}{a^2\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} + 2ab\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + b^2\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}} = \frac{\left(\dfrac{\partial t}{\partial x}\right)}{\left(\dfrac{\partial t}{\partial y}\right)} = -\frac{b}{a} \quad \ldots\ldots (\text{d'après } (12))$$

ce qui s'écrit :

$$(14) \quad a^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3a^2 b\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} + 3ab^2\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + b^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0$$

et l'équation cherchée s'obtiendra en éliminant le rapport $\dfrac{a}{b}$ entre (13) et (14).

56. – Exemple II. – Equation aux dérivées partielles des surfaces développables. – On nomme surface développable l'enveloppe d'un plan mobile dont les coefficients dépendent d'un seul paramètre, t. L'équation du plan mobile étant :

$$(15) \qquad z = ax + by + c,$$

où a, b, c sont des fonctions de t, l'équation de la surface s'obtiendra en éliminant t entre la relation (15) et sa dérivée par rapport à t :

$$(16) \qquad 0 = a'x + b'y + c'$$

Les deux équations (15) et (16) définissent z et t comme fonctions de x et y ; pour former l'équation différentielle en z, dérivons-les par rapport à x et y. Il vient en dérivant (15) :

$$(15') \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial z}{\partial x} + a + (a'x + b'y + c')\dfrac{\partial t}{\partial x} = 0 \\ -\dfrac{\partial z}{\partial y} + b + (a'x + b'y + c')\dfrac{\partial t}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

ou, en tenant compte de (16) :

$$(17) \qquad \begin{aligned} -\frac{\partial z}{\partial x} + a &= 0 \\ -\frac{\partial z}{\partial y} + b &= 0 \end{aligned}$$

Il est inutile de dériver (16), ce calcul ne donnerait rien. Dérivons les équations (17) :

$$-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a'\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \qquad -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + b'\frac{\partial t}{\partial x} = 0$$

$$-\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a'\frac{\partial t}{\partial y} = 0 \qquad -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + b'\frac{\partial t}{\partial y} = 0$$

d'où, en éliminant a' et b' :

$$\frac{\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)}{\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)} = \frac{\left(\dfrac{\partial t}{\partial x}\right)}{\left(\dfrac{\partial t}{\partial y}\right)} = \frac{\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)}{\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)}$$

On a donc :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial z^2}{\partial x \partial y}\right)^2$$

c'est-à-dire : $\quad rt - s^2 = 0$

C'est l'équation différentielle cherchée.

Chapitre IV.

Séries.

I. _ Définitions ; généralités.

57. _ Soit une suite indéfinie de quantités réelles :

$$u_1,\ u_2 \dots u_n, \dots$$

Considérons les sommes

$$S_1 = u_1$$
$$S_2 = u_1 + u_2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

Si la suite $S_1, S_2, \dots S_n$ tend (N° 1) vers une limite, S, on dit que la série

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

est convergente et a pour somme S. Une série non convergente est dite divergente.

58. _ Si la série converge, c'est qu'on peut par définition, (N° 1) étant donnée une quantité $\frac{1}{2}\varepsilon$, aussi petite qu'on veut, assigner un nombre, N, tel que, l'on ait :

$$\text{mod}\left(S_{N+p} - S\right) < \tfrac{1}{2}\varepsilon \dots \dots \dots \text{pour } p \geqq 0$$

En particulier

$$\text{mod}\left(S_N - S\right) < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

d'où :

$$\text{mod}\left(S_{N+p} - S_N\right) = \text{mod}\left[\left(S_{N+p} - S\right) - \left(S_N - S\right)\right] < 2\,\tfrac{1}{2}\,\varepsilon$$

En d'autres termes, si une série converge, on peut, étant donnée une quantité ε, aussi petite qu'on veut, assigner un nombre N tel que l'on

ait, quelque grand que soit p :

$$\text{mod}\,(S_{N+p} - S_N) < \varepsilon .$$

La Réciproque de cette proposition est vraie, c'est-à-dire que si l'on peut ainsi déterminer N, la série proposée converge : nous ne donnerons pas la démonstration qui est assez longue, mais n'offre aucune difficulté. Nous n'aurons d'ailleurs pas besoin de cette réciproque.

59. – Conséquences immédiates de la définition.

1° Une série à termes positifs, pour laquelle les sommes $S_1, S_2, \dots S_n, \dots$ restent inférieures, quelque soit n, à un nombre fixe, M est convergente.

Car une quantité variable, S_n, qui croît constamment, sans pouvoir dépasser un nombre fixe, M, a une limite.

2° Une série à termes positifs dont les termes sont inférieurs ou égaux aux termes de même rang d'une série convergente à termes positifs est convergente.

Car si M est la somme de la seconde série, les sommes $S_1, S_2, \dots S_n \dots$ prises dans la première sont évidemment inférieures à M.

3° Une série à termes positifs ou négatifs converge si la série des valeurs absolues de ses termes converge.

Car si S_p et $-S_q$ sont les sommes des p termes positifs et des $q = n - p$ termes négatifs compris dans les n premiers termes de la proposée, l'hypothèse est que $S_p + S_q$ a une limite finie, L. Il en résulte que S_p et S_q ont séparément des limites finies, A et B, puisque chacune de ces quantités croît en demeurant inférieure à L. Or

$$S_n = S_p - S_q \;;$$

d'où .... $\lim S_n = \lim (S_p - S_q) = \lim S_p - \lim S_q = A - B$.
ce qui montre que la proposée converge et a pour somme $A - B$.
La réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire que la proposée peut converger sans que la série des valeurs absolues converge (Exemple $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$)

4° Si on multiplie par des nombres, positifs ou négatifs, compris entre deux limites m et M, les termes d'une série convergente $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ à termes positifs, on obtient une nouvelle série convergente : $a_1 u_1 + \dots + a_n u_n + \dots$, et la série des valeurs absolues des termes converge également.

Car, si μ est la plus grande des quantités mod m et mod M,

on a :

$$\text{mod}\,(a_n u_n) < \mu u_n.$$

Les termes de la nouvelle série sont ainsi, en valeur absolue, inférieurs aux termes de même rang de la série convergente à termes positifs $\mu\,(u_1 + \cdots + u_n + \cdots)$; la série $\sum \text{mod}\,(a_n u_n)$ est donc convergente (2°), et il en est de même de la série $\sum a_n u_n$ (3°).

5° Soient deux séries convergentes

$$(S) \qquad u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

$$(S') \qquad u'_1 + u'_2 + \cdots + u'_n + \cdots$$

Considérons la série :

$$(S'') \qquad (u_1 + u'_1) + (u_2 + u'_2) + \cdots + (u_n + u'_n) + \cdots\cdots$$

On a :

$$S''_n = S_n + S'_n \;;$$

d'où

$$\lim S''_n = \lim (S_n + S'_n) = \lim S_n + \lim S'_n .$$

La série (S'') est donc convergente ; c'est-à-dire qu'on peut ajouter (ou retrancher) terme à terme des séries convergentes en nombre fini.

Séries à termes positifs.

60. — Rappelons les règles suivantes de convergence, établies dans le Cours de spéciales, en faisant usage du principe 2° du N° 59.

1° Une série à termes positifs est convergente si, à partir d'un certain rang, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < K,$$

K étant un nombre inférieur à l'unité. Elle est divergente si, à partir d'un certain rang

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > K,$$

K étant supérieur à l'unité.

2° Une série à termes positifs est convergente si, à partir d'un certain rang, on a :

$$\sqrt[n]{u_n} < K,$$

K étant inférieur à l'unité. Elle est divergente si

$$\sqrt[n]{u_n} > K,$$

K étant supérieur à l'unité.

Séries à termes imaginaires.

61. — Une série $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ où $u_n = a_n + b_n i$ est dite convergente si les deux séries :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$
$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$$

sont convergentes ; la somme de la proposée est, par définition $\sum a_n + i \sum b_n$.

62. — Une série est dite <u>absolument convergente</u> si la série des modules de ses termes

$$\sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

est convergente. Cette définition s'applique aussi aux séries réelles à termes positifs et négatifs, le module étant alors la valeur absolue du terme.

Quand la série des modules converge la proposée converge également ; écrivons en effet :

$$u_n = \rho_n \left(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n\right) ;$$

la série à termes positifs, $\sum \rho_n$, étant convergente, les séries $\sum \rho_n \cos \varphi_n$ et $\sum \rho_n \sin \varphi_n$ sont absolument convergentes (N° 59, 4°) — puisque $\cos \varphi_n$ et $\sin \varphi_n$ sont compris entre -1 et $+1$. C. q. f. d.

63. — Théorème. — On n'altère pas la valeur d'une série absolument convergente en changeant l'ordre de ses termes.

Soit $(S) = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ la série proposée ; la série $(\mathcal{S}) = U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots$ des modules est convergente.

Changeons l'ordre des termes de $\mathcal{S}$, et prenons, dans la nouvelle série, $\mathcal{S}'$, assez de termes pour retrouver les n premiers termes de S. Soient $\mathcal{S}_n$ la somme de ces n termes ; σ' celle des termes pris dans $\mathcal{S}'$: la somme σ' se composera :

1° des termes de $\mathcal{S}_n$;

2° d'autres termes de $\mathcal{S}$: $u_\alpha, u_\beta, \ldots u_\lambda$, dont les indices dépassent n. Donc :

$$\sigma' = S_n + u_\alpha + u_\beta + \cdots + u_\lambda$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{mod}\,(\sigma' - S_n) &= \text{mod}\,(u_\alpha + u_\beta + \cdots + u_\lambda) \\ &\leqq U_\alpha + U_\beta + \cdots + U_\lambda^{(1)} \leqq U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots U_\lambda , \end{aligned}$$

(1) Car le module d'une somme est, comme on sait, inférieur ou au plus égal à la somme des modules.

en supposant que λ soit le plus grand des indices $\alpha, \beta, \ldots \lambda$. Or, on peut prendre n assez grand pour que $U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots + U_\lambda$ soit, quelque soit λ, inférieur à ε, puisque la série des modules converge (N° 58); donc

$$\text{mod}\,(\sigma' - \mathcal{S}_n) < \varepsilon,$$

c. à. d. que σ' diffère aussi peu qu'on veut de $\mathcal{S}_n$, qui lui-même diffère aussi peu qu'on veut de $\mathcal{S}$, somme de la série proposée. Donc :

$$\lim \sigma' = \mathcal{S},$$

et la série modifiée a même somme que la série primitive. C. q. f. d.

64. – Une série est dite semi convergente si elle converge et si la série des modules de ses termes diverge.

Exemple, la série réelle

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\cdots$$

Si une série à termes tous réels est semi-convergente, je dis 1° qu'elle contient des termes positifs et des termes négatifs en nombre infini ; 2° que la série des termes positifs et celle des termes négatifs ont séparément des sommes infinies : il suffit évidemment de montrer le 2°.

Soient en effet $\mathcal{S}_p$ et $\mathcal{S}_q$ les sommes des p termes positifs et des $q = n - p$ termes négatifs compris dans les n premiers termes de la proposée, $(\mathcal{S})$, on a, en désignant par S_n et $\mathcal{S}_n$ la somme des n premiers termes de (S) et de la série $(\mathcal{S})$ des modules :

$$S_n = S_p - S_q$$

$$\mathcal{S}_n = S_p + S_q \quad ;$$

d'où :

$$S_p = \frac{1}{2}\left[\mathcal{S}_n + S_n\right] ; \qquad S_q = \frac{1}{2}\left[\mathcal{S}_n - S_n\right] .$$

Lorsque n augmente indéfiniment, S_n a une limite finie, puisque la proposée converge ; $\mathcal{S}_n$ tend vers l'infini, puisque la série des modules diverge : donc S_p et S_q croissent au-delà de toute limite, c'est-à-dire que la série des termes positifs et celles des termes négatifs divergent toutes deux. C. q. f. d.

65. – Théorème. – On peut donner une infinité de valeurs à une série semi-convergente (réelle ou imaginaire) en y changeant l'ordre des termes.

Soit $(\mathcal{S}) \quad u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots\cdots$

une telle série ; on a pour le terme général

$$u_n = a_n + b_n i.$$

Posons :

$$\text{mod}\, u_n = U_n \; ; \quad \text{mod}\, a_n = A_n \; ; \quad \text{mod}\, b_n = B_n .$$

Il est évident que

$$U_n \leqq A_n + B_n \; ;$$

et puisque, par hypothèse, la série $\sum U_n$ diverge, il en est de même, a fortiori de $\sum (A_n + B_n)$: ceci exige que l'une des séries $\sum A_n$ ou $\sum B_n$ diverge, car si elles convergeaient toutes deux, $\sum (A_n + B_n)$ convergerait (n° 59, 5°). Supposons, par exemple, que $\sum A_n$ soit divergente ; comme $\sum a_n$ converge en vertu de la définition même de la convergence de (S), cette série, $\sum a_n$, est semi-convergente. Elle a par suite (N° 64) des termes positifs

$$c_1, \quad c_2, \ldots \ldots c_q \ldots \ldots$$

et des termes négatifs

$$d_1, \quad d_2, \ldots \ldots d_q \ldots \ldots$$

dont les sommes sont séparément infinies.

Cela posé, soit M un nombre quelconque, positif, par exemple : prenons dans la série des termes positifs, c_i, assez de termes, et juste assez, pour que leur somme dépasse M ; cela est possible, puisque la série $\sum c_n$ a une somme infinie. Prenons ensuite dans la série des termes négatifs, d_i, assez de termes, et juste assez, pour ramener la somme précédente au-dessous de M ; puis des termes positifs pour dépasser de nouveau M, et ainsi de suite.

Les sommes successives ainsi obtenues oscilleront de part et d'autre de M, dont elles se rapprocheront d'ailleurs indéfiniment ; en effet la différence entre l'une d'elle et M est moindre, en valeur absolue, que le dernier terme employé c_i, ou d_i, et ces termes tendent vers zéro, puisque la série $\sum a_n$, formée par les termes c_i et d_i (pris dans leur ordre primitif) est convergente).

Donc enfin si l'on modifie de cette manière l'ordre des termes de la série $\sum a_n$, celle-ci aura pour somme M, et la série $\sum u_n = \sum (a_n + b_n i)$ aura alors la somme $M + Ni$, M étant une nombre quelconque. c. q. f. d.

II. — Séries dont les termes sont fonctions d'une variable.

---

66. — Convergence uniforme. — Soit une série :

$$(S) \qquad u_1 + u_2 + \cdots\cdots$$

dont les termes sont des fonctions d'une même variable réelle, x. Si elle converge pour la valeur x de cette variable, on pourra (n° 58) prendre N assez grand pour que l'expression

$$R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}\, x + \cdots\cdots$$

ait son module inférieur à ε, pour toutes les valeurs de $n \geqslant N$: ce nombre N sera en général une fonction de x et de ε.

Supposons que la série converge pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b ; on dit qu'elle est <u>uniformément convergente</u> dans cet intervalle lorsque, étant donné ε aussi petit qu'on veut, on peut assigner un nombre N tel que l'on ait :

$$\text{mod } R_n(x) < \varepsilon,$$

pour toutes les valeurs de n supérieures ou égales à N, et pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b.
En d'autres termes, et c'est là le point capital, le nombre N ne doit dépendre que de ε, (et non de x) si l'on veut que la série soit uniformément convergente.

Remarque I. — Un raisonnement superficiel pourrait faire croire que toute série convergente, quand x est compris entre a et b, est uniformément convergente dans cet intervalle. En effet, puisque la série converge pour la valeur x, il existe un nombre N, fonction de x et de ε, tel que $R_n < \varepsilon$, lorsque $n \geqslant N$. Soit $\mathcal{N}(\varepsilon)$ le plus grand de tous les nombres $N(x, \varepsilon)$, obtenus en laissant ε fixe et en faisant varier x entre a et b ; on aura évidemment, quelque soit x dans cet intervalle, $R < \varepsilon$, lorsque $n \geqslant \mathcal{N}(\varepsilon)$. Le nombre $\mathcal{N}$ ne dépendant que de ε, il semble ainsi que la série soit uniformément convergente : mais ce raisonnement est faux, parce qu'il suppose que, parmi des quantités $N(x)$, en nombre illimité, il y en a une qui est supérieure à tous les autres, ou encore que les quantités $N(x)$ ont une limite supérieure finie [1].

---

[1] Il peut arriver en effet que des quantités en nombre, illimité et qui sont toutes finies n'aient pas de limite supérieure finie. Soit par exemple $N(x)$ un nombre, tel que $N(0)$ soit nul, et que $N(x)$, pour $x > 0$, soit égal au plus grand entier contenu dans $\frac{1}{x}$: les nombres $N(x)$ sont tous finis, quelque soit x ; mais n'ont pas de limite supérieure, car on peut toujours prendre x assez petit pour que $\frac{1}{x}$, et par suite $N(x)$, dépasse toute quantité donnée.

C'est ce qui se présente dans le cas de la série donnée en exemple dans le texte : le nombre $N(x, \varepsilon)$ est nul pour $x = 0$, quelque soit ε, puisque tous les termes de la série s'annulent : pour x positif et assez petit, il est aisé de voir que $N(x, \varepsilon)$ est sensiblement égal au plus grand entier supérieur à $\frac{\varepsilon}{x}$, de sorte que les nombre $N(x, \varepsilon)$, ε restant fixe, n'ont pas de maximum fini lorsque x varie de 0 à 1.

D'ailleurs il est aisé de donner un exemple simple de série non uniformément convergente. Soit par exemple la série (dont chaque terme est entre crochets)

$$\left[f(2)-f(3)\right]+\left[f(3)-f(4)\right]+\cdots\cdots+\left[f(n)-f(n+1)\right]+\cdots\cdots$$

où

$$f(n)=\frac{(n-1)x}{(x^2+1)^n}\ ;$$

elle converge quelque soit x. En effet, pour $x=0$, tous les termes sont nuls ; pour x différent de zéro, l'exponentielle, $(x^2+1)^{n+1}$, à base >1, est infiniment grande par rapport à $n-1$, lorsque n augmente indéfiniment : il en résulte que $f(n)$ tend vers zéro, et on en conclut immédiatement que la série proposée converge et a pour somme $f(2)=\frac{x}{(x^2+1)^2}$. En particulier, elle converge quand x est compris dans un intervalle qui contient 0, l'intervalle de 0 à 1 par exemple : je dis qu'elle n'est pas uniformément convergente dans cet intervalle. On a en effet :

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x)=u_n(x)+\cdots &= \left[f(n+1)-f(n+2)\right]+\left[f(n+2)-f(n+3)\right]+\cdots \\ &= f(n+1)=\frac{nx}{(x^2+1)^{n+1}}\ , \end{aligned}$$

et je dis qu'il est impossible d'assigner un nombre N, fonction de ε seul, tel qu'on ait, pour $n\geqq N$, et pour x compris entre 0 et 1 :

$$\frac{nx}{(x^2+1)^{n+1}}<\varepsilon$$

En effet, cette inégalité devant être vérifiée quelque petit que soit x, le serait en particulier pour $x=\frac{1}{\sqrt{n}}$; de sorte qu'on aurait pour toutes les valeurs de n supérieures à N :

$$\frac{\sqrt{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}<\varepsilon,$$

ce qui est impossible, puisque, si l'on fait croître n indéfiniment le premier membre tend vers $\frac{\sqrt{n}}{e}$, c. à. d. augmente indéfiniment. La série proposée n'est donc pas uniformément convergente entre 0 et 1, et, plus généralement, dans tout intervalle qui contient 0.

Remarque II. — Une série étant donnée, il est en général difficile de reconnaître si elle est ou non uniformément convergente, puisqu'on ne peut obtenir que dans des cas exceptionnels soit l'expression de $R_n(x)$, soit même une limite supérieure du module de cette quantité.

Cependant, on pourra toujours affirmer que la série est uniformément convergente dans un intervalle ab, si ses termes, à partir d'un certain rang, et pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, sont constamment inférieurs, en valeur absolue, aux termes d'une série à termes positifs, convergente et numérique, c. à. d. dont les termes ne contiennent pas la variable x.

On a en effet, en désignant par $R_n(x)$ et ρ_n la somme des termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$ dans les deux séries

$$\operatorname{mod} R_n < \rho_n$$

et on peut prendre N assez grand pour que ρ_n (et par suite $\operatorname{mod} R_n$) soit inférieur à ε, dès que $n \geqq N$, puisque la série de comparaison est convergente. Cette série étant d'ailleurs numérique, le nombre N ainsi déterminé ne dépend que de ε, ce qui démontre la proposition.

Cette remarque est d'une fréquente application.

67. — C'est dans le calcul intégral et la théorie des fonctions d'une variable imaginaire qu'on verra l'importance de la notion de convergence uniforme. Nous ne sommes pas encore en mesure de l'étendre aux séries dont les termes sont fonctions d'une variable imaginaire, puisque nous n'avons pas encore défini ces fonctions; toutefois, si $z = x + yi$, on sait ce que représente z^n, lorsque n est entier, car :

$$z^n = (x+iy)^n = x^n + ni\,x^{n-1}y + \cdots\cdots + (iy)^n$$

Dès lors on sait ce qu'il faut entendre par une série de la forme :

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots\cdots,$$

z et les coefficients $a_0, a_1, \ldots$ (lesquels sont indépendants de z) étant réels ou imaginaires.

On dira que cette série est uniformément convergente pour les valeurs de z comprises dans une région $\mathcal{R}$ du plan lorsque, étant donné ε, on pourra trouver un nombre N, fonction de ε seul, tel qu'on ait :

$$\operatorname{mod} \mathcal{R}_n(z) = \operatorname{mod}\left[a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \cdots\cdots\right] < \varepsilon,$$

pour toutes les valeurs de $n \geq N$ et pour toutes les valeurs de z $(= x + yi)$ dont l'affixe (c. à. d. le point de coordonnées x, y) est situé dans la région $\mathcal{R}$.

Remarque. — Soient A_n et ρ les modules de a_n et de z : si le terme général de la série des modules, $A_n \rho^n$, reste inférieur, pour ρ

compris entre ρ_0 et ρ_1, au terme général d'une série numérique convergente à termes positifs, la série des modules est uniformément convergente dans l'intervalle $\rho_0 \rho_1$. (Rem. II du N° 66). Je dis que la série proposée $\sum a_n z^n$ est alors uniformément convergente dans la couronne comprise entre deux cercles ayant pour centre commun l'origine et ρ_0 et ρ_1 pour rayons : car, par hypothèse

$$A_{n+1}\rho^{n+1} + A_{n+2}\rho^{n+2} + \cdots\cdots < \varepsilon$$

pour $n \geqq N(\varepsilon)$ et pour $\rho_0 < \rho < \rho_1$. Donc, a fortiori :

$$\mathrm{mod}\left(a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \cdots\cdots\right) < \varepsilon$$

pour $n \geqq N(\varepsilon)$ et pour $\rho_0 < \mathrm{mod}\, z < \rho_1$. C.q.f.d.

Les séries $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$ se nomment séries de puissances ; elles jouissent de propriétés importantes qu'on va exposer !

Séries de puissances.

68. – Cercle de convergence. – Soit la série de puissances :

$$(S) \qquad a_0 + a_1 z + \cdots\cdots + a_n z^n + \cdots\cdots ;$$

la série des modules est, ρ étant le module de z :

$$A_0 + A_1 \rho + \cdots\cdots + A_n \rho^n + \cdots\cdots,$$

On peut donner à ρ une valeur au moins, $\rho = 0$, telle que $A_n \rho^n$ ne croisse pas indéfiniment avec n ; en général, il y aura d'autres valeurs que $\rho = 0$ satisfaisant à cette condition. Soit R la plus grande : pour $\rho < R$, il est clair (a fortiori) que $A_n \rho^n$ ne croîtra pas indéfiniment avec n ; au contraire, par hypothèse, pour $\rho > R$, $A_n \rho^n$ croît indéfiniment. Le cercle décrit de l'origine des coordonnées comme centre avec le rayon R se nomme cercle de convergence de la série (S), en raison des propriétés suivantes :

69. – Théorème I. – La série (S) est absolument et uniformément convergente à l'intérieur du cercle de convergence.

En effet, la série des modules a pour terme général

$$A_n \rho^n = A_n R^n \left(\frac{\rho}{R}\right)^n ;$$

or, par hypothèse, $A_n R^n$ ne croît pas indéfiniment avec n, c. à. d. reste, quelque soit n, inférieur à une limite, M ; donc :

$$A_n \rho^n < M\left(\frac{\rho}{R}\right)^n,$$

c. à. d. que le terme général de la série des modules est inférieur au terme de même rang d'une progression géométrique, dont la raison, $\frac{\rho}{R}$, est inférieure à l'unité, puisque z est à l'intérieur du cercle R. La série des modules est donc convergente, c'est-à-dire que la série (S) est <u>absolument</u> convergente dans le cercle considéré.

Reste à établir que la convergence est <u>uniforme</u> : nous allons montrer qu'elle l'est lorsque z reste à l'intérieur d'un cercle, de centre O et de rayon, R' plus petit que R, mais aussi voisin de R qu'on veut.

On a en effet :

$$A_n \rho^n < M\left(\frac{\rho}{R}\right)^n < M\left(\frac{R'}{R}\right)^n$$

puisque, par hypothèse, $\rho < R'$. Le module du terme général reste donc inférieur au terme $M\left(\frac{R'}{R}\right)^n$, d'une série numérique (progression géométrique) convergente, pour toutes les valeurs de ρ inférieures à R' : donc (Remarque du N° 67) la série primitive (S) est uniformément convergente à l'intérieur d'un cercle de centre O et de rayon R'.

C. q. f. d.

70. – Remarque. – Si le point z est à l'extérieur du cercle de convergence, la série (S) est divergente, car on a vu que pour $\rho > R$, le module du terme général croît au-delà de toute limite (N° 68).
Sur le cercle lui-même, il y a doute.

Le rayon du cercle de convergence peut être nul ; comme, par exemple ; pour la série

$$1 + z + 1.2.z^2 + \cdots\cdots + 1.2\ldots n.z^n + \cdots\cdots$$

car c'est seulement pour $R = 0$ que le terme $1.2\ldots n.R^n$ ne croît pas indéfiniment avec n.

71. – Théorème II. – Les séries (S'), (S''), ... obtenues en prenant les dérivées successives des termes de la série (S), ont même cercle de convergence que celle-ci.

Il suffit de démontrer pour la série (S') :

$$(S') \qquad a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1} + \cdots\cdots$$

c. à. d. d'établir que le module, $n A_n \rho^{n-1}$, du terme général, croît indéfiniment avec n, si $\rho > R$, et reste au contraire fini si $\rho < R$.

Soit d'abord $\rho > R$; on peut écrire :

$$n A_n \rho^{n-1} = \frac{n}{\rho}\left(A_n \rho^n\right);$$

et les deux facteurs du second membre augmentent indéfiniment avec n, car pour $\rho > \mathcal{R}$, $A_n \rho^n$ tend vers l'infini (N.os 68 et 70).

Soit $\rho < \mathcal{R}$; on a:

$$n A_n \rho^{n-1} = \frac{n}{\rho}\left(\frac{\rho}{\mathcal{R}}\right)^n \left(A_n \mathcal{R}^n\right) < \mathcal{M}.\frac{n}{\rho}\left(\frac{\rho}{\mathcal{R}}\right)^n;$$

or le produit $\frac{n}{\rho}\left(\frac{\rho}{\mathcal{R}}\right)^n$ tend vers zéro, pour $n = \infty$, si $\rho < \mathcal{R}$, comme on le voit en prenant les logarithmes népériens:[1] le module du terme général reste donc fini. C. q. f. d.

72. _ Théorème III. _ La série des puissances, (S), est une fonction continue de la variable z à l'intérieur du cercle de convergence.

On dit qu'une fonction, $f(z)$ d'une variable imaginaire, z, est continue pour $z = z_0$, lorsque, étant donnée une quantité ε, on peut assigner un nombre positif, η, tel que l'on ait

$$\text{mod}\left[f(z_0+h) - f(z_0)\right] < \varepsilon,$$

pour toutes les valeurs de h dont le module est inférieur à η.

La fonction est continue dans une région, $\mathcal{R}$, du plan si elle est continue pour tous les points z_0, dont l'affixe est dans cette région: par exemple, les fonctions $z, z^2, \ldots z^n$ sont continues dans tout le plan.

La <u>continuité</u> de la série (S) résulte immédiatement de l'<u>uniformité</u> de la convergence:

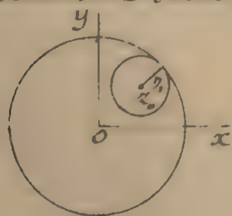
En effet, soient z_0 et z_0+h deux points <u>quelconques</u> intérieurs au cercle de convergence; on peut prendre n assez grand pour qu'on ait:

$$\text{mod}\,\mathcal{R}_n(z_0) = \text{mod}\left[a_{n+1} z_0^{n+1} + a_{n+2} z_0^{n+2} + \cdots\right] < \frac{\varepsilon}{4},$$

et:

$$\text{mod}\,\mathcal{R}_n(z_0+h) < \frac{\varepsilon}{4},$$

n étant fonction de ε seul: cela résulte de ce que la série est uniformément convergente dans le cercle. En particulier, ces inégalités auront lieu si le point z_0+h reste à l'intérieur du petit cercle



décrit de z_0 comme centre et tangent au cercle de convergence, c'est-à-dire si $\text{mod}\, h < \eta_1$, η_1 désignant le

(1) On a: $\log \frac{n}{\rho}\left(\frac{\rho}{\mathcal{R}}\right)^n = -\log\rho + \log n - n(\log\mathcal{R} - \log\rho) = \log n - An - B, \ldots$ avec $A > 0$. Or le terme An l'emporte pour n très grand, sur le terme $\log n$; le logarithme du produit considéré tend donc vers $-\infty$, et le produit lui-même tend vers zéro.

rayon de ce petit cercle. On aura alors :

$$(\alpha) \qquad \operatorname{mod}\left[R_n(z_0+h) - R_n(z_0)\right] < \operatorname{mod} R_n(z_0+h) + \operatorname{mod} R_n < 2\frac{\varepsilon}{4}, \text{ ou } \frac{\varepsilon}{2},$$

pour toute valeur de h telle que $\operatorname{mod} h < \eta_1$.

Le nombre n étant déterminé comme il vient d'être dit en fonction de ε, on a, en désignant par $f(z)$ la série proposée (S) :

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + R_n(z) = \varphi(z) + R_n(z)$$

Or $\varphi(z)$, somme d'un nombre fini de termes continus est continue dans tout le plan, et en particulier pour $z = z_0$; donc, on peut trouver un nombre, η_2, tel qu'on ait

$$(\beta) \qquad \operatorname{mod}\left[\varphi(z_0+h) - \varphi(z_0)\right] < \frac{\varepsilon}{2},$$

pour toute valeur de h de module $< \eta_2$.

Soit η le plus petit des nombres η_1 et η_2 ; les inégalités (α) et (β) subsisteront a fortiori pour toute valeur de h de module $< \eta$; on aura donc :

$$\operatorname{mod}\left[f(z_0+h) - f(z_0)\right] < \operatorname{mod}\left[\varphi(z_0+h) - \varphi(z_0)\right] + \operatorname{mod}\left[R_n(z_0+h) - R_n(z_0)\right] < 2.\frac{\varepsilon}{2}, \text{ ou } \varepsilon;$$

c'est-à-dire que la série $f(z)$ est continue en tout point z_0, intérieur au cercle de convergence. c. q. f. d.

73. _ Théorème IV. _ Les séries (S'), (S''), ... sont les dérivées successives de (S) par rapport à la variable z, pour toutes les valeurs de cette variable comprises dans le cercle de convergence.

On a en effet, en représentant toujours la série par $f(z)$:

$$f(z+h) = a_0 + a_1(z+h) + \cdots + a_n(z+h)^n + \cdots\cdots$$

$$(1) \qquad = a_0 + a_1 z + a_1 h + \cdots\cdots + a_n z^n + n a_n z^{n-1} h + \cdots + a_n h^n + \cdots\cdots$$

Cette série (1) est absolument convergente ; car la série des modules est, en désignant par ρ et η les modules de z et h :

$$A_0 + A_1\rho + A_1\eta + \cdots\cdots + A_n\rho^n + \cdots\cdots + A_n\eta^n + \cdots$$

$$= A_0 + A_1(\rho+\eta) + \cdots\cdots + A_n(\rho+\eta)^n + \cdots$$

ce qui converge si $\rho+\eta$ est inférieur au rayon, R, du cercle de convergence, c. à. d. si η est au plus égal à la plus courte distance du point z, de module ρ, à la circonférence de ce cercle. Si donc h est de

module assez petit, la série (1) sera absolument convergente, et on pourra y changer l'ordre des termes en écrivant :

$$f(z+h) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots\cdots$$
$$+ h\left[a_1 + \cdots\cdots + n a_n z^{n-1} + \cdots\cdots\right]$$
$$+ h^2\left[2a_2 + \cdots\cdots + n(n-1)\, a_n z^{n-2} + \cdots\cdots\right]$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

d'où :
$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \left[a_1 + \cdots + n a_n z^{n-1} + \cdots\right] + h\left[2a_2 + \cdots\right] + h^2(\quad) + \cdots\cdots$$

et on voit que, pour $h = 0$, la limite du premier membre est la série (S').

C. q. f. d.

III. — Fonctions exponentielle et circulaires.

---

74. — L'algèbre élémentaire ne définit e^x que pour des valeurs réelles de x ;[1] on sait que :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \cdots + \frac{x^n}{1.2..n} + \cdots$$

On définira e^z, pour des valeurs imaginaires de la variable z, par la même série :

(2) $$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \cdots\cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots\cdots,$$

cette définition permet, comme on va le voir, d'étendre au cas d'une variable imaginaire les propriétés établies en algèbre élémentaire.

---

(1) L'importance du nombre e en analyse a sa source dans le calcul connu que l'on fait pour trouver la dérivée de a^x. On a en effet

$$(a^x)' = \lim.\ a^x\left(\frac{a^h-1}{h}\right)$$

Si l'on pose $a^h - 1 = \varepsilon$; d'où $h = \log_a(1+\varepsilon)$, il vient :

$$(a^x)' = \lim.\ a^x \frac{\varepsilon}{\log_a(1+\varepsilon)} = \lim a^x \frac{\quad}{\log_a\left[1+\varepsilon\right]^{\frac{1}{\varepsilon}}}$$

Or, pour $\varepsilon = 0$, $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ tend vers e, de sorte que

$$(a^x)' = a^x \frac{1}{\log_a e}$$. Si $a = e$, $\log_a e = 1$, et par

75. – Cercle de convergence. – Le rayon du cercle de convergence de la série de puissances (2) est <u>infini</u> ; c. à. d. que le terme général, $\frac{\rho}{n!}$, de la série des modules reste fini, quelque soit ρ, quand n augmente indéfiniment. En effet ce terme est le terme général de la série convergente réelle $e^\rho = 1 + \frac{\rho}{1} + \frac{\rho^2}{1.2} + \dots$; il a donc pour limite zéro, quelque soit ρ, pour n infini.

D'après le N° 72 e^z est donc une fonction continue de z dans tout le plan.

77. – Multiplication. – On sait, si u et v sont réels, que $e^{u+v} = e^u . e^v$; cette formule subsiste pour u et v imaginaires. En effet :

$$e^{u+v} = 1 + \frac{(u+v)}{1} + \dots + \frac{(u+v)^n}{n!} + \dots\dots$$

$$(3) \qquad = 1 + \frac{u}{1} + \frac{v}{1} + \dots + \frac{u^n}{n!} + n\frac{u^{n-1}}{n!} + \dots + \frac{v^n}{n!} + \dots$$

Sous cette forme la série au second membre est absolument convergente, car si U et V sont les modules de u et v, la série des modules est :

$$1 + \frac{U}{1} + \frac{V}{1} + \dots + \frac{U^n}{n!} + n\frac{U^{n-1}V}{n!} + \dots + \frac{V^n}{n!} + \dots = 1 + \frac{U+V}{1} + \dots + \frac{(U+V)^n}{n!} + \dots$$

c. à. d. e^{U+V}, et elle converge quels que soient U et V. On peut donc, dans la série (3) changer l'ordre des termes, et ordonner par rapport aux puissances croissantes de u, ce qui donne :

$$\begin{aligned} e^{u+v} = & \left[1 + \frac{v}{1} + \dots + \frac{v^n}{n!} + \dots\right] + u\left[1 + \frac{v}{1} + \dots + n\frac{v^{n-1}}{n!} + \dots\right] \\ & + \frac{u^2}{1.2}\left[1 + \frac{v}{1} + \dots + n(n-1)\frac{v^{n-2}}{n!} + \dots\right] \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + \frac{u^n}{1.2..n}\left[1 + \frac{v}{1} + \dots\dots\dots\dots\right] + \dots \end{aligned}$$

on reconnaît immédiatement que les coefficients entre crochets sont tous égaux à la série e^v ; donc :

$$e^{u+v} = e^v\left[1 + u + \frac{u^2}{1.2} + \dots + \frac{u^n}{1.2\dots n} + \dots\dots\right] = e^u . e^v$$

C. q. f. d.

---

suite $(e^x)' = e^x$. C'est cette propriété, d'être identique à sa dérivée, qui constitue l'importance de la fonction exponentielle ; et on voit que, à ce point de vue, e s'est présenté comme la limite, pour $\varepsilon = 0$, de $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$.

78. — *Fonctions circulaires.* — Ces fonctions, cos z et sin z, se définissent, pour z imaginaire, par les séries de puissances établies lorsque z est réel :

(4) $$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

(5) $$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

séries qui sont convergentes dans tout le plan (N° 75). Ce sont donc deux fonctions continues pour toutes les valeurs de z ; on a d'ailleurs :

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1} - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \ldots\ldots$$

et, en changeant l'ordre des termes, ce qui est permis puisque la série des modules converge quelque soit z (N° 69) :

$$e^{iz} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots\ldots + i\left[\frac{z}{1} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\ldots\right]$$

c'est-à-dire

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

pour toutes les valeurs, réelles ou imaginaires, de z.

On en déduit, en changeant z en $-z$:[1]

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z ;$$

d'où

(6) $$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad ; \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

formules découvertes par Euler. En les dérivant on trouve :

$$(\cos z)' = -\sin z \quad ; \quad (\sin z)' = \cos z .$$

79. — *Addition.* — Les formules d'addition :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

s'étendent au cas de a et b imaginaires : il suffit de remplacer dans ces formules les sin et cos par leurs valeurs (6) en exponentielles ; on obtient des identités.

---

[1] En effet, en vertu des définitions (4) et (5), la fonction cos z est paire et la fonction sin z impaire, c'est-à-dire que cos z ne change pas et que sin z change de signe quand on change z en $-z$.

80. — *Périodicité*. — La fonction e^z admet la période $2\pi i$, c'est-à-dire ne change pas quand on augmente z de $2\pi i$. En effet :

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \left[\cos 2\pi + i \sin 2\pi\right] = e^z$$

Les fonctions $\sin z$ et $\cos z$ admettent la période 2π, car e^{iz} et e^{-iz}, qui figurent seuls dans les formules (6), admettent cette période.

De même, en changeant z en $z+\pi i$, on a :

$$e^{z+\pi i} = e^z \left[\cos \pi + i \sin \pi\right] = -e^z ;$$

or en changeant z en $z+\pi$ dans (6) :

$$\cos(z+\pi) = -\cos z \quad ; \quad \sin(z+\pi) = -\sin z ;$$

formules dont on déduit, en remplaçant z par $-z$, et observant que $\cos(-z) = \cos z$; $\sin(-z) = -\sin z$:

$$\cos(\pi - z) = -\cos z ; \quad \sin(\pi - z) = \sin z ;$$

comme dans le cas où z est réel.

Chapitre V.

Chapitre V.

Fonctions d'une variable imaginaire.

Généralités.

81. _ On vient de rencontrer, avec les séries de puissances, un premier exemple de fonctions d'une variable imaginaire ; il importe d'étendre ce résultat en définissant d'une manière générale, ce qu'on doit entendre par fonction de $z = x + yi$; on verra, principalement dans le cours de seconde année, que la plupart des progrès de l'analyse au XIXe siècle reposent sur cette extension.

Soit donc $z = x + yi$ une variable imaginaire ; toute fonction $P + Qi$, où P et Q sont des fonctions réelles de x, y est, au sens strict du mot, une fonction de z, puisque si l'on se donne z, c'est-à-dire x et y, les fonctions P et Q sont déterminées. Mais c'est là une notion trop générale, dont le développement reviendrait évidemment à la théorie des fonctions de deux variables réelles x et y, le symbole imaginaire, i, ne jouerait qu'un rôle factice et compliquerait sans profit les raisonnements. Si donc on veut étendre la théorie des fonctions d'une variable réelle, il sera nécessaire de particulariser les fonctions P et Q, en cherchant, si c'est possible, à donner à l'expression $P + Qi$ quelqu'une des propriétés dont jouissent les fonctions réelles, et voici, à ce point de vue, la conception de Cauchy.

82. _ Définition de Cauchy. _ Dans l'expression $P(x,y) + i\,Q(x,y)$, où P et Q sont des fonctions réelles de x, y, donnons à ces variables des accroissements dx et dy ; soient dP et dQ les différentielles totales correspondantes de P et Q : l'accroissement de $P + iQ$ a pour valeur principale $dP + i\,dQ$, et le rapport de cette quantité à l'accroissement de la variable $z = x + iy$ est :

$$(1) \qquad \frac{dP + i\,dQ}{dx + i\,dy} = \frac{\left[\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right]dx + \left[\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right]dy}{dx + i\,dy}.$$

Il dépend, non seulement de x et y (c'est-à-dire de z) mais encore du quotient $\frac{dy}{dx}$, de sorte que le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable ne tend pas vers une limite déterminée dépendant de cette variable seule : en d'autres termes, $P+Qi$ n'a pas de dérivée, en général, par rapport à $x+yi$.

Cauchy particularise les fonctions P et Q de manière que la dérivée existe, c. à. d. que le rapport (1) soit indépendant de $\frac{dy}{dx}$; la condition d'indépendance est que les coefficients de dx et dy, au numérateur et au dénominateur du second membre, soient proportionnels, ce qui donne :

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}}{1} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}}{i} ;$$

condition qui se dédouble, en séparant le réel de l'imaginaire :

(2) $$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad ; \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} .$$

Si ces deux relations fondamentales sont vérifiées pour tous les points x, y situés dans une région, R, du plan, la fonction $P+Qi$ aura, dans R, une dérivée par rapport à $z = x+yi$; la valeur de cette dérivée s'obtient en faisant $dy=0$, par exemple, dans (1), d'où

(3) $$(P+iQ)'_z = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[P+iQ\right]$$

83. — Ainsi, d'après Cauchy, $P+Qi$ n'est une fonction de z que si les relations (2) sont vérifiées ; il en résulte qu'on ne peut choisir arbitrairement ni P, ni Q, car en dérivant les identités (2) par rapport à y et x on a :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \quad ; \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

d'où :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0$$

et de même :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$$

84. — Exemples de fonctions d'une variable imaginaire. — Nous avons au N° 67, considéré la fonction $z^n = (x+iy)^n$, pour n entier et positif, en posant

$$z^n = \left[x^n - \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2 + \dots\right] + i\left[nx^{n-1}y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}y^3 + \dots\right]$$

La fonction ainsi définie est une fonction de z dans le sens de Cauchy,

car on vérifie immédiatement que P et Q [qui sont les deux fonctions entre crochets] satisfont aux relations fondamentales (2).

On aurait pu encore le voir autrement en observant que la fonction $(x+iy)^n$ a une dérivée par rapport à z, c. à. d. que le rapport

$$\frac{[x+iy+dx+idy]^n-[x+iy]^n}{dx+idy}$$

tend vers une limite, indépendante de $\frac{dy}{dx}$, à savoir $n(x+iy)^{n-1}=nz^{n-1}$.

De même $\frac{1}{z}, \dots \frac{1}{z^n}$ (n entier) sont des fonctions de z dans le sens de Cauchy[1], et aussi, plus généralement $f[\varphi(z)]$ en désignant par $f(z)$ et $\varphi(z)$ des fonctions de z : car on vérifie, comme dans le cas des variables réelles, que $f[\varphi(x+iy)]$ a une dérivée indépendante de $\frac{dy}{dx}$, à savoir $f'_\varphi \cdot \varphi'_z$.

La définition de z^n implique celle d'un polynôme entier en z et celle d'une série de puissances ; ces séries, et en particulier les fonctions e^z, sin z, cos z, sont donc des fonctions de z dans le sens de Cauchy.

85. – Fonction logarithmique. – On reconnaît de même que la fonction inverse d'une fonction de z, $f(z)$, est aussi une fonction de z, c'est-à-dire que si l'on pose

$$z=f(u),$$

u est fonction de z dans le sens de Cauchy : car u admet, par rapport à z, la dérivée $\frac{1}{f'(u)}$, qui est indépendante de $\frac{dy}{dx}$.

Par définition, on appelle logarithme de z la fonction inverse de e^z, c. à. d. liée à z par la relation

$$z=e^{\log z}$$

Pour mettre log z sous la forme $P+iQ$, posons

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

en introduisant le module et l'argument de z ; on aura :

$$\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=e^{P+Qi}=e^P(\cos Q+i\sin Q)$$

---

[1] La fonction $\frac{1}{z^n}=\frac{1}{(x+iy)^n}$ est définie par :

$$\frac{1}{z^n}=\frac{(x-iy)^n}{(x^2+y^2)^n}$$

d'où, en égalant les parties réelles et les parties imaginaires :

(4)
$$\rho \cos \varphi = e^P \cos Q$$
$$\rho \sin \varphi = e^P \cos Q$$

On en déduit :

$$\rho^2 = e^{2P} \; ; \; \text{d'où} \quad \rho = e^P ,$$

car ρ est essentiellement positif. Cela donne la valeur de P :

$$P = \log \rho ,$$

$\log \rho$ désignant le logarithme arithmétique (népérien) de ρ.

Les équations (4) deviennent alors :

$$\cos \varphi = \cos Q \quad ; \quad \sin \varphi = \sin Q ,$$

d'où $\qquad Q = \varphi + 2K\pi$ . . . . (K entier).

Donc enfin :

(5) $$\log z = P + Qi = \log \rho + i \left[\varphi + 2K\pi \right].$$

Le logarithme a donc une infinité de valeurs distinctes, qui diffèrent entre elles de $2\pi i$. Si z est réel et positif, $\varphi = 0$, et en prenant $K = 0$, le logarithme a <u>une</u> valeur réelle ; c'est le log. arithmétique ; si z est négatif ou imaginaire, toutes les valeurs de son logarithme sont imaginaires.

86. – On démontre sans difficulté, à l'aide de la formule (5), que $\log z$ jouit des mêmes propriétés que les logarithmes réels ; ainsi, si l'on a :

$$z = \rho \left(\cos \varphi + i \sin \varphi \right) ;$$
$$z' = \rho' \left(\cos \varphi' + i' \sin \varphi' \right)$$

on aura :

$$z z' = \rho \rho' \left[\cos (\varphi + \varphi') + i \sin (\varphi + \varphi') \right]$$

d'où

$$\begin{aligned} \log (z z') &= \log (\rho \rho') + i \left[\varphi + \varphi' + 2K\pi \right] \\ &= \left\{ \log \rho + i \left[\varphi + 2h\pi \right) \right\} + \left\{ \log \rho' + i \left[\varphi' + 2h'\pi \right] \right\} \\ &= \log z + \log z' . \end{aligned}$$

La dérivée de $\log z$ sera $\frac{1}{z}$; il suffit, pour le voir, de dériver par rapport à z la relation de définition : $z = e^{\log z}$.

87. – Fonction z^n. – On définira z^n, pour n quelconque, (réel ou imaginaire) par la relation :

$$z^n = e^{n \log z},$$

qui a lieu lorsque n est entier.

Soit toujours $z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$; il vient, en remplaçant $\log z$ par sa valeur (5):

$$(6) \qquad z^n = e^{n[\log\rho + i\varphi + 2K\pi i]} = \rho^n e^{ni(\varphi + 2K\pi)}$$

D'après cela, z^n a des valeurs différentes, qu'on obtient en multipliant l'une d'elles par $e^{2Kn\pi i}$. Si n est entier, $e^{2Kn\pi i}$ est égal à l'unité, quel que soit l'entier K, et z^n n'a qu'une valeur; si n est fractionnaire, $n = \frac{p}{q}$, z^n aura q valeurs distinctes, obtenues en donnant à K, dans (6), les valeurs $0, 1, \ldots (q-1)$; si n n'est ni entier ni fractionnaire, z^n aura une infinité de valeurs.

Par exemple, $\sqrt{z}$ à deux valeurs, égales et de signes contraires. La formule (6) montre immédiatement qu'on a, quels que soient n et n':

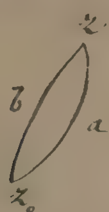
$$z^n . z^{n'} = z^{n+n'},$$

c'est-à-dire que le produit d'une des valeurs de z^n par une des valeurs de $z^{n'}$ est une des valeurs de $z^{n+n'}$. De même $(z^n)^{n'} = z^{nn'}$, $(zu)^n = z^n u^n$.

Fonctions monodromes.

88. – Définition. – On dit qu'une fonction, $f(z)$ est monodrome (ou uniforme) dans une région R du plan, lorsque, le point z, de coordonnées x, y, étant assujetti à rester dans cette région, la fonction prend en chaque point une valeur unique, indépendante du chemin suivi par le point z.

En particulier, si z décrit une courbe fermée, la fonction monodrome, $u = f(z)$, revient au point de départ avec sa valeur initiale. Réciproquement, si elle jouit de cette propriété pour toutes les courbes fermées tracées dans R, elle est monodrome dans cette région: qu'on décrive en effet le chemin $z_0 a z$ en partant de z_0 avec la valeur u_0 de la fonction; on arrive en z avec une valeur u, et si l'on décrit ensuite le chemin $z b z_0$, on arrive en z_0, par hypothèse, avec la valeur u_0. Si maintenant on rétrograde de z_0 en z, suivant $z_0 b z$, la fonction repasse en chaque point par la même valeur que tout à l'heure, et, par suite, acquiert en z la valeur u.



C. q. f. d.

89. – Exemples. – Eclaircissons cette notion par des exemples.

1° Les polynômes entiers en z, les fractions rationnelles (quotients

de deux polynômes entiers); les fonctions e^z, $\sin z$, $\cos z$, sont monodromes dans tout le plan : en effet, elles n'ont en un point du plan qu'une seule valeur, et c'est toujours à cette valeur que l'on arrive, quelque soit le chemin suivi par le point z.

2°. La fonction $\sqrt{z}$ n'est pas monodrome dans toute région comprenant le point $z=0$, c. à. d. l'origine. En effet, si l'on pose :

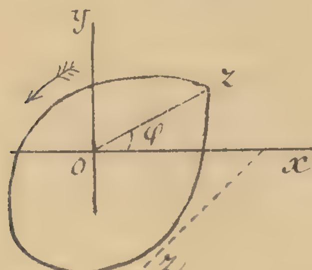
$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi},$$

on aura (N° 87)

$$\sqrt{z} = \rho^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\varphi}{2}},$$

φ étant un des arguments $(\varphi + 2K\pi)$ de z.

Si le point z décrit, dans le sens positif, un contour fermé entourant l'origine, l'argument φ, de z, augmente de 2π, et par suite $\sqrt{z}$ revient au point de départ avec la valeur :



$$\rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi+2\pi}{2}} = -\rho^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\varphi}{2}}.$$

En d'autres termes, $\sqrt{z}$ change de signe quand z décrit un contour fermé contenant l'origine; $\sqrt{z}$ reprendrait la même valeur au point de départ si z décrivait deux fois le contour.

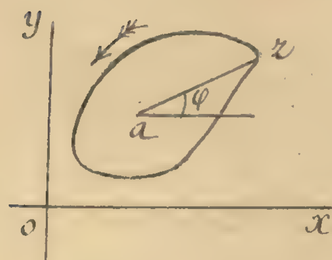
3°. Plus généralement, la fonction $(z-a)^m$, où m n'est pas entier, n'est pas monodrome dans toute région comprenant le point $z=a$. Car si l'on pose

$$z - a = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi},$$

on aura

$$(z-a)^m = \rho^m e^{mi\varphi}$$

Si z décrit, dans le sens positif, un contour fermé entourant le point a, l'argument, φ, de $z-a$ augmente de 2π, et $(z-a)^m$ revient au point de départ avec la valeur :



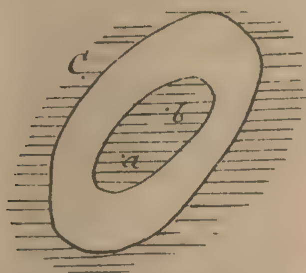
$$\rho^m e^{mi(\varphi+2\pi)} = \left[\rho^m e^{mi\varphi}\right] e^{2m\pi i}$$

La fonction se reproduit donc multipliée par $e^{2m\pi i}$, quantité différente de 1, puisque m n'est pas entier.

Au contraire $(z-a)^m$ est monodrome à l'intérieur d'une courbe fermée ne contenant pas le point a, car si z décrit cette courbe, l'argument φ, de $z-a$, reprend sa valeur initiale quand

on revient au point de départ.

4° La fonction $\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$ n'est pas monodrome dans une région qui comprend un des points a, b, c ; elle l'est à l'intérieur d'une courbe fermée ne contenant aucun de ses points. Elle est également monodrome dans la région (non ombrée) limitée par deux courbes entourant chacune deux des points a, b, c : car en restant dans cette région, on ne peut tourner autour de a sans tourner en même temps autour de b, de sorte que, lorsqu'on revient au point de départ, les deux radicaux $\sqrt{z-a}$ et $\sqrt{z-b}$ ont changé simultanément de signe, ou n'ont pas changé. Le troisième radical, $\sqrt{z-c}$, reprenant sa valeur initiale, puisque c est en dehors de la région considérée, la proposition est établie.



5° La fonction $\log z$ n'est pas monodrome dans toute région qui comprend le point $z=0$ (origine) ; on a en effet, en posant

$$z = \rho e^{i\varphi} :$$

$$\log z = \log \rho + i\varphi \;\ldots\ldots\ldots \text{(φ étant un des arguments de z)}$$

Si donc z fait un tour, dans le sens positif, autour de l'origine, φ augmente de 2π, et $\log z$ de $2\pi i$.

Au contraire, $\log z$ est monodrome à l'intérieur d'une courbe fermée ne comprenant pas l'origine.

Mêmes conclusions pour la fonction $\log(z-a)$ et le point $z=a$.

90. – Séries dont les termes sont fonctions d'une variable imaginaire. – Soit la série :

$$(S) \qquad u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z) + \cdots\cdots ;$$

on dit qu'elle est uniformément convergente dans une région, R, du plan si, étant donné ε, on peut assigner un nombre N, fonction de ε seul, tel qu'on ait

$$\operatorname{mod} R_n(z) = \operatorname{mod}\left[u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \cdots\cdots\right] < \varepsilon$$

pour $n \geq N$ et pour toutes les valeurs de z dont l'affixe est dans la région R. (Voir le N° 67). On établit, comme dans la remarque du N° 67 que :

Une série est uniformément convergente dans une région si, dans cette région, les modules de ses termes sont égaux ou inférieurs aux termes d'une série numérique convergente, à termes positifs.

Il est clair que la série est aussi absolument convergente dans le même cas.

91. _ Les séries uniformément convergentes dans une région et dont les termes sont des fonctions monodromes et continues[1] de z dans la même région jouissent d'une propriété importante :

Leur somme est une fonction monodrome et continue dans la même région.

Elle est monodrome, car la série converge et chacun de ses termes n'a qu'une valeur pour une valeur de z ; je dis qu'elle est continue : il suffit, pour le voir, de reproduire sans changement le raisonnement du N° 72, en remplaçant le cercle de convergence par la région de convergence uniforme.

Fonction thêta.

92. _ Comme exemple de série dont les termes dépendent d'une variable imaginaire, et qui n'est pas une série de puissances, nous citerons une fonction qui joue un rôle important dans le cours de seconde année.

Soient ω_1 et ω_2 deux quantités quelconques, telles cependant que le rapport $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ ait sa partie imaginaire positive ; posons :

$$q = e^{\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}}$$

et considérons la série

$$(6) \qquad \theta(z) = \frac{1}{i} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)\frac{\pi i z}{2\omega_1}}$$

où n prend toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$.

---

[1] On a donné au N° 72, la définition de la continuité d'une fonction d'une variable imaginaire ; les fonctions e^z, $\sin z$, $\cos z$ sont, comme on l'a vu continues dans tout le plan, de même que les polynômes entiers en z. Les fractions rationnelles sont continues dans toute région qui ne comprend aucune des racines du polynôme dénominateur, car, en ces points la fraction devient infinie. La fonction $\log z$ n'est pas continue dans une région contenant l'origine car elle est infinie pour $z = 0$; elle est continue dans le reste du plan.

Je dis que cette série est absolument et uniformément convergente dans tout le plan.

Considérons d'abord la série des termes de (6) qui correspondent aux valeurs positives de n; le terme général est :

$$u_n = \frac{1}{i}(-1)^n e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}} e^{(2n+1)\frac{\pi i z}{2\omega_1}}$$

Soit $\frac{\omega_2}{\omega_1} = a + bi$; $\frac{z}{2\omega_1} = x + iy$; on a, en remarquant que pour A réel, le module de $e^{Ai} (= \cos A + i \sin A)$ est l'unité :

$$\operatorname{mod} u_n = e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi b} e^{-(2n+1)\pi y}$$

d'où :

$$\sqrt[n]{\operatorname{mod} u_n} = e^{-n\pi b} \cdot e^{-2\pi y - \pi b} \cdot e^{-\frac{\pi b}{4n} - \frac{\pi y}{n}}$$

Quand n tend vers $+\infty$, le second membre tend vers zéro, à cause du terme prépondérant $e^{-n\pi b}$, puisque b est supposé positif, et que y est fini. Donc, à partir d'une valeur assez grande de n, et pour toutes les valeurs de z comprises dans une région donnée du plan, R, aussi étendue qu'on veut, ce second membre demeure inférieur à une quantité, h, ($\frac{1}{2}$ par exemple) comprise entre 0 et 1 ; en sorte que :

$$\sqrt[n]{\operatorname{mod} u_n} < h ; \quad \operatorname{mod} u_n < h^n .$$

Donc, dans toute la région R, le module du terme général est inférieur au terme correspondant d'une progression géométrique numérique, de raison $h < 1$: la série considérée est donc (N° 90) absolument et uniformément convergente dans R.

On raisonnerait de même sur la série des termes de (6) qui correspondent aux valeurs négatives de n, et le résultat serait le même.

La proposition est donc établie.

D'ailleurs, les termes de (6) étant des fonctions monodromes et continues de z, il résulte du N° 91 que :

La série (6) définit une fonction, $\theta(z)$, monodrome et continue dans tout le plan.

93. – Propriétés de $\theta(z)$. – Cette fonction possède des propriétés importantes.

1° La fonction $\theta(z)$ est impaire (c. à. d. change de signe quand on change z en $-z$) ; car on peut écrire, en groupant les deux termes

qui correspondent à n et à $-n-1$ (ce qui est permis, à cause de la convergence absolue) :

$$\theta(z) = \frac{1}{i} \sum_0^\infty (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \left[e^{(2n+1)\frac{\pi i z}{2\omega_1}} - e^{-(2n+1)\frac{\pi i z}{2\omega_1}} \right]$$

c'est-à-dire

$$\theta(z) = 2 \sum_0^\infty (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \sin (2n+1) \frac{\pi z}{2\omega_1} \text{ [1]}$$

et on voit bien que si on change z en $-z$, tous les termes changent de signe. Donc

$$\theta(-z) = -\theta(z)$$

2° Changeons, dans $\theta(z)$, z en $z + 2\omega_1$: le terme général u_n se reproduit, multiplié par

$$e^{(2n+1)\pi i} = \cos(2n+1)\pi + i \sin(2n+1)\pi = -1 .$$

Donc :

$$(7) \qquad \theta(z + 2\omega_1) = -\theta(z) .$$

3° Changeons z en $z + 2\omega_2$; le terme général, u_n devient :

$$\frac{1}{i}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)\frac{\pi i z}{2\omega_1}} e^{(2n+1)\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}}$$

$$= \frac{1}{i}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2 + 2(n+\frac{1}{2})} e^{(2n+3)\frac{\pi i z}{2\omega_1}} e^{-\frac{\pi i z}{\omega_1}}$$

$$= -\left[\frac{1}{i}(-1)^{n+1} q^{(n+\frac{1}{2}+1)^2} e^{(2n+3)\frac{\pi i z}{2\omega_1}} \right] e^{-\frac{\pi i z}{\omega_1}} q^{-1}$$

Or le terme entre crochets n'est autre chose que u_{n+1} ; chaque terme reproduit donc le suivant, multiplié par un <u>même</u> facteur, $-e^{-\frac{\pi i z}{\omega_1}} q^{-1}$; donc :

$$(8) \qquad \theta(z + 2\omega_2) = -q^{-1} e^{-\frac{\pi i z}{\omega_1}} \theta(z)$$

Remarque. — La fonction $\theta(z)$ permet de former des fonctions

---

[1] C'est cette forme de $\theta(z)$ qui est le plus commode pour le calcul de la fonction ; on a, en posant : $\frac{\pi z}{2\omega_1} = u$:

$$\frac{1}{2}\theta(z) = q^{\frac{1}{4}} \sin u - q^{\frac{9}{4}} \sin 3u + q^{\frac{25}{4}} \sin 5u - \ldots\ldots$$

doublement périodiques, c'est-à-dire ne changeant pas quand on augmente z de deux quantités, $2\omega_1$, $2\omega_2$. En effet, dérivons logarithmiquement les relations (7) et (8), il vient :

$$\frac{\theta'}{\theta}(z+2\omega_1) = \frac{\theta'}{\theta}(z) ;$$

$$\frac{\theta'}{\theta}(z+2\omega_2) = -\frac{\pi i}{\omega_1} + \frac{\theta'}{\theta}(z) ;$$

si on dérive ces deux équations par rapport à z, on voit que la dérivée de $\frac{\theta'}{\theta}$, c'est-à-dire la fonction $\frac{\theta\theta''-\theta'^2}{\theta^2}$ admet les deux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$. On retrouvera ces fonctions dans le cours de seconde année (fonctions elliptiques).

Chapitre VI.

Chapitre VI.

Développements en Série.

I. – Formule de Taylor.

94. – On a établi dans le cours de Spéciales, l'importante formule, dite de Taylor, qu'on se bornera à rappeler ici.

Soit $f(x)$ une fonction d'une variable réelle, x, continue et déterminée, ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées, entre $x=a$ et $x=b$; supposons de plus que, dans le même intervalle, la dérivée d'ordre n existe et soit déterminée; on aura, si x et $x+h$ sont compris entre a et b:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x) + R_n ;$$

le reste R_n ayant pour expression:

$$R_n = \frac{(1-\theta)^{n-p}}{p.1.2\ldots(n-1)} h^n f^n(x+\theta h);$$

p désignant un entier positif qu'on peut choisir arbitrairement, et θ un nombre compris entre 0 et 1, qui dépend de p, et dont la valeur exacte est inconnue.

En faisant $p=n$ et $p=1$, on obtient les formes du reste dues à Lagrange et à Cauchy:

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^n(x+\theta h) \quad ; \qquad R_n = \frac{(1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!} h^n f^n(x+\theta' h)$$

Si dans la formule de Taylor on fait $x=0$, et si on écrit ensuite x à la place de h, on a la formule de Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(0) + R_n ;$$

$$R_n = \frac{(1-\theta)^{n-p}}{p.1.2\ldots(n-1)} x^n f^n(\theta x)$$

95. – Extension au cas de plusieurs variables. – Soit une fonction de deux variables, $z = f(x,y)$; considérons la fonction

$$f(x+ht,\ y+kt) = \varphi(t).$$

Si on suppose x et y constants et t variable, on aura, par la formule de Maclaurin, en employant le reste de Lagrange ($p = n$) :

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{n-1}(0) + \frac{t^n}{n!}\varphi^n(\theta t)$$

Calculons les dérivées successives $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, ... On a, en posant pour simplifier

$$x + ht = \alpha \quad ; \quad y + kt = \beta :$$

$$\varphi(t) = f(\alpha, \beta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{d'où :}$$

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dt} = h\frac{\partial f}{\partial \alpha} + k\frac{\partial f}{\partial \beta}$$

$$\varphi''(t) = h\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}h + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\,\partial \beta}k\right] + k\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\,\partial \beta}h + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2}k\right]$$

$$= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\,\partial \beta} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} ;$$

et ainsi de suite. Mais d'ailleurs, à cause des relations $\alpha = x + ht$, $\beta = y + kt$, les dérivées partielles de $f(\alpha, \beta)$ par rapport à α et β sont les mêmes que les dérivées partielles de même ordre par rapport à x et y ; de sorte que

$$\varphi'(t) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\varphi''(t) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

. . . .

$\frac{\partial f}{\partial x}$ ...... désignant $\frac{\partial}{\partial x} f(x+ht,\ y+kt)$. Faisons maintenant $t = 0$ dans ces dérivées, pour avoir $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, ... ; les expressions $\frac{\partial f}{\partial x}$ ...... désigneront alors $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$, ... et il viendra :

$$\varphi(t) = f(x+ht;\ y+kt) = f(x,y) + t\left[hf'_x + kf'_y\right] + \frac{t^2}{1.2}\left[h^2 f''_{x^2} + 2hkf''_{xy} + k^2 f''_{y^2}\right] + \cdots$$

Faisant enfin $t = 1$, on obtient la formule cherchée :

$$f(x+h,\ y+k) = f(x,y) + \left[hf'_x + kf'_y\right] + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\left[h^{n-1}\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} + \frac{(n-1)}{1}h^{n-2}k\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-2}\,\partial y} + \cdots + k^{n-1}\frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}}\right]$$

$$+ R_n ;$$

le reste R_n a la même forme que le terme qui le précède; on remplacera simplement dans ce terme $n-1$ par n et $f(x, y)$ par $f(x+\theta h, y+\theta k)$.

On a supposé qu'on pouvait appliquer à $\varphi(t)$ la formule de Maclaurin, en faisant $t=1$; c'est-à-dire qu'entre $t=0$ et $t=1$, $\varphi(t)$, $\varphi'(t), \ldots \varphi^{n-1}(t)$ sont continues et déterminées et que $\varphi^n(t)$ est déterminée. D'après les expressions ci-dessus de ces dérivées, ces conditions seront remplies si $f(x,y)$ et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement sont continues et déterminées et si ses dérivées partielles d'ordre n sont déterminées, lorsque x et y varient de x à $x+h$ et de y à $y+k$.

96.– Remarque.– Si on pose $f(x,y)=z$, et $h=dx$, $k=dy$ on voit que, dans la formule précédente, les termes successifs :

$$dx f'_x + dy f'_y \ ; \ dx^2 f''_{x^2} + 2\, dx\, dy\, f''_{xy} + dy^2 f''_{y^2} \ ; \ldots\ldots$$

sont égaux à dz, d^2z, ... (N.° 24). Donc on peut écrire, en remarquant que $f(x+dx, y+dy) - f(x,y)$ n'est autre chose que l'accroissement Δz, de z :

$$\Delta z = dz + \frac{1}{2!} d^2 z + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} d^{n-1} z + R_n \ ;$$

formule qui est également vraie pour une fonction, z, d'une seule variable. Le premier terme est dz, valeur principale de Δz, ainsi que cela devait être prévu.

97. — Rappelons les développements principaux qu'on obtient par l'application des formules de Taylor et de Maclaurin.

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \ldots\ldots$$

la série du second membre étant convergente et égale au premier membre lorsque x est compris entre -1 et $+1$.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots\ldots$$

formule également valable pour x compris entre -1 et $+1$.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

formule valable pour toutes les valeurs réelles de x, et que dans un précédent chapitre, nous avons supposée connue.

II. – Procédés pour effectuer les développements en série.

98. – Dans le calcul différentiel, on a souvent besoin de développer une quantité en série suivant les puissances d'un ou de plusieurs infiniment petits, ou du moins de trouver un certain nombre de termes de ce développement. Soit par exemple y une fonction, $y = f(x)$, d'un seul infiniment petit x; la formule de Maclaurin, si elle est applicable, résout la question :

$$y = f(0) + x f'(0) + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} f^n(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^n(\theta x),$$

et, en négligeant le dernier terme (reste), on a la valeur de y aux infiniment petits près d'ordre supérieur à n.

Souvent, la formule de Maclaurin, appliquée directement, conduirait à des calculs très longs, à cause de la nécessité d'obtenir les dérivées successives de y; parfois aussi elle est inapplicable : Voici quelques procédés qui permettent de simplifier les opérations.

99. – Produit. – Supposons qu'il s'agisse d'obtenir le développement d'un produit en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur à n (par rapport à x).

Si $y = uv$, et si :

$$u = Ax^\alpha + Bx^{\alpha+1} + \cdots\cdots$$

$$v = Mx^\beta + Nx^{\beta+1} + \cdots\cdots$$

on fera le produit uv, et on ne gardera que les termes d'ordre égal ou inférieur à n; pour cela, il est clair qu'il suffira de s'arrêter, dans v, aux termes en $x^{n-\alpha}$ (inclus), et, dans u, aux termes en $x^{n-\beta}$. On aura alors,

$$y = \left[Ax^\alpha + Bx^{\alpha+1} + \cdots + Lx^{n-\beta}\right]\left[Mx^\beta + Nx^{\beta+1} + \cdots + Px^{n-\alpha}\right],$$

et dans le produit deux polynômes qui figure au second membre, on négligera les termes en x^{n+1}, x^{n+2}, ...; ce qui donnera y avec l'approximation demandée.

100. – Quotient. – Soit $y = \frac{v}{u}$, u et v ayant les mêmes expressions que plus haut; cherchons de même à quels termes on doit s'arrêter dans u et v pour que le quotient ordonné suivant les puissances croissantes de x donne y aux termes près d'ordre $> n$. Écrivons pour cela :

$$v = v_1 + S \quad ; \qquad u = u_1 + R$$

R et S étant les parties négligées dans u et v ; il faut que l'expression

$$\frac{v}{u} - \frac{v_1}{u_1} = \frac{u_1 v - u v_1}{u u_1} = \frac{u S - v R}{u u_1}$$

soit, en x, d'ordre $> n$.

On sera sûr qu'il en est ainsi si $\frac{uS}{uu_1}$ et $\frac{vR}{uu_1}$ sont séparément d'ordre $> n$; comme $u u_1$ est d'ordre 2α et u d'ordre α, il faut que S soit d'ordre $n+\alpha+1$; de même R sera d'ordre $n+2\alpha-\beta+1$. On aura alors, aux termes près d'ordre $> n$:

$$y = \frac{v}{u} = \frac{Mx^{\beta} + Nx^{\beta+1} + \dots + Px^{n+\alpha}}{Ax^{\alpha} + \dots\dots + Lx^{n+2\alpha-\beta}} \; ;$$

et il suffira d'effectuer la division des deux polynômes ci-dessus, ordonnée suivant les puissances croissantes de x, en s'arrêtant au terme en x^n, pour avoir la valeur cherchée de y.

En particulier, si $\alpha = 0$, $\beta = 0$, on prendra dans u et v jusqu'aux termes en x^n, inclus, et on fera le quotient en s'arrêtant au même terme.

101. – Exemple. – Un exemple important est le suivant :

Soit

$$y = \frac{f(x)}{(x-a)^{\alpha}\varphi(x)}, \dots\dots\dots\dots (\alpha \text{ entier et positif}).$$

$f(x)$ et $\varphi(x)$ étant finis et non nuls pour $x = a$. On pose

$$x - a = h \; ;$$

et on demande le développement de y suivant les puissances croissantes de h.

On a :

$$y = \frac{f(a+h)}{h^{\alpha}\varphi(a+h)} = \frac{1}{h^{\alpha}} \; \frac{f(a) + hf'(a) + \dots\dots}{\varphi(a) + h\varphi'(a) + \dots\dots}$$

en supposant la formule de Taylor applicable à $f(a+h)$ et $\varphi(a+h)$.

Si l'on veut avoir y jusqu'aux termes en h^n (inclus), on développera le quotient

$$\frac{f(a)+hf'(a)+\dots\dots}{\varphi(a)+h\varphi'(a)+\dots\dots}$$

jusqu'aux termes en $h^{\alpha+n}$, et pour cela, d'après la règle du N° précédent, on fera le quotient, suivant les puissances croissantes de h des deux polynômes :

$$\frac{f(a)+hf'(a)+\dots+\frac{h^{\alpha+n}}{(\alpha+n)!}f^{\alpha+n}(a)}{\varphi(a)+h\varphi'(a)+\dots+\frac{h^{\alpha+n}}{(\alpha+n)!}\varphi^{\alpha+n}(a)} = A + Bh + Ch^2 + \dots + Ph^{\alpha+n}$$

en s'arrêtant au terme en $h^{\alpha+n}$. On aura alors, pour y :

$$y = \frac{A}{h^\alpha} + \frac{B}{h^{\alpha-1}} + \frac{C}{h^{\alpha-2}} + \cdots + \frac{L}{h} + M + Nh + \cdots + Ph^n$$

Les premiers termes $\frac{A}{h^\alpha} + \cdots + \frac{L}{h}$ se nomment la partie infinie du développement de y voisinage de $x = a$, parceque, pour $x = a$ (c.à.d. $h = 0$) ils deviennent infinis. Si l'on désire obtenir seulement la partie infinie ($n = -1$) les deux termes du quotient $\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$ devront être calculés jusqu'aux termes en $h^{\alpha-1}$ (inclus), et dans le quotient on s'arrêtera également au terme en $h^{\alpha-1}$.

102. _ Il est parfois impossible de développer une fonction suivant les puissances croissantes de x ; la fonction $\log x$ en est un exemple.

En effet, si l'on avait

$$\log x = Ax^\alpha + Bx^{\alpha+1} + \cdots\cdots$$

il faudrait que α fût négatif, puisque, pour $x = 0$, $\log x = -\infty$; soit $\alpha = -m$; on aurait :

$$x^m \log x = A + Bx + Cx^2 + \cdots$$

ce qui est impossible, car pour $x = 0$, le premier membre tend vers 0 quelque petit que soit m, et le second tend vers A, qui n'est pas nul, puisque Ax^α a été supposé le premier terme du développement.

Si l'on a une expression telle que

$$\log u = \log\left(Ax^\alpha + Bx^{\alpha+1} + \cdots\right),$$

on peut obtenir un développement comprenant un terme en $\log x$, suivi de termes en x. On écrira :

$$\log u = \log Ax^\alpha\left[1 + \frac{B}{A}x + \cdots\right] = \log A + \alpha \log x + \log\left[1 + \frac{B}{A}x + \cdots\right]$$

si l'on pose

$$R = \frac{B}{A}x + \cdots,$$

$\log(1+R)$ sera développable au voisinage de $x = 0$:

$$\log(1+R) = R - \frac{R^2}{2} + \frac{R^3}{3} - \cdots\cdots$$

et en développant $R, R^2, R^3, \ldots$ jusqu'à l'ordre n, on aura :

$$\log u = \alpha \log x + \log A + ax + bx^2 + \cdots + lx^n,$$

aux termes près d'ordre $> n$.

103. _ Développement suivant les puissances décroissantes

de x. — Nous avons supposé jusqu'ici que x était un infiniment petit, et nous avons cherché des développements, valables au voisinage de $x=0$, et ordonnés suivant les puissances croissantes de x.

Si au contraire x est un infiniment grand, on posera $x=\frac{1}{z}$; z sera un infiniment petit, et la fonction $y=f(x)=f\left(\frac{1}{z}\right)$ pourra être développée, par les méthodes précédentes, suivant les puissances croissantes de z:

$$y = Az^{\alpha} + Bz^{\alpha+1} + \cdots\cdots$$

d'où, en faisant $\alpha = -m$

$$y = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \cdots\cdots$$

ce qui donne y ordonné suivant les puissances décroissantes de l'infiniment grand x.

Bien entendu, un tel développement n'est pas toujours possible; par exemple pour l'exponentielle, e^x, on ne saurait avoir:

$$e^x = Ax^m + Bx^{m-1} + \cdots\cdots$$

car m devrait être >0, puisque $e^x=\infty$ pour x infini; il viendrait alors:

$$\frac{e^x}{x^m} = A + \frac{B}{x} + \cdots\cdots$$

ce qui est absurde, car le premier membre tend vers ∞ pour x infini, tandis que le second membre reste fini.

De même on ne peut avoir

$$\log x = Ax^m + Bx^{m-1} + \cdots\cdots$$

car m serait positif, et il viendrait

$$\frac{1}{x^m}\log x = A + \frac{B}{x} + \cdots\cdots$$

ce qui est impossible, car pour $x=\infty$ le premier tend vers zéro, quelque petit soit m, et le second membre tend vers A.

104. — Certaines expressions ne sont commodément développables qu'après un changement de variable; voici un exemple.

Développement de $y=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{n}$. Pour $n=\infty$, y est égal à e^x; c'est la valeur principale. Pour obtenir les termes suivants, prenons les logarithmes :

$$\log y = n\log\left(1+\frac{x}{n}\right) = n\left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{3n^3} - \cdots\cdots\right)$$

$$= x - \frac{x^2}{2n} + \frac{x^3}{3n^2} - \frac{x^4}{4n^3} + \cdots\cdots$$

On a ainsi le développement de $\log y$. On en déduira celui de y par la formule :

$$y = e^{\log y} = e^{x - \frac{x^2}{2n} + \cdots} = e^{x}\, e^{R}$$

en posant

$$R = -\frac{x^2}{2n} + \frac{x^3}{3n^2} - \cdots\cdots$$

d'où :

$$y = e^x\left[1 + R + \frac{R^2}{2!} + \frac{R^3}{3!} + \cdots\right]$$

Si l'on veut s'arrêter aux termes en $\frac{1}{n^3}$, inclus, on ne poussera pas plus loin que $\frac{R^3}{3!}$ dans le crochet, et on aura :

(1) $$y = e^x\left[1 - \frac{x^2}{2n} + \frac{x^3}{3n^2} - \frac{x^4}{4n^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4n^2} - \frac{x^5}{3n^3}\right) - \frac{1}{6}\,\frac{x^6}{8n^3}\right] + \cdots$$

$$= e^x\left[1 - \frac{x^2}{2n} + \frac{1}{n^2}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}\right) - \frac{1}{n^3}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{6} + \frac{x^6}{48}\right)\right] + \cdots$$

les termes négligés étant au moins d'ordre 4 par rapport à $\frac{1}{n}$.

On développerait d'une manière analogue $y = n\left[\sqrt[n]{x} - 1\right]$ suivants les puissances croissantes de $\frac{1}{n}$; on écrirait :

$$\sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n}\log x} = 1 + \frac{\log x}{n} + \frac{1}{2!}\,\frac{\log^2 x}{n^2} + \cdots\cdots$$

d'où :

(2) $$y = \log x + \frac{1}{2!}\,\frac{\log^2 x}{n} + \frac{1}{3!}\,\frac{\log^3 x}{n^2} + \cdots\cdots$$

105. — Remarque. — Les séries de Taylor et de Maclaurin n'ont été établies jusqu'ici que pour les fonctions de variables réelles ; c'est seulement dans le cours de seconde année qu'on les étendra aux fonctions de variables imaginaires : jusqu'à nouvel ordre, les développements ci-dessus ne sont valables que dans le domaine réel.

106. — Développement de fonctions implicites. — Nous indiquerons la méthode à suivre sur des exemples.

I. — Soit une équation, $f(x,y) = 0$, ayant, pour $x = x_0$, <u>une et une seule</u> racine y égale à y_0 ; on demande de développer cette racine suivant les puissances croissantes de $x - x_0$. Il est clair qu'en posant $x - x_0 = X$ et $y - y_0 = Y$, on ramène ces cas à celui où $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$; soit alors par exemple l'équation :

$$y^3 - xy + y - x^2 = 0,$$

qui, pour $x = 0$, a une et une seule racine nulle. Cette racine, y, est

infiniment petite avec x, et on voit immédiatement sur l'équation que sa valeur principale est x^2; car les termes y^3 et $-xy$ sont infiniment petits devant le terme en y, de sorte que la valeur principale du premier membre de l'équation est $y - x^2$ (1). On peut donc poser

$$y = x^2(1+z),$$

z s'annulant pour $x = 0$. L'équation devient alors :

$$x^4(1+z)^3 - x(1+z) + z = 0,$$

et elle a, en z, une racine nulle pour $x = 0$. On reconnaît de suite que la valeur principale de cette racine est x, et on peut poser :

$$z = x(1+\zeta),$$

ζ s'annulant pour $x = 0$. On formera alors l'équation ζ, et ainsi de suite, ce qui donnera, en remontant la série des calculs, le développemt cherché de la racine y :

$$y = x^2 + x^3 + \cdots\cdots$$

II. – Si pour $x = 0$ l'équation proposée a k racines y égales à zéro, le terme de moindre degré en y qui reste dans l'équation, après qu'on a fait $x = 0$, est un terme en y^k; on ne peut plus alors, comme dans le cas précédent, indiquer immédiatement les deux termes qui constituent la valeur principale du premier membre.

Soit par exemple l'équation

$$y^3 - xy + x^3 = 0, \tag{3}$$

qui, pour $x = 0$, a trois racines nulles.

Si α désigne l'ordre de l'une d'elles par rapport à l'infiniment petit x, posons :

$$y = x^\alpha(A+z) \tag{4}$$

A étant une constante $\gtrless 0$ et z s'annulant pour $x = 0$. Portons cette valeur dans (3) ; il vient :

$$x^{3\alpha}\left[A+z\right]^3 - x^{\alpha+1}\left[A+z\right] + x^3 = 0 \tag{5}$$

Dans cette équation, les termes de moindre degré en x qui constituent la valeur principale du premier membre doivent se détruire ; or ces termes

---

(1) Le succès de ce raisonnement tient à ce que l'équation contient un terme en y : or l'existence de ce terme résulte nécessairement de l'hypothèse que, pour $x = 0$, il y a une seule racine y nulle.

sont évidemment compris parmi ceux de la somme

(6) $$A^3 x^{3\alpha} - A x^{\alpha+1} + x^3 ;$$

pour qu'ils puissent se détruire, il faut qu'ils soient au moins deux, c'est-à-dire que 1° deux des exposants 3α, $\alpha+1$, 3 soient égaux, et 2° soient inférieurs (ou au plus égaux) au troisième.

On a donc à examiner les trois hypothèses qui satisfont à 1° :

a) $3\alpha = \alpha + 1$; ou $\alpha = \frac{1}{2}$

b) $\alpha + 1 = 3$; ou $\alpha = 2$

c) $3\alpha = 3$; ou $\alpha = 1$

L'hypothèse c) est à rejeter, car les deux exposants égaux, 3α et 3, sont supérieurs au troisième, $\alpha+1$ ($=2$) et le 2° n'est pas vérifié. Au contraire les hypothèses a) et b) sont acceptables.

a). – On a $\alpha = \frac{1}{2}$, et les termes de moindre degré dans (6) sont :

$$A^3 x^{\frac{3}{2}} - A x^{\frac{3}{2}} ;$$

leur somme devant être nulle, $A^3 - A = 0$; et comme $A \gtrless 0$ par hypothèse, on a

$$A = \pm 1 .$$

Prenons d'abord $A = 1$; il vient, dans (4)

$$y = x^{\frac{1}{2}} (1 + z),$$

z s'annulant, comme on l'a dit, pour $x = 0$; et dans (5) :

$$z^3 + 3z^2 + 2z + x^{\frac{3}{2}} = 0,$$

équation qui, pour $x = 0$, n'a qu'une racine z nulle : la valeur principale de celle-ci est $-\frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}}$, et on obtiendra le développement comme dans le cas I.

On a ainsi, pour une des racines, y_1, de l'équation primitive (3) :

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} + \cdots\right) = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^2 + \cdots$$

En prenant $A = -1$, on aurait un développement analogue pour une autre racine :

$$y_2 = -x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^2 + \cdots\cdots$$

b) On a $\alpha = 2$; les termes de moindre degré en x, dans (6), sont :

$$-A x^3 + x^3 ;$$

d'où $A=1$; les équations (4) et (5) sont alors :

$$y = x^2(1+z)$$

$$x^3z^3+3x^3z^2+(3x^3-1)z+x^3=0,$$

équation qui, pour $x=0$, a une et une seule racine z nulle, dont la valeur principale est x^3, et qu'on développerait comme dans le cas I. On a ainsi, pour la troisième racine, y de la proposée (3) :

$$y_3 = x^2+x^5+\cdots$$

Le procédé s'applique sans difficulté au cas général ; on démontre que si $f(x,y)=0$ est une équation algébrique admettant, pour $x=0$, h racines nulles, cette méthode donne sans ambiguité les développements des h racines, et que les développements sont convergents pour des valeurs suffisamment petites de x.

Chapitre VII.

Chapitre VII.

Maxima et Minima.

107. – Définitions. – On dit qu'une fonction, $f(x)$, d'une seule variable, est maximum pour $x = a$, si l'on peut déterminer un nombre, η, (si petit qu'il soit) tel que l'on ait :

$$f(a+h) - f(a) < 0,$$

pour toutes les valeurs de h comprises entre $-\eta$ et $+\eta$.

Elle sera minimum si, dans les mêmes conditions :

$$f(a+h) - f(a) > 0$$

De même, une fonction de deux variables, $f(x, y)$ sera maximum pour $x = a$, $y = b$, si l'on peut déterminer un nombre η, tel qu'on ait

$$f(a+h,\ b+k) - f(a, b) < 0\ ,$$

pour toutes les valeurs de h et k comprises entre $-\eta$ et $+\eta$.

Il y aura minimum si la différence ci-dessus est positive dans les mêmes conditions.

108. – Fonctions d'une variable. – Si $f(x)$ a une dérivée déterminée pour $x = a$, on aura :

(1) $$f(a+h) - f(a) = h\left[f'(a) + \varepsilon\right],$$

ε tendant vers zéro avec h.

Quand h décroît indéfiniment en valeur absolue, le second membre finit par avoir le signe de $hf'(a)$: le premier membre, si $f'(a)$ n'est pas nul, change donc de signe avec h, c'est-à-dire qu'il n'y a ni maximum ni minimum pour $x = a$.

Donc, lorsque pour $x = a$, $f(x)$ a une dérivée déterminée, il ne peut y avoir maximum ou minimum que si $f'(a) = 0$; lorsque $f(x)$ n'a pas de dérivée déterminée, on ne peut rien dire, c. à. d. qu'il peut y avoir maximum ou minimum. – En d'autres termes.

La fonction $f(x)$ ne peut être maximum ou minimum que pour les valeurs qui rendent sa dérivée indéterminée[1] ou nulle.

Soit a une de ces valeurs, qu'on déterminera par étude de la dérivée; on aura, dans chaque cas particulier à faire une discussion spéciale afin de voir si $f(a+h)-f(a)$ garde un signe constant pour des valeurs de h assez petites positives et négatives.

109. — Cette discussion n'offre aucune difficulté quand on peut appliquer à $f(a+h)$ la formule de Taylor. En ce cas, a est certainement une valeur annulant $f'(x)$, car $f'(x)$ est, par hypothèse, déterminée et continue pour $x=a$; on a alors:

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^2}{2}\left[f''(a)+\varepsilon\right].$$

Pour h assez petit et quelque soit son signe, le second membre a le le signe de $f''(a)$; il y aura donc maximum si $f''(a)<0$ et minimum si $f''(a)>0$!

Si $f''(a)=0$, et plus généralement si $f''(a)=f'''(a)=\ldots=f^n(a)=0$, on aura

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left[f^{n+1}(a)+\varepsilon\right];$$

et le premier membre, pour h assez petit, aura le signe de $h^{n+1}f^{n+1}(a)$. Si donc $n+1$ est impair (n pair), comme ce signe change avec celui de h, il n'y aura ni maximum ni minimum; si $n+1$ est pair (n impair), le signe restera celui de $f^{n+1}(a)$, et il y aura maximum pour $f^{n+1}(a)<0$; minimum pour $f^{n+1}(a)>0$.

110. — Fonctions de plusieurs variables. — Pour que $f(x,y)$ soit maximum ou minimum pour $x=a$, $y=b$, il faut que

$$f(a+h,\ b+k)-f(a,b)$$

conserve un signe constant lorsque h et k sont, en valeur absolue, $<\eta$; donc, en particulier, si l'on fait $k=0$, on voit que

$$f(a+h,b)-f(a,b)$$

doit garder le même signe, c'est-à-dire que $f(x,b)$, considérée comme fonction de x seul, doit être maximum ou minimum pour $x=a$.

Il est donc <u>nécessaire</u>, pour un maximum ou un minimum, que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ soit indéterminée ou nulle pour $x=a$, $y=b$;

---

[1] Parmi les valeurs qui rendent la dérivée indéterminée sont comprises celles qui la rendent infinie.

une démonstration analogue s'applique à l'autre dérivée partielle : de sorte que :

La fonction $f(x, y)$ ne peut être maximum ou minimum que pour les systèmes de valeurs qui rendent ses dérivées partielles indéterminées ou nulles.

Soit a, b un de ces systèmes de valeurs qu'on déterminera par l'étude de la fonction et de ses dérivées ; on aura, dans chaque cas, à faire une discussion, pour voir si $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ garde un signe constant.

111. – Comme plus haut, cette discussion est facile quand on peut appliquer à $f(a+h, b+k)$ la formule de Taylor : en ce cas, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, qui sont déterminées d'après l'hypothèse, s'annulent pour $x=a$, $y=b$, et l'on a

$$f(a+h, b+k) - f(a\ b) = \frac{1}{2}\left[h^2 f''_{a^2} + 2hk f''_{ab} + k^2 f''_{b^2}\right] + \frac{1}{2}\left[h^3 f'''_{a^3}(a+\theta h, b+\theta k) + \dots\right]$$

Si f''_{a^2} et f''_{b^2} sont tous deux différents de zéro, le deuxième terme, pour h et k assez petits, est négligeable devant le premier, car h^3 et h^2k sont négligeables devant $\frac{1}{2} h^2 f''_{a^2}$; et k^3 et k^2h le sont devant $\frac{1}{2} k^2 f''_{b^2}$. Au contraire si $f''_{a^2} = 0$, par exemple, le terme en h^3 peut être comparable aux termes en hk et k^2. Distinguons donc deux cas.

Premier cas. – f''_{a^2} et $f''_{b^2} \gtrless 0$. – On a alors

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2}\left[h^2 f''_{a^2} + 2hk f''_{ab} + k^2 f''_{b^2}\right] + R, \tag{2}$$

et le deuxième membre, puisque R est négligeable devant le terme précédent, a le signe du trinôme $h^2 f''_{a^2} + 2hk f''_{ab} + k^2 f''_{b^2}$, lorsque h et k sont assez petits. Si l'on pose ... $\frac{k}{h} = \rho$, ρ pourra varier de $-\infty$ à $+\infty$ puisque h et k varient, indépendamment l'un de l'autre, de $-\eta$ à $+\eta$, le trinôme s'écrit alors

$$h^2\left[\rho^2 f''_{b^2} + 2\rho f''_{ab} + f''_{a^2}\right]$$

et il ne peut garder un signe constant, quelque soit ρ, que si ses racines sont imaginaires ou égales, c. à. d. si $f''^2_{ab} - f''_{a^2} f''_{b^2} \leqq 0$. Donc :

1° Si $f''^2_{ab} - f''_{a^2} f''_{b^2} > 0$, le trinôme peut changer de signe, et il n'y a ni maximum ni minimum.

2° Si $f''^2_{ab} - f''_{a^2} f''_{b^2} < 0$, le trinôme conserve le signe de son premier terme, f''_{b^2}, et n'est jamais nul. Le second membre de (2) a donc, pour h et k assez petits en valeur absolue, le signe de f''_{b^2}, et par suite :

Si $f''_{b^2} > 0$, minimum ; si $f''_{b^2} < 0$, maximum.

3° Si $f''^2_{ab} - f''_{a^2} f''_{b^2} = 0$, le trinôme en ρ a deux racines égales à ρ_1, en posant pour abréger $\rho_1 = -\frac{f''_{ab}}{f''_{b^2}}$, et l'équation (2) s'écrit, en remplaçant k par $h\rho$ et en développant les deux premiers termes de R :

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2} h^2 f''_{b^2} (\rho - \rho_1)^2 + \frac{1}{6} h^3 \left[f'''_{a^3} + 3\rho f'''_{a^2 b} + \dots \right] + \frac{1}{24} h^4 \left[f^{\text{IV}}_{a^4} + \dots \right] + R'$$

Le second membre, pour h assez petit, a le signe de son premier terme, c. à. d. celui de f''_{b^2}, à moins que $\rho \left(= \frac{k}{h}\right)$ ne soit égal à ρ_1 : pour qu'il y ait maximum ou minimum, il faut donc que, pour $\rho = \rho_1$, le second membre ait encore le signe de f''_{b^2}. Or si l'on fait $\rho = \rho_1$, ce second membre devient :

$$(3) \qquad \frac{1}{6} h^3 \left[f'''_{a^3} + 3\rho_1 f'''_{a^2 b} + 3\rho_1^2 f'''_{ab^2} + \rho_1^3 f'''_{b^3} \right] + h^4 \left[f^{\text{IV}}_{a^4} + \dots + \rho_1^4 f^{\text{IV}}_{b^4} \right] + \dots$$

et le signe ne peut être constant, lorsque h varie de $-\eta$ à $+\eta$, que si le coefficient de h^3 est nul. On doit donc avoir, pour qu'il puisse y avoir maximum ou minimum :

$$(4) \qquad f'''_{a^3} + 3\rho_1 f'''_{a^2 b} + 3\rho_1^2 f'''_{ab^2} + \rho_1^3 f'''_{b^3} = 0$$

Cette condition étant remplie, le signe de la quantité (3) sera celui de $f^{\text{IV}}_{a^4} + \dots + f^{\text{IV}}_{b^4} \rho_1^4$, et il faudra que ce signe soit celui de f''_{b^2}, c. à. d.

$$(5) \qquad f''_{b^2} \left[f^{\text{IV}}_{a^4} + 4\rho_1 f^{\text{IV}}_{a^3 b} + \dots + \rho_1^4 f^{\text{IV}}_{b^4} \right] > 0$$

Si les conditions (4) et (5) sont vérifiées, il y a maximum pour $f''_{b^2} < 0$; minimum pour $f''_{b^2} > 0$ (1).

Deuxième cas. — f''_{a^2}, par exemple, est nul. — On a, en faisant $\frac{k}{h} = \rho$:

(1) Toutefois, même en ce cas, il peut n'y avoir ni maximum ni minimum comme le montrerait une étude approfondie.

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = \frac{h^2}{2}\rho\left[\rho f''_{b^2} + 2f''_{ab}\right] + \frac{h^3}{6}\left[f'''_{a^3} + \cdots\right] + R''$$

Si f''_{ab} n'est pas nul, on voit que, pour h assez petit et fixe, le second membre changera de signe avec ρ (car le facteur $\rho f''_{b^2} + 2f''_{ab}$ a le même signe pour $\rho = \varepsilon$ et $\rho = -\varepsilon$ lorsque $f''_{ab} \gtrless 0$); il n'y a donc ni maximum ni minimum (. On a en ce cas $f''^2_{ab} - f''_{a^2} f''_{b^2} > 0$).

Si $f''_{ab} = 0$, (ce qui entraîne $f''^2_{ab} - f''_{a^2} f''_{b^2} = 0$) on aura :

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = \frac{k^2}{2} f''_{b^2} + \frac{1}{6}\left[h^3 f'''_{a^3} + \cdots\cdots\right] + R',$$

et il faudra discuter le signe du second membre, pour h et k très petits. S'il y a, par exemple, un terme en h^3 il n'y a ni maximum ni minimum, car le second membre, où l'on fait $k = 0$, a pour valeur principale $\frac{1}{6} h^3 f'''_{a^3}$, et change de signe avec h.

Toute cette discussion se résume en un seul tableau :

$f''^2_{ab} - f''_{a^2} f''_{b^2} > 0$ .... ni maximum ni minimum.

$f''^2_{ab} - f''_{a^2} f''_{b^2} < 0$ .... maximum si $f''_{b^2} < 0$; minimum si $f''_{b^2} > 0$

$f''^2_{ab} - f''_{a^2} f''_{b^2} = 0$ .... doute ; une discussion spéciale est nécessaire.

112. — Remarque. — Au lieu de dire que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ s'annulent pour les valeurs qui correspondent au maximum ou au minimum, on peut dire que la différentielle totale :

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

s'annule, quels que soient dx et dy.

113. — Maxima et minima relatifs. — Soit à trouver les maxima et les minima d'une fonction de quatre variables

$$f(x, y, z, u);$$

ces quatre variables étant liées par deux relations :

$$\varphi(x, y, z, u) = 0$$
$$\psi(x, y, z, u) = 0.$$

Il y a, d'après cela, $4-2 = 2$ variables indépendantes, x et y par exemple; laissant de côté les cas exceptionnels d'indétermination, on trouvera les maxima et minima en écrivant que la différentielle totale, df, est nulle, quels que soient dx et dy. Donc:

(6) $$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial u} du = 0,$$

dz et du étant liés à dx et dy par les relations:

(7) $$\frac{d\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial u} du = 0$$

(8) $$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz + \frac{\partial \psi}{\partial u} du = 0$$

Il faut donc tirer dz et du de (7) et (8), porter dans (6), et écrire que les coefficients de dx et dy sont nuls dans le résultat: cela revient à éliminer dz et du entre (6), (7) et (8), et à écrire que, dans le résultat, dx et dy ont disparu. Pour effectuer cette élimination, multiplions (7) et (8) par des facteurs indéterminés, λ et μ, puis ajoutons-les à (6); il viendra:

(9) $$\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x}\right] dx + \left[\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y}\right] dy$$
$$+ \left[\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z}\right] dz + \left[\frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial u}\right] du = 0.$$

L'élimination de dz et du sera effectuée si nous choisissons λ et μ de manière que:

(10) $$\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \; ; \quad \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial u} = 0$$

Ecrivons alors que dans (9) les coefficients de dx et dy sont nuls:

(11) $$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \; ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

Les équations (10), (11), jointes à $\varphi = 0$, $\psi = 0$, (soit en tout six équations) donneront les valeurs de λ, μ et celles de x, y, z, u qui peuvent correspondre au maximum ou au minimum de f: D'où la règle suivante:

Règle. — Pour trouver les maxima et les minima d'une fonction, f, de n variables, liées par h relations $\varphi_1 = 0 ; \dots \varphi_h = 0$, on annulera les dérivées partielles par rapport aux n variables, de la fonction

$$f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_h \varphi_h .$$

les λ_i étant regardés comme constants. On obtiendra ainsi n équations, qui, jointes aux h équations $\varphi = 0$, donneront (avec les valeurs des h quantités λ_i) les valeurs des n variables qui correspondent au maximum ou au minimum de f.

Applications.

114. — Axes d'une section centrale d'une quadrique. — Soit la quadrique, ayant pour centre l'origine :

$$(12) \qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 1 = 0 ;$$

les axes de la section par le plan

$$(13) \qquad lx + my + nz = 0$$

sont les maxima et les minima de la distance du centre à un point de la section. On a donc à déterminer le maximum et le minimum de $x^2 + y^2 + z^2$; x, y, z étant liés par (12) et (13). Appliquons la règle ci-dessus, nous avons :

$$(14) \qquad \begin{aligned} x + \lambda l + \mu (Ax + B''y + B'z) &= 0 \\ y + \lambda m + \mu (B''x + A'y + Bz) &= 0 \\ z + \lambda n + \mu (B'x + By + A''z) &= 0 \end{aligned}$$

équations qui, jointes à (12) et (13), déterminent λ, μ et les sommets x, y, z de la section. Pour avoir les longueurs des axes eux-mêmes, il faut joindre à ces équations la relation

$$(15) \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

et éliminer λ, μ, x, y, z entre (12), (13), (14) et (15).

Le calcul se fait simplement, si on multiplie la première équation (14) par x, la seconde par y, la troisième par z, et si on

ajoute membre à membre ; il vient en effet, en tenant compte de (13) et (12) :

$$r^2 - \mu = 0$$

On a alors, par (14) et (13) :

$$\begin{aligned} x(1+Ar^2) &+ y.B''r^2 + z.B'r^2 + \lambda l = 0 \\ x.B''r^2 &+ y(1+A'r^2) + z.Br^2 + \lambda m = 0 \\ x.B'r^2 &+ y.Br^2 + z(1-A''r^2) + \lambda n = 0 \\ x.l &+ y.m + z.n = 0 \end{aligned}$$

d'où en éliminant x, y, z et λ :

$$\begin{vmatrix} 1+Ar^2 & B''r^2 & B'r^2 & l \\ B''r^2 & 1+A'r^2 & Br^2 & m \\ B'r^2 & Br^2 & 1+A''r^2 & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix} = 0$$

équation du second degré en r^2, qui donne les carrés des deux axes de la section.

115. – Axes de la quadrique

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 1 = 0.$$

On a à chercher le maximum ou le minimum de $x^2+y^2+z^2$, x, y, z étant liés par l'équation précédente. Donc :

$$(16) \quad \begin{aligned} x + \lambda\,(Ax + B''y + B'z) &= 0 \\ y + \lambda\,(B''x + A'y + Bz) &= 0 \\ z + \lambda\,(B'x + By + A''z) &= 0 \end{aligned}$$

en y joignant

$$x^2 + y^2 + z = r^2,$$

et éliminant x, y, z et λ entre ces cinq équations on aura l'équation aux carrés (r^2) des axes. Multiplions respectivement par x, y, z les trois équations (16) et ajoutons ; il vient, en tenant compte de l'équation de la quadrique :

$$r^2 - \lambda = 0.$$

Les équations (16) s'écrivent alors :

$$x(1+Ar^2)+y.B''r^2+z.B'r^2=0$$
$$x.B''r^2 \quad +y(1+A'r^2)+z.Br^2=0$$
$$x.B'r^2 \quad +y.Br^2+z(1+A''r^2)=0 \quad ;$$

d'où l'équation cherchée :

$$\begin{vmatrix} A+Ar^2 & B''r^2 & B'r^2 \\ B''r^2 & 1+A'r^2 & Br^2 \\ B'r^2 & Br^2 & 1+A''r^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Elle est du troisième degré en r^2, comme on devait s'y attendre.

116. — Méthode géométrique. — La géométrie permet souvent de trouver directement conditions des maxima et des minima. En effet, si on a par exemple à chercher le maximum ou le minimum d'une fonction $f(x,y,z)$ de trois variables indépendantes, on a à écrire $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, $\frac{\partial f}{\partial z}=0$. Or $\frac{\partial f}{\partial x}dx$ est la valeur principale de l'accroissement de f quand, y et z restant fixes, on fait varier x; et on peut faire la même observation sur $\frac{\partial f}{\partial y}dy$ et $\frac{\partial f}{\partial z}dz$: si donc la géométrie permet d'évaluer directement ces trois valeurs principales, on n'aura qu'à exprimer qu'elles sont nulles pour obtenir les conditions du maximum ou du minimum.

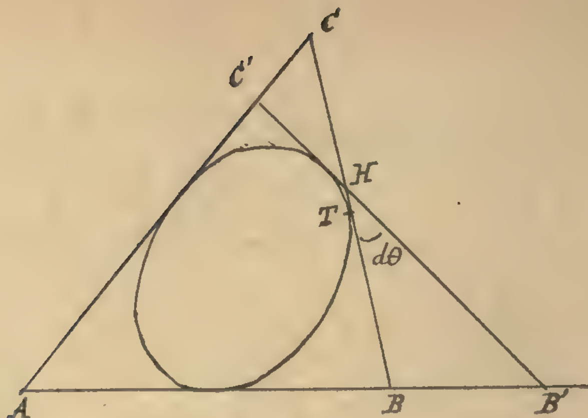
D'autres fois, on pourra évaluer géométriquement la différentielle totale, df, pour des accroissements simultanées quelconques des variables indépendantes, et on exprimera qu'elle est nulle quels que soient ces accroissements.

Voici des exemples.

1° Triangle d'aire minimum circonscrit à une courbe donnée. Un triangle circonscrit à une courbe dépend de 3 variables indépendantes, à savoir les paramètres qui déterminent chacune des 3 tangentes qui le constituent (par exemple les angles de ces tangentes avec une droite fixe).

Pour écrire que l'aire est maximum ou minimum, il faut donc exprimer que la valeur principale de son accroissement est nulle quand, deux quelconques des côtés du triangle restant fixes, le troisième varie infiniment peu.

Par exemple, ABC étant un triangle circonscrit à la courbe, laissons fixes les côtés AB et AC, et faisons varier BC en $B'C'$:



l'accroissement de l'aire du triangle est $BHB' - CHC'$; or

$$BHB' - CHC' = \frac{1}{2} \sin d\theta \left[HB.HB' - HC.HC'\right]$$

à la limite, quand $B'C'$ tend vers BC, le point H tend vers le point de contact, T, de la tangente BC; HB' et HC' tendent vers TB et TC, de sorte que :

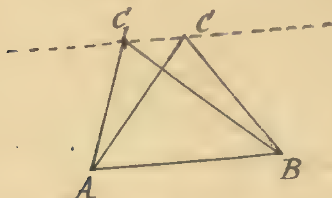
$$\text{valeur pp}^{\text{ale}} \text{ de } \left(BHB' - CHC'\right) = \frac{1}{2}\, d\theta \left[\overline{TB}^2 - \overline{TC}^2\right],$$

et pour qu'il puisse y avoir maximum ou minimum il faut que $TB = TC$, c'est-à-dire que T soit le milieu de BC. Ainsi :

Pour le triangle d'aire maximum ou minimum à une courbe fermée, les points de contact sont au milieu des côtés.

D'ailleurs il y a en ce cas un <u>minimum</u>, comme on le vérifierait par une discussion plus approfondie.

2° Parmi les triangles qui ont leurs sommets respectivement situés sur trois droites données de l'espace, quel est celui dont l'aire (ou le périmètre) est minimum. – Soit ABC un de ces triangles; pour trouver les conditions du maximum ou du minimum de l'aire, laissons les sommets A et B fixes, et faisons varier infiniment peu le sommet C, en C'.



Soient : CC_1 la projection sur le plan ABC, de la droite qui décrit le sommet C; C_1 la projection du point C', qui est sur cette droite infiniment voisin de C : le nouveau triangle, ABC', se projette en ABC_1. Or, si CC' est l'infiniment petit principal, l'angle, θ des plans ABC et ABC' est évidemment du premier ordre; la relation

$$\text{aire } ABC_1 = \cos\theta . \text{ aire } ABC' = ABC'\left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \dots\right)$$

montre alors que les aires ABC' et ABC ne diffèrent que d'un infiniment petit du second ordre, c'est-à-dire que l'accroissement de l'aire du triangle, $ABC' - ABC$, est égal à $ABC_1 - ABC$, au second

ordre près. Pour qu'il y ait maximum ou minimum, il faut donc que $ABC_1 = ABC$, c'est-à-dire puisque, ces deux triangles ont même base, AB, qu'ils aient même hauteur, ou que CC_1 soit parallèle à AB. En d'autres termes.

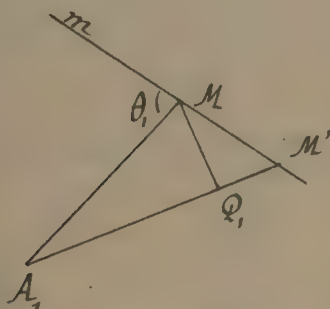
Le maximum ou le minimum de l'aire correspond au cas où les hauteurs du triangle sont respectivement normales aux droites décrites par les sommets.

On verrait de même que :

Le maximum ou le minimum du périmètre correspond au cas où les bissectrices du triangle sont respectivement normales aux droites décrites par les sommets.

On vérifierait que dans ces cas il y a un <u>minimum</u>.

3° Trouver sur une surface donnée un point, M, dont la somme des carrés des distances à n points donnés, $A_1, A_2, \ldots A_n$, soit minimum.



Soient : M le point cherché, M' un point infiniment voisin <u>quelconque</u> situé sur la surface; il faut écrire que la différentielle de la somme $\sum MA_i^2$ est nulle, quand on passe de M à M'.

Or, si MM' est l'infiniment petit principal, l'angle MA_1M' est évidemment du premier ordre ; si donc on mène MQ_1 normal à A_1M', on aura $A_1M = A_1Q_1$, au second ordre près (n° 3), de sorte que la différentielle de A_1M, quand on passe de M à M', sera

$$d(A_1M) = Q_1M'$$

Si θ_1 est l'angle A_1Mm, on a, pour valeur principale de Q_1M' :

$$Q_1M' = MM' \cos\theta_1$$

d'où

$$d(A_1M) = MM' \cos\theta_1$$

La différentielle de la somme $\sum MA_i^2$ sera ainsi :

$$2\sum MA_i \cdot d(A_iM) = 2MM' \sum MA_i \cos\theta_i \;,$$

et comme elle est nulle pour le maximum ou le minimum on a :

$$MA_1 \cos\theta_1 + MA_2 \cos\theta_2 + \cdots = 0$$

ce qui exprime que les projections des vecteurs MA_1, MA_2, ... sur une direction quelconque, Mm, du plan tangent à la surface en M, ont une somme nulle. La somme de ces projections étant d'ailleurs égale à la projection du vecteur résultant, il faut, pour le maximum ou le minimum que le vecteur résultant soit normal à la surface en M. Ainsi :

Le maximum ou le minimum correspond au cas où la résultante des vecteurs MA_1, MA_2, ... est normale à la surface au point M.

C'est d'ailleurs un minimum.

Si la surface est un plan, il en résulte aisément que le point M est le centre de gravité des projections des points A_1, A_2, ... sur ce plan.

117. — Nous terminerons ces applications par un exemple où le minimum peut correspondre aux valeurs qui rendent les dérivées partielles indéterminées.

Problème. — Trouver, dans le plan d'un triangle $A_1 A_2 A_3$, un point M dont la somme des distances aux trois sommets soit minimum.

Si x, y sont les coordonnées de M ; a_i, b_i celles de A_i, il faut chercher le minimum de la fonction de deux variables :

$$f(x,y) = \sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2} + \sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2} + \sqrt{(x-a_3)^2+(y-b_3)^2}$$

Annulons les dérivées partielles :

$$(3) \qquad \begin{aligned} -\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{a_1-x}{\rho_1} + \frac{a_2-x}{\rho_2} + \frac{a_3-x}{\rho_3} = 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{b_1-y}{\rho_1} + \frac{b_2-y}{\rho_2} + \frac{b_3-y}{\rho_3} = 0 \ ; \end{aligned}$$

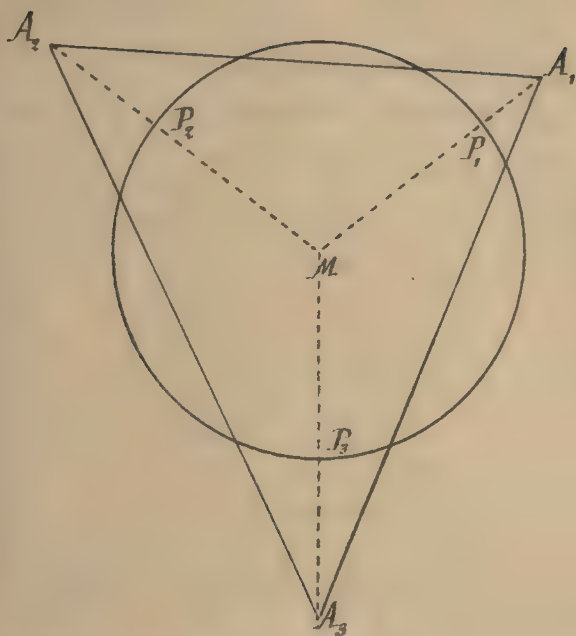
en posant, pour abréger, $\rho_1 = \sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2}$.

Les équations (3) donnent les coordonnées de M ; on peut les interpréter géométriquement.

En effet, portons sur le rayon MA_i, à partir de M et en allant vers A_i, une longueur, MP_i égale à l'unité : les projections de MP_i sur les axes sont évidemment $\frac{a_i-x}{\rho_i}$; $\frac{b_i-y}{\rho_i}$; d'ailleurs si α_i, β_i sont les coordonnées de P_i, ces projections sont aussi $\alpha_i - x$, $\beta_i - y$.

Les équations (3) peuvent donc s'écrire :

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-3x=0 \ ; \qquad \beta_1+\beta_2+\beta_3-3y=0 \ ,$$



c'est-à-dire que M est le centre de gravité du triangle $P_1 P_2 P_3$. Or le centre, M, d'un cercle ne peut être le centre de gravité d'un triangle inscrit que si celui-ci est équilatéral: car les médianes doivent passer par le centre et sont dès lors perpendiculaires aux côtés opposés. Donc $P_1 P_2 P_3$ est équilatéral, c'est-à-dire que les trois angles (en M) sous lesquels on voit de M les trois côtés du triangle primitif, $A_1 A_2 A_3$, sont égaux à $120°$.

D'après cela, le point M est à l'intersection de deux arcs, capables chacun d'un angle de $120°$, décrits sur $A_1 A_2$ et $A_1 A_3$, et l'on voit sans difficulté qu'il n'est réel que si le triangle n'a pas d'angle supérieur à $120°$.

Si le point M est réel, il correspond à un minimum; car on a, d'après les expressions (3) de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{(y-b_1)^2}{\rho_1^3} + \frac{(y-b_2)^2}{\rho_1^3} + \frac{(y-b_3)^2}{\rho_1^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{(x-a_1)^2}{\rho_1^3} + \cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{(x-a_1)(y-b_1)}{\rho_1^3} - \cdots\cdots$$

et l'expression $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est de la forme :

$$(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu')^2 - (\lambda^2+\mu^2+\nu^2)(\lambda'^2+\mu'^2+\nu'^2) = -(\lambda\mu'-\lambda'\mu)^2 - (\lambda\nu'-\lambda'\nu)^2 - (\mu\nu'-\mu'\nu)^2;$$

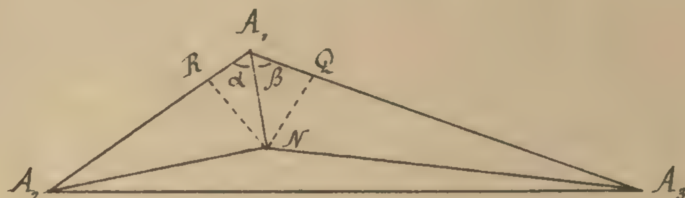
elle est donc toujours négative, et comme $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est positif, il y a bien minimum (N° 111).

Si le point M, déterminé comme ci-dessus, n'est pas réel, c'est-à-dire si le triangle $A_1 A_2 A_3$ a un angle supérieur à $120°$, il semble qu'il n'y ait jamais de minimum.

Cette conclusion serait fausse : on n'a pas trouvé de minimum (réel) en annulant $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, mais il faut voir si le minimum

ne correspondrait pas aux valeurs qui rendent $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ indéterminées. Or d'après (3), ces deux dérivées deviennent indéterminées pour $x = a_i$, $y = b_i$, c'est-à-dire pour les sommets du triangle proposé : il est donc possible qu'un de ces sommets donne un minimum.

On peut en effet montrer géométriquement que, si l'angle A_1, par exemple, est $> 120°$, le sommet A_1 correspond bien à un minimum.



Soit N un point du plan (on verra que la démonstration s'applique à toutes les positions possibles de N) ; je dis que $NA_1 + NA_2 + NA_3 > A_1A_2 + A_1A_3$. Pour le voir, abaissons de N des perpendiculaires sur les côtés de l'angle A_1 ; on a :

$$NA_2 > A_2R \; ; \quad NA_3 > A_3Q \, ,$$

et si j'établis que $NA_1 > A_1R + A_1Q$, la proposition sera évidemment démontrée. Or :

$$A_1R = NA_1 \cos\alpha \; ; \qquad A_1Q = NA_1 \cos\beta \; ; \; \ldots\ldots\ldots (\alpha + \beta > 120°)$$

d'où

$$A_1R + A_1Q = NA_1 \, . \, 2\cos\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

Puisque $\alpha + \beta$ est compris entre 120° et 180°, $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ est compris entre $\cos 60° = \frac{1}{2}$ et $\cos 90° = 0$; il est donc $< \frac{1}{2}$ et comme $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ est < 1, on a bien :

$$A_1R + A_1Q < NA_1$$

C. Q. F. D.



Deuxième partie.

Principes du Calcul Intégral.

Chapitre I.

Intégrales indéfinies

I. Procédés d'intégration.

118. – La première question que traite le Calcul intégral est la suivante :

Trouver les fonctions qui ont pour dérivée une fonction donnée, $f(x)$.

Nous établirons dans le chapitre suivant que si $f(x)$ est continue entre $x = a$ et $x = b$, il existe une fonction, $F(x)$, ayant pour dérivée $f(x)$ pour toutes les valeurs de x comprises dans cet intervalle : mais il n'y a <u>aucune méthode générale</u> pour trouver la fonction $F(x)$. De plus, si $f(x)$ est une combinaison de fonctions élémentaires (polynômes entiers, fonctions algébriques, fonctions circulaires et exponentielles logarithmes, arc sin ... etc) $F(x)$ ne sera une fonction de même forme que dans des cas très particuliers, de sorte que le Calcul intégral conduit, dès le début, à des fonctions nouvelles.

Il y a une infinité de fonctions, $F(x)$, ayant pour dérivée $f(x)$:

car il est clair que $F(x)+C$, où C est une constante arbitraire, a la même dérivée que $F(x)$. Réciproquement, si $\Phi(x)$ et $F(x)$ ont même dérivée, la fonction $\Phi(x) - F(x)$, ayant une dérivée nulle, sera une constante.

Les fonctions, en nombre infini, qui ont pour dérivée $f(x)$ se nomment fonctions primitives de $f(x)$; on peut dire aussi qu'elles ont pour différentielle $f(x)\,dx$, et on les appelle intégrales de la différentielle $f(x)\,dx$, en les représentant par la notation

$$\int f(x)\,dx,$$

dont l'origine sera expliquée quand on traitera des intégrales indéfinies.

119. — Les résultats obtenus dans la théorie des dérivées donnent immédiatement les intégrales de plusieurs différentielles simples; le tableau suivant indique les principales de ces formules.

$$\left.\begin{aligned}\int (x-a)^m\,dx &= \frac{1}{(m+1)}(x-a)^{m+1}\\ \int \frac{dx}{(x-a)^m} &= -\frac{1}{m-1}\,\frac{1}{(x-a)^{m-1}}\end{aligned}\right\}\text{formules équivalentes}$$

$$\int \frac{dx}{x-a} = \log(x-a)$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc sin}\,\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{h+x^2}} = \log\left[x+\sqrt{h+x^2}\right]$$

$$\int e^{mx}\,dx = \frac{1}{m}e^{mx}$$

$$\int \sin mx.dx = -\frac{1}{m}\cos mx$$

$$\int \cos mx\,dx = \frac{1}{m}\sin mx$$

$$\int \text{tg}\,mx\,dx = -\frac{1}{m}\log\cos mx.$$

120. — On peut indiquer trois procédés, à l'aide desquels on

arrive quelquefois à intégrer une différentielle donnée.

1° Décomposition en éléments simples. — Si l'on a :

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x) + \cdots\cdots;$$

il est clair que

$$\int f(x)\,dx = \int \varphi(x)\,dx + \int \psi(x)\,dx + \cdots\cdots;$$

car la dérivée d'une somme est la somme des dérivées des termes.

Si l'on peut effectuer la décomposition de $f(x)$ en somme de manière que les intégrales $\int \varphi(x)\,dx$, $\int \psi(x)\,dx$, ... soient connues, on saura intégrer $\int f(x)\,dx$.

Exemple : $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x.$

2° Intégration par parties. — On part de la formule :

$$d(uv) = uv'\,dx + vu'\,dx;$$

d'où l'on déduit, en intégrant les deux membres :

$$\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx.$$

Si donc on a à intégrer $f(x)\,dx$, on essaiera de mettre $f(x)$ sous la forme d'un produit de deux facteurs, u, v', dont le second soit la dérivée d'une fonction connue, et on ramènera ainsi le calcul de $\int f(x)\,dx$ à celui de $\int vu'\,dx$, qui pourra être plus simple.

Exemple. — Dans $\int x \log x\,dx$, $x\,(= v')$ est la dérivée de $\frac{1}{2}x^2 = v$; donc

$$\int \underbrace{\log x}_{u} \cdot \underbrace{x}_{v'}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \log x - \int \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{v} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{x^2}{4}.$$

3° Changement de variable. — C'est le plus important des procédés d'intégration. Soit à calculer $I = \int f(x)\,dx$; posons $x = \varphi(t)$.

On aura :

$$dx = \varphi'(t)\,dt$$

Cela posé, comme on a par définition :

$$dI = f(x)\,dx$$

on en déduit :

$$dI = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt;$$

c'est-à-dire que la dérivée de I par rapport à t est $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. Donc :

$$I = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$$

En d'autres termes, dans l'intégrale proposée, on remplace x et dx par leurs valeurs en fonction de t et de dt, et on est ramené à calculer une intégrale, en t, qui peut être plus simple que l'ancienne.
Si on peut la calculer soit $I = F(t)$; on obtiendra I en fonction de x en remplaçant t par sa valeur tirée de $x = \varphi(t)$.

Exemple. — Dans $\int \arcsin x\,dx$, posons

$$\arcsin x = t\,; \quad \text{ou} \quad x = \sin t\,;$$

l'intégrale devient :

$$\int t.\cos t\,dt\,;$$

et en intégrant par parties, en regardant $\cos t$ comme la dérivée de $\sin t$:

$$\int t\cos t\,dt = t\sin t - \int \sin t\,dt = t\sin t + \cos t.$$

L'intégrale primitive s'obtient en remplaçant dans cette expression t par $\arcsin x$; $\sin t$ par x ; $\cos t$ par $\sqrt{1-x^2}$. Donc :

$$\int \arcsin x.\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

121. — On va maintenant appliquer les procédés précédents aux types de fonctions que l'on sait intégrer ; ces types, en petit nombre, sont les suivants.

Fonctions algébriques.

1° Fonctions rationnelles : $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, (P et Q polynômes en x).

2° Fonctions rationnelles de x et de $\sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

3° Fonctions rationnelles de x et de $\sqrt{ax^2+2bx+c}$.

4° Fonctions rationnelles de x et de y, lorsque y est lié à x par une équation $\varphi(x,y) = 0$, représentant une courbe unicursale.

Fonctions transcendantes.

1° Fonctions rationnelles de $\sin x$ et $\cos x$.

2° Fonctions rationnelles de e^{mx}

3° Polynômes entiers en x, e^{ax}, e^{bx}, ... $\sin\alpha x, \cos\alpha x, \sin\beta x, \cos\beta x, \ldots$

4° Fonctions : $f(x, \log x)$; $f(x, \arcsin x)$; où f est un polynôme entier.

II. — Fonctions algébriques que l'on sait intégrer.

1° Fonctions rationnelles de x.

---

122. — Pour trouver $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, où P et Q sont des polynômes en x, il suffit de décomposer la fraction rationnelle, $\frac{P(x)}{Q(x)}$, en fractions simples, suivant la méthode qui a été indiquée dans le cours de spéciales, et sur laquelle on va revenir.

122bis. — Décomposition de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fractions simples. — Si le numérateur, $P(x)$, est de degré égal ou supérieur au dénominateur, $Q(x)$, on commencera par faire la division de $P(x)$ par $Q(x)$, suivant les puissances décroissantes de x ; on arrivera ainsi à un quotient $P_1(x)$ et à un reste, $R(x)$, tels qu'on ait identiquement :

$$P(x) = P_1(x)\,Q(x) + R(x),$$

$R(x)$ étant de degré inférieur à $Q(x)$. D'où :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

et

$$\int \frac{P}{Q}\,dx = \int P_1\,dx + \int \frac{R}{Q}\,dx.$$

$P_1(x)$ étant un polynôme, $\int P_1(x)\,dx$ s'obtiendra de suite, et on sera ramené

à intégrer une fonction rationnelle, $\frac{R}{Q}$, où le numérateur est de degré inférieur au dénominateur.

On résoudra l'équation $Q = 0$: soient $a, b, \ldots$ ses racines, avec les ordres $\alpha, \beta, \ldots$ de multiplicité. On peut supposer qu'aucune d'elles n'annule R ; car si Q et R avaient un facteur commun, $(x-a)^p$, on le supprimerait.

Cela posé, on sait que $\frac{R(x)}{Q(x)}$ peut se mettre sous la forme :

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots\cdots + \frac{A_1}{x-a}$$

$$+ \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \cdots\cdots\cdots + \frac{B_1}{x-b}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

les $A, B, \ldots$ étant des constantes.

Tout revient à déterminer ces constantes : nous indiquerons à cet effet une et une seule méthode.

Pour trouver $A_\alpha, A_{\alpha-1}, \ldots\ldots A_1$, posons $x - a = h$; on a :

$$\frac{R(a+h)}{Q(a+h)} = \frac{A_\alpha}{h^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{h^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_1}{h} + \frac{B_\beta}{(a-b+h)^\beta} + \cdots\cdots$$

Développons les deux membres suivant les puissances croissantes de h. Au second membre, les termes $\frac{A_\alpha}{h^\alpha}, \ldots \frac{A_1}{h}$, sont tout développés ; le terme $\frac{B_\beta}{(a-b+h)^\beta}$ (et les suivants) donnera : $\frac{B_\beta}{(a-b)^\beta} + h B'_\beta + h^2 B''_\beta + \cdots$, c.à.d. seulement des puissances positives de h. Si donc on développe le premier membre, $\frac{R(a+h)}{Q(a+h)}$, suivant les puissances croissantes de h, les coefficients des termes en $\frac{1}{h^\alpha}, \frac{1}{h^{\alpha-1}}, \ldots\ldots \frac{1}{h}$ seront égaux à $A_\alpha, A_{\alpha-1}, \ldots A_1$.

On est donc ramené à chercher la partie infinie du développement de $\frac{R(a+h)}{Q(a+h)}$; or $R(x)$ ne s'annulant pas pour $x = a$, $R(a)$ n'est pas nul, et on a :

$$R(a+h) = \lambda_0 + \lambda_1 h + \lambda_2 h^2 + \cdots\cdots \qquad (\lambda_0 = R(a) \gtrless 0)$$

$Q(x)$ s'annule pour $x = a$, ainsi que ses $\alpha - 1$ premières dérivées, puisque a est racine d'ordre α ; donc :

$$Q(a+h) = h^{\alpha}\left[\mu_0 + \mu_1 h + \dots\dots\right]$$

D'où :

$$\frac{R(a+h)}{Q(a+h)} = \frac{1}{h^{\alpha}} \; \frac{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 h^2 + \dots}{\mu_0 + \mu_1 h + \mu_2 h^2 + \dots}$$

Effectuons la division de $\lambda_0 + \lambda_1 h + \dots$ par $\mu_0 + \mu_1 h + \dots$, suivant les puissances croissantes de h, en nous arrêtant dans le quotient au terme en $h^{\alpha-1}$; nous aurons :

$$\frac{R(a+h)}{Q(a+h)} = \frac{a_{\alpha} + a_{\alpha-1} h + \dots + a_1 h^{\alpha-1} + \dots}{h^{\alpha}} = \frac{a_{\alpha}}{h^{\alpha}} + \frac{a_{\alpha-1}}{h^{\alpha-1}} + \dots + \frac{a_1}{h} + \dots$$

et $a_{\alpha}, a_{\alpha-1}, \dots a_1$ seront, comme on l'a dit, les coefficients cherchés, $A_{\alpha}, A_{\alpha-1}, \dots A_1$. (C'est le calcul déjà rencontré au N° 101).
On calculera de même $B_{\beta}, B_{\beta-1}, \dots$ etc.

123. _ Remarques. _ 1° Si a est racine simple ($\alpha = 1$) il n'y a qu'un seul coefficient A_{α} ($= A_1$) ; sa valeur doit être retenue. On a :

$$R(a+h) = R(a) + h R'(a) + \dots\dots$$
$$Q(a+h) = h\left[Q'(a) + \frac{h}{2} Q''(a) + \dots\right] \dots (\text{car } Q(a) = 0)$$

d'où

$$\frac{R(a+h)}{Q(a+h)} = \frac{1}{h} \; \frac{R(a) + \dots}{Q'(a) + \dots}$$

Le premier terme de la division de $R(a) + \dots$ par $Q'(a) + \dots$ est évidemment $\frac{R(a)}{Q'(a)}$. Donc :

$$A_1 = \frac{R(a)}{Q'(a)}$$

2° Il est inutile de calculer, dans $R(a+h)$ et dans $Q(a+h)$, les coefficients de <u>toutes</u> les puissances de h. En effet dans l'expression ci-dessus :

$$\frac{1}{h^{\alpha}}\left[\frac{\lambda_0 + \lambda_1 h + \dots}{\mu_0 + \mu_1 h + \dots}\right]$$

le quotient des deux polynômes entre crochets ne doit être poussé que jusqu'au terme en $h^{\alpha-1}$; donc (N° 101), il suffit que ces deux polynômes soit développés jusqu'aux termes en $h^{\alpha-1}$, inclus ; c'est-à-dire que, <u>pour une racine a d'ordre α, il suffira de prendre les α premiers termes</u> dans $R(a+h)$ et dans $Q(a+h)$.

Par exemple pour une racine double, ($\alpha = 2$) il suffira de prendre :

$$\frac{R(a)+h\,R'(a)}{h^2\left[\frac{Q''(a)}{2}+h\,\frac{Q'''(a)}{6}\right]}$$

124. — Intégration. — La décomposition une fois effectuée, l'intégration est immédiate. Si :

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\cdots+\frac{A_1}{x-a}+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\cdots+\frac{B_1}{x-b}+\cdots$$

On aura :

$$\int\frac{R(x)}{Q(x)}dx=-\frac{1}{\alpha-1}\,\frac{A_\alpha}{(x-a)^{\alpha-1}}-\cdots-\frac{A_2}{(x-a)}+A_1\log(x-a)$$

$$-\frac{1}{\beta-1}\,\frac{B_\beta}{(x-b)^{\beta-1}}-\cdots-\frac{B_2}{(x-b)}+B_1\log(x-b)$$

$$+\cdots\cdots\cdots$$

L'intégrale se compose donc d'une partie transcendante :

$$A_1\log(x-a)+B_1\log(x-b)+\cdots\cdots$$

et d'une partie rationnelle :

$$-\frac{1}{\alpha-1}\,\frac{A_\alpha}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots\cdots-\frac{A_2}{x-a}-\frac{1}{\beta-1}\,\frac{B_\beta}{(x-b)^{\beta-1}}-\cdots\cdots,$$

qui se présente sous forme d'une somme de fractions simples.

125. — Cas des racines imaginaires. — La méthode du N°123 s'applique, sans aucune modification, au cas des racines imaginaires ; toutefois, au moment de faire l'intégration il est utile de prendre une précaution, afin de ne pas trouver des logarithmes portant sur des quantités imaginaires.

Soient $a=\lambda+\mu i$, une racine imaginaire ; $b=\lambda-\mu i$ la racine conjuguée ; elles sont de même ordre, c'est-à-dire que $\alpha=\beta$ et il est clair que A_α, $A_{\alpha-1}$, ... A_1 et B_α, $B_{\alpha-1}$, ... B_1 sont respectivement conjugués.

On aura, comme plus haut :

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\cdots\cdots+\frac{A_1}{x-a}$$

$$+\frac{B_\alpha}{(x-b)^\alpha}+\cdots\cdots+\frac{B_1}{x-b}+\cdots$$

La précaution à prendre est de réunir les deux derniers termes : $\frac{A_1}{x-a}$ et $\frac{B_1}{x-b}$ avant d'intégrer :

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{B_1}{x-b}=\frac{p+qi}{x-\lambda-\mu i}+\frac{p-qi}{x-\lambda+\mu i}=\frac{rx+s}{(x-\lambda)^2+\mu^2},$$

r et s étant réels. On aura alors à calculer :

$$\int\frac{rx+s}{(x-\lambda)^2+\mu^2}dx=\int\frac{r(x-\lambda)+s+r\lambda}{(x-\lambda)^2+\mu^2}dx$$

$$=\frac{r}{2}\int\frac{2(x-\lambda)}{(x-\lambda)^2+\mu^2}dx+(s+r\lambda)\int\frac{dx}{(x-\lambda)^2+\mu^2}$$

au second membre, la première intégrale est évidemment $\frac{r}{2}\log\left[(x-\lambda)^2+\mu^2\right]$, puisque le numérateur est la dérivée du dénominateur ; pour calculer la seconde posons-y :

$$\frac{x-\lambda}{\mu}=t\ ;\quad \text{d'où}\quad dx=\mu\,dt$$

elle devient

$$(s+r\lambda)\int\frac{\mu\,dt}{\mu^2(1+t^2)}=\frac{s+r\lambda}{\mu}\operatorname{arc\,tg} t.$$

Donc enfin

$$\int\frac{rs+s}{(x-\lambda)^2+\mu^2}dx=\frac{r}{2}\log\left[(x-\lambda)^2+\mu^2\right]+\frac{s+r\lambda}{\mu}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\lambda}{\mu}$$

Quant aux termes $\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}$, $\frac{B_\alpha}{(x-b)^\alpha}$; .... on les intégrera directement ; la somme de deux termes analogues correspondant à deux racines conjuguées sera évidemment réelle.

126. – Remarque. – On sait que dans le cas des racines imaginaires conjuguées, $\lambda+\mu i$, $\lambda-\mu i$, on peut aussi décomposer $\frac{R(x)}{Q(x)}$ sous la forme :

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{p_\alpha x+q_\alpha}{\left[(x-\lambda)^2+\mu^2\right]^\alpha}+\dots\dots+\frac{p_1x+q_1}{(x-\lambda)^2+\mu^2}+\dots\dots$$

Nous n'indiquerons pas la manière de calculer les p_α et q_α (qui sont réels), cette méthode étant plus longue que celle du n° 122, qu'il sera toujours préférable de suivre.

Toutefois, si on a à intégrer des expressions toutes décomposées de la forme ci-dessus :

$$\int \frac{px+q}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^\alpha}\,dx,$$

on les intégrera directement, sans les décomposer en fractions simples comme au N° 122. Voici la marche à suivre.

On posera d'abord, pour simplifier $\frac{x-\lambda}{\mu} = t$; l'intégrale, deviendra

$$\int \frac{p\mu t+p\lambda+q}{\mu^{2\alpha}(1+t^2)^\alpha}\,\mu\,dt = \frac{p}{\mu^{2\alpha-2}}\int\frac{t\,dt}{(t^2+1)^\alpha} + \frac{p\lambda+q}{\mu^{2\alpha-1}}\int\frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}$$

Au second membre, $\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)^\alpha}$ est évidemment ($\alpha \gtrless 1$) égale à

$-\frac{1}{2(\alpha-1)}\ \frac{1}{(1+t^2)^{\alpha-1}}$; il reste donc à calculer l'intégrale:

$$I_\alpha = \int \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}$$

On l'écrira:

$$I_\alpha = \int \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^\alpha}\,dt = \int\frac{dt}{(1+t^2)^{\alpha-1}} - \int\frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^\alpha}$$

$$= I_{\alpha-1} - \int\frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^\alpha}$$

Appliquons à la dernière intégrale le procédé d'intégration par parties.

$$\int \underbrace{t}_{u}\ \underbrace{\frac{t\,dt}{(1+t^2)^\alpha}}_{v'}\ dt = t\underbrace{\left[-\frac{1}{2(\alpha-1)}\ \frac{1}{(1+t^2)^{\alpha-1}}\right]}_{v} + \int \frac{1}{2(\alpha-1)}\ \frac{dt}{(1+t^2)^{\alpha-1}}$$

$$= \frac{-1}{2\alpha-2}\ \frac{t}{(1+t^2)^{\alpha-1}} + \frac{1}{2\alpha-2}\ I_{\alpha-1}$$

D'où:

$$I_\alpha = I_{\alpha-1} + \frac{1}{2\alpha-2}\ \frac{t}{(1+t^2)^{\alpha-1}} - \frac{1}{2\alpha-2}\ I_{\alpha-1}$$

$$= \frac{1}{2\alpha-2}\ \frac{t}{(1+t^2)^{\alpha-1}} + \frac{2\alpha-3}{2\alpha-2}\ I_{\alpha-1}$$

Formule de récurrence, qui permet de ramener, par échelons successifs, I_α au calcul de I_1; or on a:

$$I_1 = \int\frac{dt}{1+t^2} = \text{arc tg}\ t$$

La question est donc résolue.

Exemples d'intégration de fonctions rationnelles.

127. — Soit à calculer l'intégrale

$$I = \int \frac{x^6}{(x^2-1)^3}\, dx$$

Le numérateur est de même degré que le dénominateur ; le quotient est 1 ; on écrira donc :

$$x^6 = (x^2-1)^3 + 3x^4 - 3x^2 + 1$$

d'où

$$I = \int dx + \int \frac{3x^4-3x^2+1}{(x^2-1)^3}\, dx.$$

Il faut décomposer en fractions simples $\frac{3x^4-3x^2+1}{(x^2-1)^3}$; les racines du dénominateur sont -1 et $+1$; elles sont triples.

$$\frac{3x^4-3x^2+1}{(x^2-1)^3} = \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \cdots\cdots$$

Pour calculer les A, posons $x = 1+h$; le premier membre devient :

$$\frac{3(1+h)^4 - 3(1+h)^2 + 1}{h^3(2+h)^3} = \frac{1 + 6h + 15h^3 + \cdots}{h^3\left[8 + 12h + 6h^2 + \cdots\right]}$$

car la racine étant triple, on n'a besoin que des trois premiers termes en h au numérateur et au dénominateur (N° 123, 2°). Faisons la division, suivant les puissances croissantes de h :

$$\begin{array}{r|l}
\not{1} + 6h + 15h^2 & 8 + 12h + 6h^2 \\
-\frac{12}{8}h - \frac{6}{8}h^2 & \hline \frac{1}{8} + \frac{9}{16}h + \frac{30}{32}h^2 \\
\hline
+\frac{9}{2}h + \frac{57}{4}h^2 & \\
-\frac{27}{4}h^2 & \\
\hline
+\frac{30}{4}h^2 &
\end{array}$$

Donc : $A_3 = \frac{1}{8}$; $A_2 = \frac{9}{16}$; $A_1 = \frac{15}{16}$.

On calculerait de même les coefficients qui correspondent à la racine -1. Il est plus simple de les obtenir directement :

$$\frac{3x^4-3x^2+1}{(x^2-1)^3} = \frac{1}{8}\,\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{9}{16}\,\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{15}{16}\cdot\frac{1}{x-1}$$

$$+ \frac{B_3}{(x+1)^3} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_1}{x+1} .$$

Changeons x en $-x$: le premier membre ne change pas ; pour que le second membre reste aussi le même, il faut évidemment que :

$$B_3 = -\frac{1}{8} \quad ; \qquad B_2 = \frac{9}{16} \quad ; \qquad B_1 = -\frac{15}{16} .$$

Donc enfin :

$$I = x - \frac{1}{16}\,\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{9}{16}\,\frac{1}{(x-1)} + \frac{15}{16}\log(x-1)$$

$$+ \frac{1}{16}\,\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{9}{16}\,\frac{1}{(x+1)} - \frac{15}{16}\log(x+1)$$

128. — Calculer $J = \int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$

La fonction à intégrer $\frac{1}{x(x^2+1)^2}$ est impaire, c'est-à-dire change de signe quand x est remplacé par $-x$. Dans ce cas, très fréquent, on simplifie l'expression, sans introduire de radicaux, en posant

$$x^2 = t \quad ; \qquad 2x\,dx = dt .$$

d'où :

$$J = \int \frac{x\,dx}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t(t+1)^2}$$

La décomposition en éléments simples est facile :

$$\frac{1}{t(t+1)^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{(t+1)} ; \qquad \text{donc :}$$

$$J = \frac{1}{2}\log t + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(t+1)} - \frac{1}{2}\log(t+1)$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{x^2}{x^2+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1} .$$

De même en général si $f(x)$ est une fonction rationnelle impaire, $\frac{f(x)}{x}$ sera paire et dépendra rationnellement de x^2. Donc :

$$f(x) = x\varphi(x^2) \ldots\ldots \quad \varphi \text{ étant rationnel}$$

$$\int f(x)\,dx = \int \varphi(x^2)\,x\,dx$$

et en posant $x^2 = t$, il viendra :

$$\int f(x)\,dx = \int \tfrac{1}{2}\varphi(t)\,dt\,;$$

ce qui simplifiera le calcul.

129. — Plus généralement, si on a une expression de la forme

$$\int \frac{dx\,\varphi(x^m)}{x},$$

où φ est une fonction rationnelle de x^m, et m une constante quelconque, on l'écrira :

$$\int x^{m-1}\,dx\,\frac{\varphi(x^m)}{x^m},$$

et on prendra pour variable $x^m = t$. L'intégrale devient :

$$\frac{1}{m}\int \frac{\varphi(t)}{t}\,dt,$$

et on est ramené à intégrer une fonction rationnelle de t.
Exemple :

$$\int \frac{dx}{x(a+bx^m)} = \frac{1}{m}\int \frac{dt}{t(a+bt)} = \frac{1}{m}\int dt\left[\frac{1}{at} - \frac{b}{a}\,\frac{1}{a+bt}\right] = \text{etc.}\ldots$$

2° Fonctions rationnelles de x et de $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

---

130. — Les intégrales du type

(1) $$\int f\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p'}{q'}}, \ldots \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p''}{q''}}\right] dx,$$

où $p, q, \ldots p'', q''$ sont des entiers, positifs ou négatifs, et où f est une fonction

rationnelle, se ramènent aux intégrales de différentielles rationnelles et sont dès lors calculables par les fonctions élémentaires.

Soit en effet m le plus petit commun multiple (en valeur absolue) des dénominateurs $q, q', \dots q''$; on posera :

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m ;$$

d'où :

$$x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} \quad ; \quad dx = m\frac{ad-bc}{(a-ct^m)^2} t^{m-1} dt ;$$

et l'intégrale (1) prend la forme :

$$m(ad-bc)\int f\left[\frac{dt^m-b}{a-ct^m}, t^{\frac{mp}{q}}, \dots t^{\frac{mp''}{q''}}\right]\frac{t^{m-1}}{(a-ct^m)^2}dt ,$$

où tout est rationnel, puisque $\frac{mp}{q}, \dots \frac{mp''}{q''}$ sont entiers.

131. — Exemples. — Soit $\int \frac{x - x^{\frac{1}{2}}}{x - x^{\frac{2}{3}}} dx$: on a à intégrer une fonction rationnelle de x et de $x^{\frac{1}{6}}$; on posera donc :

$$x = t^6 \quad ; \quad dx = 6t^5 dt$$

et on sera ramené à calculer

$$6\int \frac{t^6 - t^3}{t^6 - t^4} t^5 dt = 6\int t^4 \frac{t^3-1}{t^2-1} dt = 6\int t^4 \frac{t^2+t+1}{t+1} dt$$

$$= 6\int \left[t^5 + t^3 - t^2 + t - 1 + \frac{1}{t+1}\right] dt = \text{etc.} \dots\dots$$

Soit encore :

$$\frac{dx}{x + \sqrt{x+1}}$$

On posera :

$$x + 1 = t^2 ;$$

et l'intégrale devient :

$$\int \frac{2t\,dt}{t^2 + t - 1} ,$$

qui s'obtient sans difficulté.

132. — Différentielle binôme. — C'est la différentielle

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a, b \gtrless 0)$$

où m, n, p sont des nombres fractionnaires positifs ou négatifs. En général, on ne sait pas l'intégrer, mais on peut la ramener au type précédent, et par suite l'intégrer, dans trois cas particuliers.

Posons

$$x^n = t\,; \quad x = t^{\frac{1}{n}}\,; \quad dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt\,;$$

l'intégrale de la différentielle binôme devient

$$\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p\,dt\,.$$

Elle est du type (1) :

1° <u>Si p est entier</u> : car on a le produit d'une fonction rationnelle, $(a+bt)^p$ par une puissance fractionnaire de t, (et t est de la forme $\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}$).

2° <u>Si $\frac{m+1}{n}$ est entier</u> : car on a le produit d'une fonction rationnelle, $t^{\frac{m+1}{n}-1}$ par une puissance fractionnaire de $a+bt$

3° <u>Si $\frac{m+1}{n}+p$ est entier</u> ; car on peut écrire la quantité à intégrer
$t^{\frac{m+1}{n}+p-1}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p$, ce qui est le produit d'une fonction rationnelle par une puissance fractionnaire de $\frac{a+bt}{t}$.

3° Fonctions rationnelles de x et de $\sqrt{ax^2+2bx+c}$.

---

133. _ Soit à calculer l'intégrale

$$(2) \qquad \int f(x,y)\,dx,$$

où f est une fonction rationnelle, et où y représente le radical :

$$y = \sqrt{ax^2+2bx+c}\,.$$

Je dis qu'on peut la ramener à l'intégrale d'une fonction rationnelle de t, par un changement de variable : il suffirait, pour cela, qu'on pût exprimer x et y en fonction rationnelle d'un paramètre, t ; $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$; on aurait alors $dx=\varphi'(t)\,dt$, $\varphi'(t)$ étant aussi rationnel, et il est clair que l'intégrale (2) se ramènerait à la forme $\int F(t)\,dt$, F étant rationnel.

Tout revient donc à exprimer rationnellement x et y, si c'est possible, en fonction d'un paramètre t. Or la courbe

$$y = \sqrt{ax^2+2bx+c}$$

représentant une conique, l'expression est possible, car il suffit, comme on sait, de couper la conique par une sécante mobile, de coefficient angulaire t, passant par un point fixe pris sur la courbe, pour obtenir x et y en fonction rationnelle de t.

134. – On saura donc intégrer les expressions du type (2); dans chaque cas particulier, on choisira le point fixe de manière à simplifier les expressions de x, y en fonction de t. Par exemple :

1° Si le polynôme $ax^2+2bx+c=0$ a ses racines réelles, α et β, on pourra prendre pour point fixe le point $y=0$, $x=\alpha$, situé sur Ox. On posera donc :

$$y = t(x-\alpha) \;;$$

et cette sécante mobile coupera la courbe $y^2=a(x-\alpha)(x-\beta)$ aux points dont les x vérifient l'équation :

$$t^2(x-\alpha)^2 = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

et, en supprimant le facteur $(x-\alpha)$, qui correspond au point fixe :

$$\frac{x-\beta}{x-\alpha} = \frac{t^2}{a} \;; \ldots\ldots\ldots \text{d'où l'on conclut :}$$

$$x = \frac{\beta-\frac{\alpha}{a}t^2}{1-\frac{1}{a}t^2} \;; \qquad y = t(x-\alpha) = t\,\frac{\beta-\alpha}{1-\frac{1}{a}t^2} \;;$$

expressions cherchées de x et y en fonction de t.

Il est clair qu'on peut remplacer, sans changer la forme rationnelle, $\frac{t}{\sqrt{\pm a}}$ par θ, c'est-à-dire que l'intégrale (2) devient celle d'une fonction rationnelle de θ par la substitution

$$\frac{x-\beta}{x-\alpha} = \pm\,\theta^2,$$

α et β désignant les racines du trinôme sous le radical, $ax^2+2bx+c$.

2° On pourra prendre pour point fixe un des points où la courbe coupe l'axe des y : $x=0$; $y=\sqrt{c}$; on posera donc :

$$y-\sqrt{c} = tx .$$

3° On pourra aussi couper par des droites parallèles à une des asymptotes de la conique :

$$y = x\sqrt{A} + t .$$

Généralement avant d'employer l'un ou l'autre de ces procédés, il pourra être utile de simplifier d'abord le polynôme sous le radical en posant $x = z + h$, de manière à faire disparaître le terme en z.

135. _ Exemple I. — Calculer $I = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

On coupera la conique $y = \sqrt{x^2+1}$ par des droites parallèles à une asymptote :

$$y = x + t$$

d'où :

$$x^2 + 1 = (x+t)^2$$

$$x = \frac{1-t^2}{2t} \quad ; \qquad y = x + t = \frac{1+t^2}{2t} \quad ; \qquad dx = -\frac{1}{2}\,\frac{1+t^2}{t^2}\,dt$$

Portons ces valeurs dans I ; il vient :

$$I = -\int \frac{(1-t^2)^2}{4t^2}\,\frac{2t}{1+t^2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1+t^2}{t^2}\,dt = -\frac{1}{4}\int \frac{(1-t^2)^2}{t^3}\,dt$$

c'est-à-dire :

$$I = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^3} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{4}\int t\,dt = \left[\frac{1}{8}\,\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2}\log t - \frac{1}{8}\,t^2\right]$$

Remplaçons maintenant t par sa valeur en x. On a :

$$t = y - x = \sqrt{x^2+1} - x \; ;$$

d'où :

$$I = \frac{1}{2}\,x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\log\left[\sqrt{x^2+1} - x\right]$$

136. _ Exemple II. _ Calculer $J = \int \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\,dx$.

Simplifions d'abord le radical en posant, pour faire disparaître le terme du premier degré

$$x + \frac{b}{a} = z :$$

On a

$$J = \int \frac{\alpha z + \beta - \frac{\alpha}{a}\,b}{\sqrt{az^2 + K}}\,dz$$

en posant, pour simplifier, $K = \frac{ac-b^2}{a}$.
J se décompose ainsi en deux intégrales

$$\alpha \int \frac{z\,dz}{\sqrt{az^2+K}} \qquad \text{et} \left(\beta - \frac{\alpha}{a} b\right) \int \frac{dz}{\sqrt{az^2+K}},$$

dont la première est évidemment $\frac{\alpha}{a}\sqrt{az^2+K}$. Reste donc à calculer

$$\int \frac{dz}{\sqrt{az^2+K}}.$$

Pour n'introduire que des quantités réelles, distinguons plusieurs cas.

1° $a > 0$. On écrit :

$$\int \frac{dz}{\sqrt{az^2+K}} = \int \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{dz}{\sqrt{z^2+\frac{K}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log\left(z + \sqrt{z^2+\frac{K}{a}}\right)$$

2° $a < 0$, mais $K > 0$. On écrit, en posant $a = -a'$:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{-a'z^2+K}} = \int \frac{1}{\sqrt{a'}} \frac{dz}{\sqrt{\frac{K}{a'} - z^2}} = \frac{1}{\sqrt{a'}} \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{\frac{K}{a'}}}\right)$$

3° $a < 0$, et $K < 0$: en ce cas on ne peut obtenir $\int \frac{dz}{\sqrt{az^2+K}}$ sous forme réelle, puisque la différentielle est imaginaire.
On écrira, comme dans le premier cas :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{az^2+K}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log\left(z + \sqrt{z^2+\frac{K}{a}}\right).$$

137. – Exemple III. – Calculer $I = \int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{ax^2+2bx+c}}$

On applique la méthode générale, en coupant la conique

$$y^2 = ax^2 + 2bx + c$$

par des droites, issues du point $x_0 = \lambda$, $y_0 = \mu = \sqrt{a\lambda^2+2b\lambda+c}$
Posons donc :

$$y - \mu = t(x-\lambda) ;$$

d'où :

$$\sqrt{ax^2+2bx+c} = \mu + t(x-\lambda),$$

et en élevant au carré, et observant que $\mu^2 = a\lambda^2 + 2b\lambda + c$:

$$a(x^2-\lambda^2) + 2b(x-\lambda) = 2\mu t(x-\lambda) + t^2(x-\lambda)^2.$$

Supprimons le facteur $x-\lambda$ qui correspond au point fixe, il vient, pour exprimer x en fonction rationnelle de t, la relation :

$$(1) \qquad t^2(x-\lambda)+2\mu t = a(x+\lambda)+2b$$

Il faudrait résoudre par rapport à x et en déduire dx en fonction de dt : il sera plus simple de différentier sans résoudre, ce qui donne

$$2\,dt\left[t(x-\lambda)+\mu\right]+(t^2-a)\,dx=0$$

d'où :

$$\frac{-2\,dt}{t^2-a}=\frac{dx}{\mu+t(x-\lambda)}=\frac{dx}{y}$$

L'intégrale cherchée, I, est $\int\frac{dx}{y(x-\lambda)}$; on a donc

$$I=\int\frac{dx}{y}\,\frac{1}{x-\lambda}=-\int\frac{2\,dt}{(t^2-a)(x-\lambda)}$$

Or l'équation (1) donne :

$$(x-\lambda)\,(t^2-a)=-2\mu t+2\lambda a+2b$$

d'où :

$$I=\int\frac{dt}{\mu t-\lambda a-b}=\frac{1}{\mu}\,\log\left(t-\frac{\lambda a+b}{\mu}\right)$$

On a donc finalement :

$$\int\frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{ax^2+2bx+c}}=\log\left[\frac{\sqrt{ax^2+2bx+c}-\sqrt{a\lambda^2-2b\lambda+c}}{x-\lambda}-\frac{\lambda a+b}{\sqrt{a\lambda^2+2b\lambda+c}}\right]\frac{1}{\sqrt{a\lambda^2+2b\lambda+c}}$$

138. — L'intégrale

$$\int f\left(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d}\right)dx,$$

où f est rationnel, se ramène au cas général précédent (N° 133); posons en effet

$$ax+b=z^2\,;$$

l'intégrale devient

$$\int f\left(\frac{z^2-b}{a},\,z,\,\sqrt{\frac{c}{a}(z^2-b)+d}\right)2\,\frac{z\,dz}{a}.$$

On a ainsi à intégrer une fonction rationnelle de z et d'un radical de la forme $\sqrt{Az^2+C}$, ce qu'on fera par un des procédés ci-dessus.

On peut encore procéder autrement : la fonction à intégrer étant rationnelle en x, $\sqrt{ax+b}$ et $\sqrt{cx+d}$ est de la forme :

$$f=\frac{A+B\sqrt{ax+b}+C\sqrt{cx+d}+D\sqrt{ax+b}\sqrt{cx+d}}{A_1+B_1\sqrt{ax+b}+\dots\dots}$$

$A, B, \dots A_1, B_1, \dots$ étant des polynômes entiers en x.

Si on rend le dénominateur rationnel, ce qui est toujours facile en multipliant les deux termes de la fraction par un facteur convenable, f prendra la forme :

$$f=\frac{M+N\sqrt{ax+b}+P\sqrt{cx+d}+Q\sqrt{ax+b}\sqrt{cx+d}}{R}$$

M, N, P, Q, R étant des polynômes en x, et l'intégrale $\int f\,dx$ se ramène à quatre autres

1° $\int \frac{M}{R}\,dx$, intégrale de fraction rationnelle ;

2° $\int \frac{N}{R}\sqrt{ax+b}\,dx$, qu'on ramène au cas d'une fraction rationnelle en posant $ax+b=t^2$ (N° 130) ;

3° $\int \frac{P}{R}\sqrt{cx+d}\,dx$; qu'on traite de même ;

4° $\int \frac{Q}{R}\sqrt{(ax+b)(cx+d)}\,dx$, qui s'obtient par un des procédés du N° 134, par exemple en posant $\frac{ax+b}{cx+d}=t^2$.

Exemple. — Soit $I=\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+\sqrt{x}}\,dx$.

Rendons le dénominateur rationnel en multipliant les deux termes par $x-\sqrt{x}$; il vient :

$$I=\int\frac{(x-\sqrt{x})\sqrt{x+1}}{x^2-x}\,dx.$$

c'est-à-dire

$$I=\int\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}\,dx-\int\frac{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}{x^2-x}\,dx$$

La première intégrale se trouve en posant $x+1=t^2$ (N° 130) ;

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}\,dx = 2\int \frac{t^2}{t^2-2}\,dt = 2\int\left[1+\frac{2}{t^2-2}\right]dt = 2t+\sqrt{2}\int\left(\frac{dt}{t-\sqrt{2}}-\frac{dt}{t+\sqrt{2}}\right)$$

$$= 2t+\sqrt{2}\log\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} = 2\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\log\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}$$

La seconde intégrale, $-\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{x^2-x}\,dx$ est toute ramenée au type général du N° 133 ; on la calculera en posant, par exemple, $\frac{x+1}{x} = t^2$; d'où

$$-\int \frac{x\sqrt{\frac{x+1}{x}}}{x(x-1)}\,dx = +\int 2t\,\frac{t\,dt}{(t^2-1)^2}\,\frac{t^2-1}{2-t^2} = 2\int\frac{t^2\,dt}{(t^2-1)(2-t^2)}$$

. . . . etc . . . . . .

4°. _ Fonctions rationnelles des coordonnées d'un point d'une courbe unicursale.

---

139. _ Si y est une fonction de x définie par

$$\varphi(x,y) = 0,$$

où $\varphi(x,y)=0$ représente une courbe unicursale, toute intégrale de la forme

$$\int f(x,y)\,dx,$$

où f est rationnel en x et y pourra être calculée.

En effet, par courbe unicursale, on entend une courbe telle que les coordonnées x, y d'un de ses points puissent s'exprimer en fonction rationnelle d'un paramètre t. On aura donc :

$$x = \varphi(t)\ ; \quad y = \psi(t)\ ; \quad dx = \varphi'(t)\,dt$$

et l'intégrale proposée deviendra

$$\int F(t)\,dt,$$

$F(t)$ étant une fonction rationnelle de t.

On voit que c'est la généralisation de la théorie du N° 133 ; la courbe $\varphi(x,y)=0$ était alors $y^2 = ax^2+2bx+c$, c'est-à-dire une conique qui est bien une courbe unicursale.

Exemple. — Soit $I = \int \frac{dx}{(x^3-x^2)^{\frac{1}{2}}}$

Si l'on pose

$$y = (x^3 - x^2)^{\frac{1}{3}} \; ; \quad \text{ou} \quad y^3 = x^3 - x^2,$$

on a

$$I = \int \frac{dx}{y^2}$$

et on est dans le cas ci-dessus, car la courbe $y^3 = x^3 - x^2$ est unicursale (cubique ayant un point double à l'origine). Pour exprimer x et y en fonction d'un paramètre, t, on coupera par des sécantes, $y = tx$, issues du point double; il vient ainsi :

$$t^3x^3 = x^3 - x^2 ; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{1}{1-t^3} \; ; \qquad dx = \frac{3t^2 dt}{(1-t^3)^2}$$

$$y = tx = \frac{t}{1-t^3}$$

Par suite

$$I = \int \frac{dx}{y^2} = \int \frac{3t^2 dt}{(1-t^3)^2} \cdot \frac{(1-t^3)^2}{t^2} = 3\int dt = 3t$$

L'intégrale proposée est donc, en remplaçant t par sa valeur $\frac{y}{x}$, c. à. d. $\frac{(x^3-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}$:

$$I = 3\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} \; .$$

140. — **Propriété fondamentale des courbes unicursales.** — Nous avons défini la courbe unicursale une courbe telle que les coordonnées de ses points puissent s'exprimer en fonction rationnelle d'un paramètre t ; on peut dire aussi qu'une courbe d'ordre n est unicursale quand elle a $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points doubles, nombre maximum de points doubles que puisse avoir une courbe <u>indécomposable</u> de degré n.

L'identité des deux définitions résulte des théorèmes suivants.

141. — **Théorème I.** — Une courbe indécomposable d'ordre n ne peut avoir plus de $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points doubles.

Soit δ le nombre de points doubles d'une courbe C_n, d'ordre n ; considérons les courbes C_{n-2}, d'ordre $n-2$, <u>adjointes</u> à C_n, c'est-à-dire passant par les δ points doubles.

L'équation générale des courbes d'ordre $n-2$ dépend linéairement de $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$ paramètres, celle des courbes C_{n-2} contiendra donc linéairement $\frac{1}{2}(n-2)(n+1) - \delta$ paramètres, au moins : une de

ces courbes pourra donc être menée par $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)-\delta$ points choisis arbitrairement sur C_n. Or cette courbe C_{n-2} et la courbe C_n ont ainsi en commun un nombre de points égal à

$$N = \frac{1}{2}(n-2)(n+1) - \delta + 2\delta ,$$

puisque chaque point double de C_n équivaut à 2 points d'intersection; il faut que ce nombre N soit inférieur ou au plus égal à $n(n-2)$, sans quoi C_{n-2} (courbe d'ordre $n-2$) coupant C_n (courbe d'ordre n) en plus de $n(n-2)$ points ferait partie de C_n, qui dès lors ne serait pas indécomposable. Donc on a :

$$\frac{1}{2}(n-2)(n+1) + \delta \leqq n(n-2)$$

c'est-à-dire

$$\delta \leqq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \qquad \text{C.q.f.d.}$$

142. – Théorème II. – Une courbe indécomposable d'ordre n, qui a $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points doubles est unicursale.

En effet, les courbes C_{n-2}, adjointes à C_n, dépendent linéairement de $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)-\delta = n-2$ paramètres ; donc par $n-3$ points pris sur C_n on peut faire passer une infinité simple de courbes adjointes C_{n-2}, et celles-ci ont une équation de la forme

$$A(x,y) + \lambda B(x,y) = 0 \tag{1}$$

λ étant un paramètre variable. Cherchons le nombre des points mobiles communs à C_n et à une des courbes (1) ; ce nombre est évidemment égal à

$$n(n-2)-(n-3)-2\delta = n(n-2)-(n-3)-(n-1)(n-2)$$
$$= 1$$

car la courbe (1) coupe C_n en $(n-3)$ points simples fixes et aux δ points doubles.

C.q.f.d.

Ainsi la courbe (1) rencontre C_n en un seul point mobile ; d'après la théorie de l'élimination, les coordonnées de ce point sont des fonctions rationnelles des coefficients qui figurent dans les équations des deux courbes ; ce sont donc des fonctions rationnelles du paramètre λ.

C.q.f.d.

143. — Théorème III. — Une courbe unicursale d'ordre n a $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points doubles.

Nous admettrons ce théorème sans démonstration ; il n'est d'ailleurs pas utile pour l'intégration ; car, dans le problème de l'intégration, la courbe $\varphi(x,y)=0$ est donnée et on a à reconnaître si elle est unicursale, ce qui se fait en cherchant ses points doubles et en vérifiant si elle en a $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ (Théorème II).

144. — Application. — Soit l'équation :

$$(e) \qquad (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2);$$

C'est celle d'un lemniscate, courbe d'ordre quatre, qui a trois points doubles : l'origine et les deux points circulaires à l'infini. Elle représente donc une courbe unicursale, et on peut exprimer les coordonnées x, y en fonction d'un paramètre λ.

Appliquons pour cela la méthode du n° 142. Les courbes adjointes d'ordre $n-2$ sont ici des cercles passant par l'origine ; ils coupent la lemniscate en un nombre de points mobiles égal à $2.4-3.2=2$; considérons ceux d'entre eux qui passent par un point fixe de la courbe, ceux par exemple qui touchent à l'origine la droite $y=x$, tangente à une des branches de la lemniscate ; leur équation est :

$$(f) \qquad x^2+y^2+\lambda(x-y)=0,$$

et chacun d'eux coupe la courbe en un seul point mobile. L'x de ce point s'obtient en éliminant y entre (e) et (f) ; on a, en combinant ces deux équations :

$$\lambda^2(x-y)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

et en supprimant le facteur $(x-y)$, qui correspond à des points communs fixes :

$$\lambda^2(x-y) = a^2(x+y); \quad \text{d'où} \quad y = x\,\frac{\lambda^2-a^2}{\lambda^2+a^2}.$$

Portant cette valeur de y dans (f), on obtient l'équation en x :

$$2x^2\left[\frac{\lambda^4+a^4}{(\lambda^2+a^2)^2}\right] + \lambda x \cdot \frac{2a^2}{\lambda^2+a^2}.$$

D'où finalement :

$$x = -a^2\lambda\,\frac{\lambda^2+a^2}{\lambda^4+a^4};$$

$$y = x\,\frac{\lambda^2-a^2}{\lambda^2+a^2} = -a^2\lambda\,\frac{\lambda^2-a^2}{\lambda^4+a^4}.$$

III. — Fonctions transcendantes qu'on sait intégrer.

1° Fonctions rationnelles de sin x et cos x.

145. — Pour intégrer $\int f(\sin x, \cos x)\, dx$, où f est une fonction rationnelle, il suffit de poser

$$tg\, \tfrac{1}{2} x = t\ ;$$

d'où

$$x = 2\, arc\, tg\, t \quad ; \quad dx = \frac{2\, dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

et l'intégrale proposée se ramène ainsi à l'intégrale d'une fonction rationnelle de t.

Exemples. — a). L'intégrale $\int \frac{dx}{\sin x}$ devient, par la substitution ci-dessus

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2\, dt}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{2t} = \int \frac{dt}{t} = \log t\ ;$$

donc

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log \left(tg \frac{x}{2} \right)$$

Changeant x en $\frac{\pi}{2} - x$, on a :

$$\int \frac{dx}{\cos x} = - \log\, tg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$$

b) De même on a $(m > 0)$

$$\int \frac{dx}{\sin^m x} = \int \frac{(1+t^2)^{m-1}}{2^{m-1}\, t^m}\, dt,$$

ce qui se calcule immédiatement.

L'intégrale $\int \frac{dx}{\cos^m x}$ se présenterait, après le changement de variable, sous une forme plus compliquée, car il y aurait en dénominateur $(1-t^2)^m$: il vaut mieux la déduire de la précédente, préalablement calculée, en changeant x en $\frac{\pi}{2} - x$.

146. — Remarques. — Souvent, un changement de variable plus simple que $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ permet d'arriver au même résultat ; voici, à ce point de vue, les cas particuliers les plus fréquents.

1° Si $f(\sin x, \cos x)$ est paire par rapport à $\sin x$ et $\cos x$, c. à. d. ne change pas quand on change simultanément $\sin x$ et $\cos x$ en $-\sin x$ et $-\cos x$, on pourra prendre pour variable

$$\operatorname{tg} x = t\ ;$$

d'où

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}\ ; \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\ ; \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\ ;$$

et dans la fonction $f(\sin x, \cos x) = f\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$, le radical $\sqrt{1+t^2}$ disparaîtra, puisque, en vertu de l'hypothèse, il ne figurera qu'à des puissances paires. L'intégrale $\int f(\sin x, \cos x)\,dx$ se ramènera donc à l'intégrale d'une fonction rationnelle de t.

2° — Si $f(\sin x, \cos x)$ est impaire en $\cos x$, c. à. d. est de la forme $F(\sin x, \cos^2 x)\cos x$, ($F$ étant rationnel) on prendra pour variable

$$\sin x = t\ ;$$

d'où

$$\int F(\sin x, \cos^2 x)\cos x\, dx = \int F(t, 1-t^2)\,dt\ .$$

3° — Si $f(\sin x, \cos x)$ est impaire en $\sin x$, on posera de même

$$\cos x = t\ .$$

Exemples. — a/ Soit $\int \frac{dx}{a\cos^2 x + 2b\sin x\cos x + c\sin^2 x}$: on a à intégrer une fonction paire de $\sin x$ et $\cos x$; on posera donc (1°) $\operatorname{tg} x = t$; d'où :

$$\int \frac{dx}{a\cos^2 x + \cdots\cdots} = \int \frac{dt}{1+t^2}\,\frac{1+t^2}{a+2bt+ct^2} = \int \frac{dt}{a+2bt+ct^2}$$

Plus généralement, ce même changement de variable donne très simplement l'intégrale $\int \frac{dx}{\sin^m x\cos^n x}$, où $m \geqq 0$, $n \geqq 0$, avec $m+n$ pair.

b/ Soit, en second lieu, $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x} = \int \frac{dx\cos^3 x}{\sin^3 x}$;

on a à intégrer une fonction impaire de $\cos x$, et on posera (2°) :

$$\sin x = t\ ;$$

d'où :

$$\int \frac{dx \cdot \cos^3 x}{\sin^3 x} = \int \frac{\cos^2 x \cdot (\cos x\, dx)}{\sin^3 x} = \int \frac{(1-t^2)\,dt}{t^3} = -\frac{1}{2}\frac{1}{t^2} - \log t$$

et finalement

$$\int \frac{dx}{\mathrm{tg}^3 x} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2 x} - \log \sin x .$$

Si on avait eu à calculer $\int \mathrm{tg}^3 x\, dx$, il eût mieux valu poser $\cos x = t$, pour n'avoir toujours que t^3 au dénominateur de la fraction rationnelle en t.

c) Soit

$$\int \sin^3 x\, dx\ ;$$

on a à intégrer une fonction impaire de $\sin x$; on posera donc (3°) :

$$\cos x = t\ ;$$

d'où :

$$\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x\, dx = -\int (1-t^2)\, dt = \frac{t^3}{3} - t$$

donc :

$$\int \sin^3 x\, dx = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x .$$

d). Soit enfin $\int \sin^4 x\, dx$: on pourrait prendre comme variable $\mathrm{tg}\, x$; mais le calcul serait assez compliqué, car on aurait, en dénominateur de la fraction rationnelle en t, le facteur $(1+t^2)^3$. Il vaut mieux intégrer par parties :

$$\int \sin^4 x\, dx = \int \sin^3 x\, (\sin x\, dx) = -\sin^3 x \cos x + \int 3 \sin^2 x \cos^2 x\, dx$$

$$= -\sin^3 x \cos x + 3\int \sin^2 x\, dx - 3\int \sin^4 x\, dx$$

donc :

$$4\int \sin^4 x\, dx = 3\int \sin^2 x\, dx - \sin^3 x \cos x$$

$$= \frac{3}{2}\int (1-\cos 2x)\, dx - \sin^3 x \cos x = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\sin 2x - \sin^3 x \cos x$$

et finalement

$$\int \sin^4 x\, dx = \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin^3 x \cos x .$$

Une méthode analogue s'applique à $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, quand m et n sont pairs, ce qui est le cas le plus difficile (car si m est impair, on pose $\cos x = t$; si n impair, $\sin x = t$, et on obtient immédiatement l'intégrale).

2° Fonctions rationnelles de e^{mx}.

147. — L'intégrale :

$$\int f(e^{mx})\,dx,$$

où f est une fonction rationnelle, se ramène à l'intégrale d'une différentielle rationnelle de t par la substitution

$$e^{mx} = t\,;$$

d'où $\quad mx = \log t \quad ; \qquad dx = \frac{1}{m}\frac{dt}{t}$

et

$$\int f(e^{mx})\,dx = \frac{1}{m}\int f(t)\frac{dt}{t}.$$

Exemple. — Soit $\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx$; on posera $e^x = t$; et l'intégrale devient

$$\int \frac{t+1}{t^2+1}\,\frac{dt}{t} = \int dt\left[\frac{1}{t} + \frac{1-t}{t^2+1}\right] = \log t + \operatorname{arc\,tg} t - \frac{1}{2}\log(t^2+1)$$

Remarque. — Une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$ est, à cause des relations

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{e^{2ix}-1}{2i\,e^{ix}}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{e^{2ix}+1}{2e^{ix}},$$

une fonction rationnelle de e^{ix}. On pourra donc l'intégrer, non seulement par les méthodes des N°s 145-146, mais encore par celle du N° 147, en posant $e^{ix} = t$.

Par exemple :

$$\int \cos^4 x\,dx = \int \frac{(e^{2ix}+1)^4}{16e^{4ix}}\,dx$$

$$= \int \frac{(t^2+1)^4}{16\,t^4}\,\frac{1}{i}\,\frac{dt}{t}$$

$$= \frac{1}{16i}\left[\frac{t^4}{4} + 2t^2 + 6\log t - \frac{2}{t^2} - \frac{1}{4t^4}\right]$$

$$= \frac{1}{32}\,\frac{e^{4ix}-e^{-4ix}}{2i} + \frac{1}{4}\,\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i} + \frac{6}{16i}\,ix$$

$$= \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x$$

3° Polynômes entiers en $x, e^{ax}, e^{bx}, \ldots \sin\alpha x, \cos\alpha x, \sin\beta x, \cos\beta x \ldots$.

148. – On remplacera d'abord les sin et cos par leurs valeurs en exponentielles

$$\sin\alpha x = \frac{e^{\alpha ix} - e^{-\alpha ix}}{2i} \quad ; \quad \cos\alpha x = \frac{e^{\alpha ix} + e^{-\alpha ix}}{2} ; \ldots\ldots$$

et on sera ramené à intégrer un polynôme entier en :
$x, e^{ax}, e^{bx}, e^{\alpha ix}, e^{-\alpha ix}, \ldots \ldots$, c. à. d. une somme de termes de la forme $x^p e^{mx}$. Tout revient donc à calculer

$$I_p = \int e^{mx} x^p \, dx,$$

p étant un entier et m quelconque. Or on a, en intégrant par parties :

$$\int x^p (e^{mx} dx) = x^p \frac{e^{mx}}{m} - \frac{p}{m} \int e^{mx} x^{p-1} dx$$

$$I_p = \frac{1}{m} x^p e^{mx} - \frac{p}{m} I_{p-1}$$

En répétant cette réduction, on ramènera I_p à l'intégrale I_0 :

$$I_0 = \int e^{mx} dx = \frac{1}{m} e^{mx}$$

et le problème sera résolu.

Après le calcul, on remplacera, dans le résultat, les exponentielles imaginaires par leurs valeurs en sin et cos, de manière à n'avoir que des quantités réelles.

Exemples. – a) Soit $\int e^x \cos 2x \, dx$. On écrira :

$$\int e^x \cos 2x . dx = \frac{1}{2} \int \left[e^{x(1+2i)} + e^{x(1-2i)} \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{e^{x(1+2i)}}{1+2i} + \frac{1}{2} \frac{e^{x(1-2i)}}{1-2i}$$

$$= \frac{e^x}{2} \left[\frac{\cos 2x + i \sin 2x}{1+2i} + \frac{\cos 2x - i \sin 2x}{1-2i} \right] = \ldots\ldots \text{etc.}$$

On aurait pu aussi intégrer par parties :

$$\int \cos 2x \,(e^x dx) = e^x \cos 2x + 2\int e^x \sin 2x \, dx$$

$$2\int \sin 2x \,(e^x dx) = 2e^x \sin 2x - 4\int e^x \cos 2x \, dx$$

et, en ajoutant membre à membre :

$$5\int e^x \cos 2x \, dx = e^x \left[\cos 2x + 2 \sin 2x\right]$$

b). Soit encore $\int x^2 \cos x \, dx$: au lieu d'appliquer la méthode générale, on peut intégrer par parties :

$$\int x^2 (\cos x \, dx) = x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx.$$

De même :

$$-2\int x (\sin x \, dx) = 2x \cos x - 2\int \cos x \, dx = 2x \cos x - 2 \sin x$$

Donc enfin

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x.$$

4°. _ Polynômes entiers en x et $\log x$; ou en x et arc sin x.

---

149. _ Pour intégrer un polynôme entier en x et $\log x$, c. à. d. la différentielle $x^m (\log x)^p dx$, où m et p sont entiers, on posera

$$\log x = t \;; \quad \text{d'où} \quad x = e^t, \quad dx = e^t dt$$

Il viendra

$$\int x^m (\log x)^p dx = \int e^{(m+1)t} t^p dt,$$

et nous savons calculer cette dernière intégrale (N° 148) : il n'est même pas nécessaire pour cela de supposer m entier.

Pour intégrer un polynôme entier en x et arc sin x, c. à. d. la différentielle $x^m (\text{arc} \sin x)^p dx$, on posera de même

$$\text{arc} \sin x = t \;; \quad \text{d'où} \quad x = \sin t, \quad dx = \cos t \, dt.$$

Il viendra

$$\int x^m (\text{arc} \sin x)^p dx = \int \sin^m t \, . \, t^p \cos t \, dt,$$

et nous savons aussi calculer la dernière intégrale (N° 148).

Exemple. _ On a :

$$\int (\arc \sin x)^2 dx = \int t^2 \cos t \, dt$$
$$= t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t \ldots\ldots\ldots (\text{N° } 148).$$

d'où :

$$\int (\arc \sin x)^2 dx = x(\arc \sin x)^2 + 2(\arc \sin x)\sqrt{1-x^2} - 2x$$

IV. _ Exemples de réduction d'intégrales indéfinies.

---

150. _ En dehors des cas qui viennent d'être indiqués, l'intégrale $\int f(x)dx$ ne pourra généralement pas s'exprimer à l'aide des fonctions élémentaires; elle définira donc une fonction nouvelle de x, et ce fait ouvre à l'analyse un champ d'études très étendu.

Dans cet ordre d'idées, en prenant pour $f(x)$ une fonction d'un type particulier, (par exemple une fonction rationnelle de x et de $\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}$), il importe tout d'abord de reconnaître combien on doit introduire de fonctions nouvelles pour qu'on puisse, avec leur aide et l'aide des fonctions élémentaires, exprimer toutes les intégrales $\int f(x)dx$ du type considéré : en d'autres termes, il pourra arriver que les intégrales $\int f(x)dx$ se réduisent à quelques unes d'entre elles, et c'est cette recherche qu'on nomme la réduction des intégrales de la classe proposée.

On conçoit qu'un pareil problème exige, pour chaque type d'intégrales, des méthodes particulières; il ne peut donc être question que d'exemples : nous en donnerons plusieurs, dont le premier est la réduction classique des intégrales elliptiques et hyperelliptiques.

1° Réduction des intégrales elliptiques et hyperelliptiques.

---

151. _ Soit X un polynôme en x, de degré supérieur à 2; si $f(x\sqrt{X})$ est une fonction rationnelle de x et de $\sqrt{X}$, on désigne sous le nom d'intégrales hyperelliptiques les intégrales du type :

$$(1) \qquad \int f(x, \sqrt{X})\, dx.$$

Lorsque X est un polynôme du troisième ou du quatrième degré, l'intégrale (1) est dite elliptique (ce nom provient de ce que l'arc d'ellipse s'exprime par une intégrale de la forme (1)).

On peut toujours supposer que X n'a que des racines simples : car s'il y avait une racine double, a, le facteur $(x-\alpha)$ sortirait du radical ; si a était racine triple, $(x-\alpha)$ sortirait aussi du radical, et il resterait, sous le radical, le facteur simple $(x-\alpha)$; et ainsi de suite.

152. — Si le polynôme X est de degré pair, $2q$, on peut, par une substitution rationnelle, le ramener au degré $2q-1$.

Soit en effet a_1 une racine de X ; on a :

$$\sqrt{X} = \sqrt{(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_{2q})}$$

Faisons la substitution :

$$t = \frac{1}{x-a_1} \quad ; \qquad \text{ou} \qquad x = a_1 + \frac{1}{t} \, ;$$

on aura :

$$\sqrt{X} = \sqrt{\frac{1}{t}\left(a_1 - a_2 + \frac{1}{t}\right)\ldots\ldots\ldots\left(a_1 - a_{2q} + \frac{1}{t}\right)}$$

$$= \frac{1}{t^q}\sqrt{[t(a_1-a_2)+1]\ldots\ldots[t(a_1-a_{2q})+1]}$$

et le polynôme en t, sous le radical, est d'ordre $2q-1$. Désignons-le par T ; il vient

$$\int f(x, \sqrt{X})\, dx = -\int f\left(a_1 + \frac{1}{t}, \frac{1}{t^q}\sqrt{T}\right)\frac{dt}{t^2}$$

$$= \int \varphi\left(t, \sqrt{T}\right) dt,$$

φ étant une fonction rationnelle de t et de $\sqrt{T}$.

C. q. f. d.

153. — On a donc le droit de supposer que le polynôme X est de degré impair, $2q+1$: cette hypothèse, d'ailleurs, n'interviendra pas, jusqu'à nouvel ordre, dans les calculs suivants, qui s'appliquent aussi bien au cas où X est de degré pair.

154. — Première réduction. — Un polynôme entier quelconque en x et $\sqrt{X}$ se met évidemment sous la forme $M + N\sqrt{X}$, où M et N sont des polynômes entiers en x; une fonction rationnelle en x et $\sqrt{X}$, étant le quotient de deux expressions analogues, sera de la forme

$$f(x, \sqrt{X}) = \frac{M + N\sqrt{X}}{P + Q\sqrt{X}}$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur du second membre par $P - Q\sqrt{X}$, pour rendre le dénominateur rationnel; il vient :

$$f(x, \sqrt{X}) = \frac{(M + N\sqrt{X})(P - Q\sqrt{X})}{P^2 - Q^2 X} = \frac{A + B\sqrt{X}}{C},$$

A, B, C étant des polynômes entiers en x. On a ainsi, pour l'intégrale (1) :

$$\int f(x, \sqrt{X})\,dx = \int \frac{A}{C}\,dx + \int \frac{B}{C}\sqrt{X}\,dx.$$

L'intégrale $\int \frac{A}{C}\,dx$ est celle d'une fonction rationnelle de x, qu'on sait calculer; il reste donc à étudier $\int \frac{B}{C}\sqrt{X}\,dx$, ce qu'on peut écrire $\int \frac{BX}{C\sqrt{X}}\,dx$, ou

(2) $$\int \frac{D}{C\sqrt{X}}\,dx,$$

C et D étant des polynômes entiers en x, et le radical $\sqrt{X}$ ne figurant qu'au dénominateur.

Décomposons maintenant en fractions simples la fraction rationnelle $\frac{D}{C}$; l'intégrale (2) se ramènera à une somme d'intégrales des deux formes suivantes :

(3) $$\int x^n \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

(4) $$\int \frac{dx}{(x-a)^n \sqrt{X}}$$

n désignant un entier positif quelconque. Une seconde réduction va nous permettre de ramener les intégrales (3) et (4) à un nombre fini d'entre elles.

155. — Seconde réduction. — Considérons d'abord l'intégrale (3);

$$I_n = \int x^n \frac{dx}{\sqrt{X}} \ ;$$

et partons de l'identité :

(5) $$\left(x^p\sqrt{X}\right)' = p\,x^{p-1}\sqrt{X} + \frac{1}{2}\,x^p\frac{X'}{\sqrt{X}} = \frac{\frac{1}{2}x^pX' + px^{p-1}X}{\sqrt{X}}$$

où p désigne un entier positif ou nul, quelconque.

Soit h le degré du polynôme X : le numérateur, au dernier membre de (5), est un polynôme de degré $h+p-1$, où le coefficient de x^{h+p-1} n'est <u>jamais</u> nul, car si l'on pose

$$X = A_0 x^h + \ldots\ldots$$

on a :

$$\frac{1}{2}x^pX' + px^{p-1}X = A_0\left(\frac{1}{2}h+p\right)x^{h+p-1} + \ldots\ldots$$

et la quantité $\frac{1}{2}h+p$ est toujours positive, puisque $h>0$ et $p \geqq 0$.

L'identité (5) peut donc s'écrire :

$$\left(x^p\sqrt{X}\right)' = \alpha\frac{x^{h+p-1}}{\sqrt{X}} + \beta\frac{x^{h+p-2}}{\sqrt{X}} + \ldots\ldots + \frac{\lambda}{\sqrt{X}}$$

$\alpha, \beta, \ldots \lambda$ étant des constantes dont la première n'est pas nulle. Intégrons les deux membres, il vient :

$$x^p\sqrt{X} = \alpha\, I_{h+p-1} + \beta\, I_{h+p-2} + \ldots + \lambda\, I_0 \ ,$$

ce qui donne I_{h+p-1} en fonction des intégrales d'indice inférieur, pourvu que p soit $\geqq 0$.

Faisons successivement $p = 0, 1, 2, \ldots$ dans cette relation ; elle permettra d'exprimer les intégrales d'indice égal ou supérieur à $h-1$: $I_{h-1}, I_h, I_{h+1}, \ldots$ en fonction de $I_{h-2}, I_{h-3}, \ldots I_0$; en d'autres termes

Les intégrales I_n se ramènent à $(h-1)$ d'entre elles, $I_0, I_1, \ldots I_{h-2}$.

156. – Considérons en second lieu l'intégrale (4)

$$J_n = \int \frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{X}} \ .$$

Nous partirons, pour la réduire, de l'identité :

(6) $$\left[\frac{\sqrt{X}}{(x-\alpha)^p}\right]' = \frac{1}{2}\,\frac{X'}{(x-\alpha)^p\sqrt{X}} - p\,\frac{\sqrt{X}}{(x-\alpha)^{p+1}} = \frac{\frac{1}{2}(x-\alpha)X' - pX}{(x-\alpha)^{p+1}\sqrt{X}} \ ,$$

où p désigne un entier positif, au moins égal à 1. Au dernier membre

de (6), le numérateur est un polynôme d'ordre h, $\varphi(x)$, que nous pouvons ordonner suivant les puissances croissantes de $x-a$:

$$\varphi(x) = \varphi(a) + (x-a)\varphi'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^h}{h!}\varphi^h(a);$$

et il est à observer que $\varphi(a)$ n'est pas nul, à moins que a ne soit une racine de X. En effet :

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}(x-a)X' - pX \quad ; \quad \varphi(a) = -pX(a).$$

Si donc a n'est pas racine de X, l'identité (6) s'écrit :

$$(7) \qquad \left[\frac{\sqrt{X}}{(x-a)^p}\right]' = \frac{\varphi(a)}{(x-a)^{p+1}\sqrt{X}} + \frac{\varphi'(a)}{(x-a)^p\sqrt{X}} + \cdots + \frac{F(x)}{\sqrt{X}},$$

$F(x)$ étant un polynôme entier en x, qui n'existe d'ailleurs que si h est supérieur à $p+1$. Intégrons les deux membres ; il vient :

$$\frac{\sqrt{X}}{(x-a)^p} = \varphi(a)\,J_{p+1} + \varphi'(a)\,J_p + \cdots\cdots$$

les termes non écrits renferment des intégrales J, d'indice $< p$, et pouvant aussi renfermer des intégrales I, si $p+1 < h$. Cette relation permet, puisque $\varphi(a) \gtrless 0$, et que p peut partir de la valeur 1, d'exprimer J_2 en fonction de J_1 et d'intégrales I, puis J_3 en fonction de J_2, J_1 et des I, et ainsi de suite. En d'autres termes :

Si a n'est pas racine de X, les intégrales J_n se ramènent à l'intégrale J_1 et aux intégrales I_n.

157. — Reste à discuter la réduction des J_n lorsque a est racine de X. En ce cas, $\varphi(a) = 0$; mais $\varphi'(a)$ n'est pas nul. Car de .... $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x-a)X' - pX$; .... on tire :

$$\varphi'(x) = \tfrac{1}{2}X' + \tfrac{1}{2}(x-a)X'' - pX' \quad ; \qquad \varphi'(a) = \left(\tfrac{1}{2} - p\right)X'(a);$$

Or $X'(a) \gtrless 0$, puisque X n'a que des racines simples (N° 151), et $\frac{1}{2} - p$ n'est jamais nul, puisque p est entier.
L'équation (7) s'écrit alors :

$$\left[\frac{\sqrt{X}}{(x-a)^p}\right]' = \frac{\varphi'(a)}{(x-a)^p\sqrt{X}} + \frac{\frac{1}{2}\varphi''(a)}{(x-a)^{p-1}\sqrt{X}} + \cdots + \frac{F(x)}{\sqrt{X}};$$

et en intégrant :

$$\frac{\sqrt{X}}{(x-a)^p} = \varphi'(a)\,J_p + \cdots\cdots$$

les termes non écrits renfermant des intégrales J d'indice $< p$, et pouvant ainsi contenir des intégrales I, si $p+1 < h$.

Cette relation, où l'on donne à p successivement les valeurs 1, 2, ... permet d'exprimer J_1, J_2, ... en fonction des intégrales I. Donc :

Si a est racine de X, les intégrales J_n se ramènent aux intégrales I_n.

158. – Conclusions. – Supposons le degré de X impair, $h = 2q+1$. d'après ce qui précède, l'intégrale $\int \frac{D}{C\sqrt{X}}\, dx$ se ramène aux intégrales suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} I_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{X}} \\ I_1 = \int \frac{x\, dx}{\sqrt{X}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ I_{h-2} = I_{2q-1} = \int \frac{x^{2q-1}\, dx}{\sqrt{X}} \end{array}\right\}$$

$$J_1(x,a) = \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}$$

où a n'est pas racine de X. Si a est racine de X, $J_1(x,a)$ se ramène aux intégrales I_0, I_1, ... I_{2q-1}.

Donc les intégrales hyperelliptiques correspondant à un polynôme X, d'ordre $2q+1$, introduisent en tout $2q+1$ nouvelles fonctions; les $2q$ premières (I_0, I_1, ... I_{2q-1}) sont des fonctions de x seul ; la dernière, J_1, est fonction de x et d'un paramètre, a.

Si X est de degré pair, $h = 2q+2$, les raisonnements précédents permettent de réduire l'intégrale hyperelliptique générale aux intégrales I_0, I_1, ... I_{2q}, et J_1 ; en tout $h = 2q+2$ fonctions nouvelles; mais ces fonctions peuvent se réduire à $2q+1$ d'entre elles : cela résulte de ce que, par la substitution du N° 152, on peut abaisser d'une unité le degré du polynôme X.

159. – Intégrales elliptiques. – Le type des intégrales elliptiques est

$$\int \frac{D}{C\sqrt{X}}\, dx,$$

X étant du troisième degré : car si X est du quatrième degré, on le ramène au troisième. Les intégrales elliptiques peuvent donc s'exprimer à l'aide de trois fonctions nouvelles :

$$I_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{X}} \; ; \qquad I_1 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} \; ; \qquad J_1 = \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}} \, ,$$

dont la dernière est fonction de deux variables, x et a.

Ces trois fonctions s'appellent respectivement intégrales elliptiques de première, de seconde et de troisième espèces.

Legendre, au lieu de ramener X au troisième degré, le ramenait à la forme

$$X = (1-x^2)\,(1-K^2x^2)\,;$$

en ce cas, la théorie générale ci-dessus montre que les intégrales $\int f(x, \sqrt{X})\,dx$ s'expriment à l'aide des fonctions nouvelles :

$$I'_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}} \; ; \quad I'_1 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}} \; ; \quad I'_2 = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}}$$

$$J'_1 = \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}} \, .$$

Elles doivent se réduire à trois : en effet, si dans I'_1 on pose $x^2 = t$, il vient

$$I'_1 = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1-K^2t)}}$$

intégrale qui s'exprime à l'aide des fonctions élémentaires, puisque le polynôme sous le radical est du second degré.

160. – Cas où X est du second degré. – Si X est du second degré, on sait calculer, à l'aide des fonctions élémentaires (N° 133) les intégrales $\int f(x, \sqrt{X})\,dx$, où f est rationnel. Toutefois les procédés de réduction des N^os^ précédents (154 – 157) conduiront souvent à des calculs plus simples que la méthode directe d'intégration : ces procédés permettent en effet de ramener l'intégrale $\int f(x, \sqrt{X})\,dx$ aux deux intégrales :

$$I_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} \quad ; \quad J_1 = \int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{ax^2+2bx+c}}.$$

qui ont été calculées aux n°s 136 et 137.

2° Réduction des intégrales $\int e^{mx}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$.

---

161. — Si P et Q sont deux polynômes en x, l'intégrale

(8)
$$\int e^{mx}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

se ramène, par la décomposition de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fractions simples, à une somme d'intégrales des deux types :

(9)
$$\int x^p e^{mx} dx$$

(10)
$$\int \frac{e^{mx}}{(x-a)^p}dx = J_p$$

Les intégrales du type (9) se calculent à l'aide des fonctions élémentaires, comme on l'a vu au N° 148, en appliquant la formule d'intégration par parties.

Les intégrales du type (10) donnent lieu aux remarques suivantes.

Intégrons (10) par parties, en regardant $\frac{1}{(x-a)^p}$ comme la dérivée de $-\frac{1}{p-1}\frac{1}{(x-a)^{p-1}}$; il vient :

$$\int \frac{e^{mx}}{(x-a)^p}dx = -\frac{1}{p-1}\frac{e^{mx}}{(x-a)^{p-1}} + \frac{m}{p-1}\int\frac{e^{mx}}{(x-a)^{p-1}}dx ;$$

ce qui montre que J_p se ramène à J_{p-1}. On arrive ainsi à réduire $J_p, J_{p-1}, \ldots J_2$ à la seule intégrale J_1 :

$$J_1 = \int \frac{e^{mx}}{x-a}dx,$$

qu'on peut elle-même simplifier par le changement de variable

$$m(x-a)=t,$$

qui donne

$$J_1 = \int \frac{e^{ma+t}}{t}\,dt = e^{ma}\int \frac{e^t}{t}\,dt .$$

On ramène ainsi toutes les intégrales du type (10), et par suite celle du type général (8), à des fonctions élémentaires et à la seule intégrale $\int \frac{e^t}{t}\,dt$, qui ne peut s'exprimer par les fonctions anciennes, et constitue une fonction nouvelle.

On lui donne souvent une autre forme : si on pose $e^t = z$, elle devient

$$\int \frac{dz}{\log z},$$

d'où son nom de logarithme intégral. D'une manière plus précise, le logarithme intégral est l'intégrale ci-dessus, où la constante d'intégration est choisie de manière que la fonction s'annule pour $z=0$).

Chapitre II.

Chapitre II.

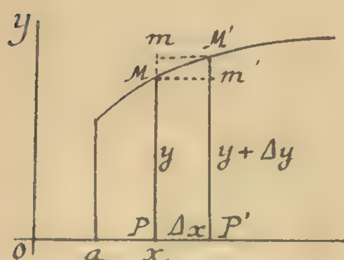
Intégrales définies.

I. – Définition et propriétés de l'Intégrale définie.

162. – Nous avons annoncé, au N° 118, que si $f(x)$ est une fonction continue entre $x = a$ et $x = b$, il existe une fonction, $F(x)$, ayant pour dérivée $f(x)$, pour les valeurs de x comprises dans cet intervalle : c'est le théorème que nous allons maintenant établir, en introduisant la notion nouvelle d'intégrale définie.

163. – Pour les anciens analystes, la proposition était évidente.

Qu'on construise en effet la courbe $y = f(x)$, et qu'on désigne par $F(x)$ l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x, l'ordonnée fixe d'abcisse a et l'ordonnée mobile d'abcisse x : je dis que $F(x)$ aura pour dérivée $f(x)$. En effet, si l'on donne à x l'accroissement Δx, l'accroissement ΔF, de l'aire, sera le trapèze curviligne $PMM'P'$ dont l'aire, comprise entre l'aire $y\Delta x$ du rectangle $PMm'P'$ et l'aire $(y+\Delta y)\Delta x$ du rectangle $PmM'P'$, est de la forme $(y+\theta\Delta y)\Delta x$, θ étant compris entre 0 et 1. On a donc :



$$\Delta F = \Delta x\left[y + \theta . \Delta y\right] = \Delta x\left[f(x) + \varepsilon\right],$$ ε tendant vers zéro avec Δx ; et cette relation montre que la limite du rapport $\frac{\Delta F}{\Delta x}$, c. à. d. la dérivée de F, est égale à $f(x)$.

Mais cette démonstration, dont l'importance historique a été très grande, est loin d'être satisfaisante 1° parce qu'elle regarde comme acquise la notion d'aire, qui n'est pas une notion première; 2° parce que, en faisant usage d'un tracé géométrique elle suppose, par là même, que la courbe $y=f(x)$ satisfait à certaines conditions (continuité, entre autres) qui ne sont pas définies d'une manière précise, et qui ne jouent pas un rôle explicite dans le raisonnement[1]. Il convient donc de donner une démonstration purement algébrique, et il est nécessaire, dans ce but, d'introduire une définition nouvelle, celle de la continuité uniforme d'une fonction.

164. – Définition. – On a défini au N°7, la continuité d'une fonction de deux variables, par exemple, $f(x,y)$: cette fonction est dite continue au point $x=a$, $y=b$, si, étant donné un nombre, ε, aussi petit qu'on veut, on peut assigner un nombre η, tel qu'on ait

$$(1) \qquad \operatorname{mod}\left[f(x,y)-f(a,b)\right]<\varepsilon$$

pour toutes les valeurs de x, y respectivement comprises entre $a-\eta$ et $a+\eta$, $b-\eta$ et $b+\eta$. Le nombre η dépend en général de ε, de a et de b; pour abréger nous l'appellerons <u>module de continuité</u> correspondant au point a, b et au nombre ε.

Si $f(x,y)$ est continue en tous les points d'une région, R, du plan elle est dite continue dans cette région.

Elle sera dite <u>uniformément continue</u> dans la région R, si, ε étant donné aussi petit qu'on veut, on peut toujours assigner un nombre η, <u>fonction de ε seul</u>, tel qu'on ait

$$\operatorname{mod}\left[f(x,y)-f(a,b)\right]<\varepsilon,$$

pour tous les points a, b de R, et pour toutes les valeurs de x, y respectivement comprises entre $a-\eta$ et $a+\eta$; $b-\eta$ et $b+\eta$. Le nombre η, ou $\eta(\varepsilon)$, sera dit module de continuité uniforme dans R, correspondant au nombre ε.

Cette définition est analogue à celle de la convergence uniforme d'une série; toutefois, à la différence de ce qui s'est présenté pour les séries, on va montrer que :

---

[1] C'est ainsi qu'il semblerait, par des considérations géométriques, que toute fonction continue doive avoir une dérivée, puisque toute branche de courbe continue paraît avoir une tangente déterminée en chaque point. Or on sait qu'il n'en est rien (n° 8, Remarque), et cet exemple montre le danger des raisonnements géométriques dans les questions de pure rigueur.

165. — Toute fonction continue dans une région finie du plan, R, et sur le contour de cette région, est uniformément continue dans R[1]

On s'appuiera sur le lemme suivant :

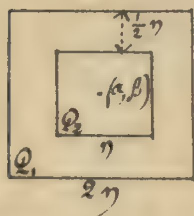
Lemme. — Si η est le module de continuité de $f(x,y)$ correspondant au point α, β et au nombre $\frac{\varepsilon}{2}$, $\frac{\eta}{2}$ sera un module de continuité uniforme, pour le nombre ε, dans le carré de centre α, β et de côté η, dont les côtés sont parallèles aux axes.

On a en effet, d'après la définition même de la continuité de $f(x,y)$ au point α, β :

$$\text{mod}\left[f(x,y)-f(\alpha,\beta)\right] < \frac{\varepsilon}{2}\,; \quad \text{mod}\left[f(a,b)-f(\alpha,\beta)\right] < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

en désignant par x, y et a, b deux points quelconques intérieurs au carré, Q_1, de centre α, β et de côté 2η ; d'où :

$$\text{mod}\left[f(x,y)-f(a,b)\right] < 2\,\frac{\varepsilon}{2}\,,\ \text{ou } \varepsilon\,.$$



A fortiori, cette dernière inégalité aura lieu si, le point x, y restant dans le carré Q_1, le point a, b reste dans le carré Q_2, intérieur à Q_1, de centre α, β et de côté η : or quelque soit le point a, b dans Q_2, le point dont les coordonnées sont respectivement comprises entre $a - \frac{\eta}{2}$ et $a + \frac{\eta}{2}$; $b - \frac{\eta}{2}$ et $b + \frac{\eta}{2}$ sera dans Q_1, et pourra être pris pour x, y. On aura donc :

$$\text{mod}\left[f(x,y)-f(a,b)\right] < \varepsilon\,,$$

pour tous les points a, b de Q_2, et pour toutes les valeurs de x, y respectivement comprises entre $a - \frac{\eta}{2}$ et $a + \frac{\eta}{2}$; $b - \frac{\eta}{2}$ et $b + \frac{\eta}{2}$; ce qui établit le lemme.

On en déduit la démonstration du théorème énoncé.

---

[1] Il serait inexact d'établir ce théorème en raisonnant ainsi : la fonction, étant continue dans R, a, en chaque point a, b, et pour un nombre donné, ε, un module de continuité, η ; le plus petit de ces modules, quand a, b varie dans R, est évidemment un module de continuité uniforme dans R, correspondant à ε ; donc la fonction est uniformément continue. Le raisonnement est inexact parce que les modules η n'ont pas nécessairement de minimum non nul. (Voir N°. 66, Rem. II et note).

Supposons en effet que $f(x,y)$, continue dans R, et sur le contour de R, ne soit pas uniformément continue, c. à d. que, pour un certain nombre ε, on ne puisse trouver de module de continuité uniforme correspondant. Divisons R en deux parties, R_1 et R_2 par une ligne quelconque : $f(x,y)$ ne sera pas uniformément continue dans l'une au moins des régions R_1 et R_2 ; car si elle l'était, au nombre donné ε correspondraient dans R_1 et R_2 des modules de continuité uniforme η_1 et η_2, dont le plus petit serait évidemment un module de continuité uniforme, correspondant au nombre ε, dans la région $R_1 + R_2 = R$.

Il faut donc que $f(x,y)$ n'ait pas de module de continuité uniforme, pour le nombre ε, dans R_1, par exemple ; de même, en divisant R_1 en deux régions, R'_1 et R'_2, $f(x,y)$ n'aura pas de module de continuité uniforme, pour ε, dans R'_1 par exemple ; et ainsi de suite. En poursuivant cette division on arrive à construire une suite indéfinie de régions, $R, R_1, R'_1 \ldots$ dont chacune est comprise dans la précédente, et dont les dimensions en tous sens tendent vers zéro, puisque la région primitive, R, est finie : ces régions ont donc pour limite un point, α, β, situé à l'intérieur ou sur le contour de R ; et, dans aucune d'elles, $f(x,y)$ n'a de module de continuité uniforme correspondant au nombre ε.

Or cela est en contradiction avec le Lemme ci-dessus.

En effet, $f(x,y)$ étant continue dans la région R et sur son contour est continue au point α, β : soit η le module de continuité qui correspond à ce point et au nombre $\frac{\varepsilon}{2}$; d'après le Lemme, $f(x,y)$ admettra, pour le nombre ε, le module de continuité uniforme $\frac{\eta}{2}$, à l'intérieur du carré Q_2 de centre α, β et de côté η, et a fortiori à l'intérieur de toute région comprise dans Q_2. Or les régions $R, R_1, R'_1, \ldots$ ayant le point α, β pour limite, il arrivera que l'une d'elles, (ainsi que toutes les suivantes) sera comprise à l'intérieur de Q_2, et $f(x,y)$ admettra dès lors, dans cette région et pour le nombre ε, le module de continuité uniforme $\frac{\eta}{2}$.

Ainsi l'hypothèse que $f(x,y)$, continue dans R et sur son contour, n'est pas uniformément continue dans R conduit à une contradiction : la continuité est donc uniforme.

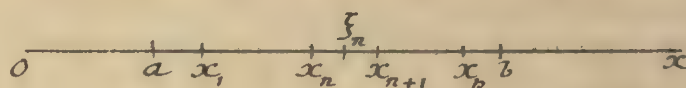
C. q. f. d.

166. — Le théorème précédent s'étend évidemment aux fonctions de trois, quatre, ... variables ; il comprend, comme cas particulier, le cas des fonctions d'une seule variable, de sorte que —

Une fonction $f(x)$, continue dans un intervalle fini ab et aux extrémités a et b de cette intervalle, est uniformément continue entre a et b;

c. à. d. qu'étant donné ε aussi petit qu'on veut, on peut assigner un nombre η, fonction de ε seul, tel que $\mathrm{mod}\,[f(x_1) - f(x)] < \varepsilon$, pour toutes les valeurs de x et x_1 comprises entre a et b, et dont la différence en valeur absolue est $< \eta$.

167. – Notion et existence de l'Intégrale définie. – Soit une fonction, $f(x)$, continue pour $x = a$, $x = b$ et dans l'intervalle ab: sur l'axe Ox, et en allant de a vers b, marquons arbitrairement



des points x_1, x_2, ... x_n, x_{n+1}, ... x_p; et dans chaque intervalle $x_n x_{n+1}$, prenons un point quelconque, ξ_n. Considérons la somme

$$(3) \qquad \Sigma = (x_1 - a) f(\xi_0) + (x_2 - x_1) f(\xi_1) + \cdots + (x_{n+1} - x_n) f(\xi_n) + \cdots + (b - x_p) f(\xi_p);$$

Si nous faisons décroître indéfiniment chacun des intervalles $x_n x_{n+1}$, en multipliant le nombre des points de division suivant une loi quelconque, je dis que la somme Σ tend vers une limite, indépendante du choix des points x_n et ξ_n.

Il suffit d'établir à cet effet:

1° que, pour un choix déterminé des points x_n et ξ_n, il y a une limite;

2° que la différence entre deux sommes Σ_1 et Σ_2, correspondant à deux modes de division quelconques et à des choix arbitraires des points ξ_n, reste inférieure à un nombre aussi petit qu'on veut, dès que le nombre des points de division, dans chacun des deux modes, est devenu suffisamment grand.

Nous supposerons, pour préciser, $a < b$, de sorte que chacune des différences $x_{n+1} - x_n$ est positive; les raisonnements seraient analogues si $a > b$.

Première partie. – Considérons une loi de division quelconque, telle cependant qu'on passe d'une division à la suivante en fractionnant chacun des intervalles; dans chaque intervalle $x_n x_{n+1}$ prenons pour

ξ_n le point qui correspond à la plus petite valeur de $f(x)$ dans cet intervalle[1], ce qui donne, dans la somme Σ, le terme

$$(4) \qquad (x_{n+1} - x_n) f(\xi_n)$$

Dans la division suivante, l'intervalle $x_n\, x_{n+1}$ est fractionné par des points de subdivision $x'_1, x'_2, \dots x'_k$, ce qui donne, dans la somme suivante, Σ', les termes :

$$(5) \qquad (x'_1 - x_n) f(\xi'_0) + (x'_2 - x'_1) f(\xi'_1) + \cdots + (x_{n+1} - x'_k) f(\xi'_k).$$

Or d'après l'hypothèse, $f(\xi'_0)$, $f(\xi'_1)$, ... sont supérieurs ou égaux à $f(\xi_n)$, de sorte que la somme des termes (5) est supérieure ou égale à

$$f(\xi_n)\left[(x'_1 - x_n) + (x'_2 - x'_1) + \cdots + (x_{n+1} - x'_k)\right] = (x_{n+1} - x_n) f(\xi_n),$$

c. à. d. supérieure ou égale au terme correspondant (4) de Σ. La somme Σ' est donc supérieure ou égale à la somme précédente, Σ, c'est-à-dire que les sommes successives vont en croissant, ou du moins ne décroissent jamais : d'ailleurs, si M désigne le maximum de $f(x)$ entre a et b[1], ces sommes ne peuvent évidemment dépasser le nombre $M(b-a)$, puisque $f(\xi_n) \leqq M$. Or une quantité variable qui croît sans cesse (ou qui ne décroît jamais) et qui reste inférieure à un nombre fini tend évidemment vers une limite déterminée ; donc les sommes successives Σ, Σ', ... ont une limite.

C. q. f. d.

Deuxième partie. – Soient maintenant (x) et (z) deux lois de division indéfinie de l'intervalle ab ; considérons à un même instant les points

$$a,\ x_1,\ x_2, \dots x_n,\ x_{n+1}, \dots x_p,\ b$$

donnés par la loi (x) ; et les points

$$a,\ z_1,\ z_2, \dots\dots\dots z_q,\ b$$

donnés par la loi (z). Soient ξ_n et ζ_n les points arbitrairement choisis dans chacun des intervalles $x_n\, x_{n+1}$ et $z_n\, z_{n+1}$; il s'agit de comparer les sommes :

---

(1) Car une fonction continue dans un intervalle a, dans cet intervalle, une valeur plus petite et une valeur plus grande que toutes les autres.

$$\Sigma_1 = S\,(x_{n+1} - x_n)\, f\,(\xi_n)$$

et

$$\Sigma_2 = S\,(z_{n+1} - z_n)\, f\,(\zeta_n)$$

Pour plus de simplicité, nous comparerons chacune d'elles à une troisième somme analogue, Σ_3, qui correspondra à une division de l'intervalle ab formée par l'ensemble des points $x_1, \dots x_p, z_1, \dots z_q$, et à des points θ_i choisis arbitrairement dans chacun des intervalles de cette division.

Si nous comparons Σ_1 à Σ_3, nous voyons qu'à l'intervalle $x_n\, x_{n+1}$ correspond dans Σ_1 le terme

(6) $$(x_{n+1} - x_n)\, f\,(\xi_n),$$

et dans Σ_3 des termes :

(7) $$(z_h - x_n)\, f(\theta_i) + (z_{h+1} - z_h)\, f\,(\theta_{i+1}) + \dots + (x_{n+1} - z_k)\, f\,(\theta_j)$$

La différence δ_n des deux expressions (7) et (6) peut s'écrire :[1]

$$\delta_n = (z_h - x_n)\left[f\,(\theta_i) - f\,(\xi_n)\right] + (z_{h+1} - z_h)\left[f\,(\theta_{i+1}) - f\,(\xi_n)\right] + \dots + (x_{n+1} - z_k)\left[f(\theta_j) - f(\xi_n)\right]$$

Or la fonction $f\,(x)$ est continue, et par suite uniformément continue, entre a et b ; elle a donc, dans cet intervalle, et pour un nombre donné ε, un module de continuité uniforme $\eta\,(\varepsilon)$. Comme d'ailleurs chacune des subdivisions $x_n\, x_{n+1}$ et $z_n\, z_{n+1}$ tend vers zéro, il arrivera un moment où toutes ces subdivisions seront inférieures à $\eta\,(\varepsilon)$, de sorte que, en vertu de la définition de la continuité uniforme, toutes les quantités $f\,(\theta) - f\,(\xi_n)$ qui figurent dans δ_n, seront inférieures à ε, en valeur absolue. On aura alors :

$$\text{mod } \delta_n < \varepsilon\left[(z_h - x_n) + (z_{h+1} - z_h) + \dots + (x_{n+1} - z_k)\right]$$

c'est-à-dire

$$\text{mod } \delta_n < \varepsilon\,(x_{n+1} - x_n)$$

La différence entre Σ_3 et Σ_1 étant la somme des différences partielles δ_n aura donc son module inférieur à $\varepsilon\,(b - a)$; c. à. d. restera plus petite

---

[1] On suppose qu'entre x_n et x_{n+1} il y a des points $z_h, z_{h+1}, \dots z_h$ de la division (z). S'il n'y en avait pas, δ_n serait égal à $(x_{n+1} - x_n)\left[f\,(\theta_i) - f\,(\xi_n)\right]$, et le raisonnement ultérieur ne subirait aucune modification.

que toute quantité donnée quand le nombre des points de division dans les lois (x) et (z) sera devenu assez grand. Il en sera de même de la différence entre $\sum_3$ et $\sum_2$, et par suite enfin de la différence $\sum_2 - \sum_1$.

Donc si $\sum_1$ a une limite, $\sum_2$ aura la même limite, et comme nous avons reconnu l'existence d'une limite pour un choix convenable des points x_n et ξ_n, il en résulte que la somme (3) a une limite déterminée, indépendante du choix des points x_n et ξ_n.

c. q. f. d.

168. – Cette limite se nomme l'intégrale définie de la fonction $f(x)$ entre a et b ; et, pour rappeler son origine, on la représente par le symbole sommatoire

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Il est indispensable d'observer que l'existence de l'intégrale définie n'est établie qu'à deux conditions ; il faut :

1° que la fonction $f(x)$ soit continue dans le champ d'intégration, c. à. d. de a à b, et aussi pour $x = a$, $x = b$.

2° qu'aucune des limites de l'intégrale, a et b, ne soit infinie ; car on a essentiellement supposé plus haut que $M(b-a)$ était fini, et que $\varepsilon(b-a)$ pouvait devenir plus petite que toute quantité donnée. De plus, la continuité uniforme, sur laquelle on s'est appuyé, n'existe sûrement que dans un intervalle fini (N° 166).

Si donc on veut étendre la notion d'intégrale définie au cas d'une fonction non continue, ou au cas d'un champ infini, une étude nouvelle sera nécessaire.

169. – Propriétés de l'intégrale définie. – De la définition de l'intégrale résultent immédiatement plusieurs propriétés ; rappelons-nous que $\int_a^b f(x)\,dx$ est la limite, dans les conditions expliquées, de la somme :

$$(3) \qquad \sum = (x_1 - a) f(\xi_0) + \cdots + (x_{n+1} - x_n) f(\xi_n) + \cdots + (b - x_p) f(\xi_p)$$

1° Si on permute les limites d'intégration, a et b, l'intégrale change de signe. Car, en allant de b vers a, on rencontre les points x_n dans l'ordre $x_p, \ldots x_{n+1}, x_n, \ldots x_2, x_1$; de sorte que $\int_b^a f(x)\,dx$ est, par définition, la limite de la somme

$$(x_p - b) f(\xi_p) + \cdots\cdots + (x_n - x_{n+1}) f(\xi_n) + \cdots + (a - x_1) f(\xi_0),$$

qui est égale et de signe contraire à la somme (3) à chaque instant, et par suite à la limite.

2° Soit c une quantité finie quelconque, telle que $f(x)$ soit continue entre la plus grande et la plus petite des quantités a, b, c; on a :

$$(8) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

La relation est évidente si c est compris entre a et b; s'il en est autrement, soit par exemple $a < b < c$: en permutant les limites de la dernière intégrale et changeant son signe, la relation devient

$$\int_a^b = \int_a^c - \int_b^c, \quad \text{ou} \quad \int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$$

ce qui est évident.

3° Soient M et m le maximum et le minimum de $f(x)$ entre a et b; si on suppose $a < b$, les quantités $x_{n+1} - x_n$ sont positives, on augmente donc la somme (3) en remplaçant les $f(\xi_n)$ par M, et on la diminue en les remplaçant par m. Donc, en passant à la limite :

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M(b-a) \ldots\ldots\ldots (a < b)$$

Si on suppose $a > b$, les résultats sont inversés :

$$m(b-a) \geqq \int_a^b f(x)\,dx \geqq M(b-a) \ldots\ldots\ldots (a > b)$$

mais, dans tous les cas, l'intégrale est comprise entre $m(b-a)$ et $M(b-a)$.

4° Si entre a et b, on a

$$\varphi(x) < f(x) < \psi(x)$$

on aura en supposant $x_{n+1} - x_n$ positif, c'est-à-dire $a < b$:

$$\varphi(\xi_n)(x_{n+1} - x_n) < f(\xi_n)(x_{n+1} - x_n) < \psi(\xi_n)(x_{n+1} - x_n)$$

d'où

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Si $a > b$, les inégalités seraient renversées.

5°. L'intégrale d'une fonction <u>impaire</u>, $f(x)$, entre deux limites égales et de signes contraires, est nulle.

En effet les deux éléments $f(x)\,dx$ et $f(-x)\,dx$ se détruisent, puisque
$$f(-x) = -f(x).$$

De même, si $f(x)$ est une fonction <u>paire</u> on a :
$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

170. _ Théorème. _ La dérivée de l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ par rapport à la limite supérieure, b, est $f(b)$.

Soit en effet I cette intégrale ; si on change b en $b+h$, on a, pour l'accroissement ΔI :
$$\Delta I = \int_a^{b+h} - \int_a^b = \int_b^{b+h} f(x)\,dx$$

Or, $f(x)$ étant continue pour $x = b$, on peut prendre h assez petit pour que, dans l'intervalle de b à $b+h$, $f(x)$ soit compris entre $f(b) - \varepsilon$ et $f(b) + \varepsilon$, le nombre ε étant aussi petit qu'on veut ; donc (N°. 169, 3°) l'intégrale
$$\Delta I = \int_b^{b+h} f(x)\,dx$$
sera comprise entre $h\left[f(b) - \varepsilon\right]$ et $h\left[f(b) + \varepsilon\right]$, et le rapport $\frac{\Delta I}{h}$ aura bien pour limite $f(b)$

C. q. f. d.

La dérivée de I par rapport à sa limite inférieure, a, est $-f(a)$, car $\int_a^b = -\int_b^a$.

171. _ Corollaire. _ Toute fonction $f(y)$, continue dans un intervalle ab, est la dérivée, dans le même intervalle, d'une fonction $F(y)$.

Car la fonction bien déterminée
$$F(y) = \int_a^y f(x)\,dx$$
où y reste entre a et b, a pour dérivée $f(y)$, par rapport à y [1].

---

[1] La fonction $F(y)$, ayant une dérivée dans l'intervalle ab, est nécessairement continue dans cet intervalle, comme on le voit aisément.

Remarque I. — L'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est une fonction de a, de b et des paramètres qui peuvent figurer dans f; mais elle n'est pas fonction de la lettre x, par rapport à laquelle on effectue la sommation : de même la somme $\sum x^2$ étendue aux nombres entiers de n à N n'est fonction que des limites n et N. Par conséquent, les deux expressions $\int_a^b f(x)\,dx$ et $\int_a^b f(u)\,du$ désignent une même quantité. Souvent on rencontre des intégrales de la forme $\int_a^x f(x)\,dx$: il ne faudra pas oublier que la lettre x joue là deux rôles différents, ce qu'on voit nettement en écrivant l'intégrale $\int_a^x f(u)\,du$.

Remarque II. — Il résulte du corollaire ci-dessus que toute fonction continue a une fonction primitive, tandis que (N.° 8, Remarque) elle n'a pas nécessairement une dérivée. Ce fait inattendu mérite d'être signalé.

II. — Calcul des Intégrales définies; aires planes.

---

172. — Formule fondamentale. — Supposons trouvée une fonction $F(x)$, ayant pour dérivée $f(x)$; d'après le théorème du N.° 170, les deux fonctions, de b :

$$F(b) \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)\,dx$$

ont même dérivée; elles ne diffèrent donc que par une constante :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - C$$

on détermine C en faisant $b = a$: le premier membre étant évidemment nul, $C = F(a)$. Donc :

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a), \tag{1}$$

formule fondamentale pour le calcul des intégrales définies.

Si dans cette relation on remplace b par x, on voit que la fonction

primitive $F(x)$, c'est-à-dire l'intégrale indéfinie $\int f(x)\,dx$, n'est autre chose, à une constante près, que l'intégrale définie $\int_a^x f(x)\,dx$, où la limite supérieure est x, et la limite inférieure quelconque. Cette analogie justifie, et le nom d'intégrales donné aux fonctions primitives, et le symbole $\int f(x)\,dx$ adopté précédemment pour ces fonctions.

173. — Les procédés généraux de calcul indiqués pour les intégrales indéfinies s'appliquent naturellement aux intégrales définies. Par exemple, si l'on a :

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x) + \cdots\cdots$$

On en déduit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b \psi(x)\,dx + \cdots\cdots$$

c'est le procédé de décomposition en éléments simples.

De même, la formule d'intégration par parties subsiste; car de l'identité :

$$[f\varphi]' = f'\varphi + f\varphi', \quad \text{.......... on déduit}$$

$$\int_a^b [f\varphi]'\,dx = \int_a^b f'\varphi\,dx + \int_a^b f\varphi'\,dx\,.$$

Or le premier membre (N° 172) est $f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a)$, ce qu'on écrit plus simplement $[f\varphi]_a^b$; donc :

$$\int_a^b \varphi f'\,dx = [f\varphi]_a^b - \int_a^b \varphi' f\,dx$$

On établirait de même la formule du changement de variable dans les intégrales définies; mais il est préférable pour la rigueur, de faire la démonstration en s'appuyant sur la définition même de l'intégrale, plutôt que sur son lien avec l'intégrale indéfinie.

174. — Changement de variable. — Dans l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

remplaçons x par une nouvelle variable, t, en posant

$$x = \varphi(t);$$

il s'agit d'obtenir l'intégrale transformée en t.

Soient α et β les valeurs de t qui correspondent aux valeurs a et b de x ; on supposera :

1°. essentiellement, que la fonction $\varphi(t)$ et sa dérivée $\varphi'(t)$ sont déterminées et continues dans l'intervalle $\alpha\beta$;

2°. provisoirement, que $\varphi'(t)$ garde un signe constant dans le même intervalle.

Faisons maintenant varier t de α à β, en passant par des valeurs successives

$$\alpha, t_1, t_2 \ldots\ldots t_n, t_{n+1} \ldots \beta.$$

D'après les hypothèses, $\varphi'(t)$ étant toujours de même signe entre α et β, la fonction $\varphi(t)$, c'est-à-dire x, varie toujours dans le même sens de $\varphi(\alpha)$ à $\varphi(\beta)$, c'est-à-dire de a à b ; par suite, aux valeurs ci-dessus de t, correspondront, pour x, des valeurs :

$$a, x_1, x_2, \ldots x_n, x_{n+1}, \ldots b$$

qui seront rangées par ordre de grandeur croissante ou décroissante, selon que $b > a$ ou $b < a$:

D'ailleurs on a, en vertu du théorème des accroissements finis :

$$x_{n+1} - x_n = \varphi(t_{n+1}) - \varphi(t_n) = (t_{n+1} - t_n)\,\varphi'(\tau_n),$$

τ étant compris entre t_n et t_{n+1} : soit ξ_n la valeur de x qui correspond à $t = \tau_n$; elle sera, d'après ce qui précède, comprise entre x_n et x_{n+1}. Multiplions les deux membres de la dernière relation par $f(\xi_n)$, c'est-à-dire par $f[\varphi(\tau_n)]$, et ajoutons toutes les relations analogues, obtenues en faisant varier n ; il vient :

$$\sum f(\xi_n)\left[x_{n+1} - x_n\right] = \sum f\left[\varphi(\tau_n)\right](t_{n+1} - t_n)\,\varphi'(\tau_n).$$

A la limite, en faisant tendre vers zéro les intervalles $t_{n+1} - t_n$, et par suite les intervalles $x_{n+1} - x_n$, on aura

$$(2) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt$$

C'est la formule du changement de variable ; α et β sont les valeurs de t qui correspondent aux valeurs a et b de x.

Affranchissons-nous maintenant de la restriction provisoire relative au signe de $\varphi'(t)$, et supposons, par exemple, que t allant de α à β, $\varphi'(t)$ change de signe pour les valeurs $t=\gamma$ et $t=\delta$, soient c et d les valeurs correspondantes de x, $c=\varphi(\gamma)$, $d=\varphi(\delta)$.

La formule (2) est applicable dans chacun des intervalles $\alpha\gamma$, $\gamma\delta$ et $\delta\beta$, puisque dans chacun d'eux $\varphi'(t)$ garde un signe constant ; on a donc :

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

$$\int_c^d \text{———} = \int_\gamma^\delta \text{———}$$

$$\int_d^b \text{———} = \int_\delta^\beta \text{———}.$$

d'où, en ajoutant, et quelque soit l'ordre de grandeur des quantités a, b, c, d[1] (N° 169, 2°) :

(2) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt \quad \ldots\ldots\ldots \text{Donc :}$$

Règle. – <u>Pour faire le changement de variable, remplacer dans l'intégrale x par $\varphi(t)$; dx par $\varphi'(t)\,dt$, et prendre pour nouvelles limites les valeurs de t qui correspondent aux anciennes limites de x.</u>

175. – Il faut, en appliquant cette règle, prendre garde aux valeurs multiples que peuvent avoir parfois t, $\varphi(t)$ ou $\varphi'(t)$, pour une même valeur de x ou de t.

Par exemple, dans l'intégrale $\int_{-1}^{+1} dx$, égale à 2, posons $x=t^{\frac{3}{2}}$. La fonction $\varphi(t)=t^{\frac{3}{2}}$ et sa dérivée, $\frac{3}{2}\sqrt{t}$, étant continues, la règle peut s'appliquer ; or pour $x=\pm 1$, la relation $x^2=t^3$ donne $t^3=1$, c. à d. $t=1$. On aurait donc, en appliquant sans discernement la formule (2) :

$$\int_{-1}^{+1} dx = \int_1^1 \frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt = 0\,;$$

car la seconde intégrale à ses limites égales.

---

[1] Il peut se faire que les quantités c ou d sortent de l'intervalle ab ; pour que la formule (3) soit applicable, il faut que $f(x)$ soit continue, non seulement entre a et b, comme cela doit être, mais entre la plus grande et la plus petite des quantités a, b, c, d. En d'autres termes $f(x)$ doit être continue pour toutes les valeurs de $x=\varphi(t)$, qui correspondent aux valeurs de t comprises entre α et β.

L'erreur provient de ce que, en écrivant $dx = \frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt$, on doit choisir le signe de $\sqrt{t}$ de manière que dx soit positif, puisque x croît de -1 à $+1$: Or, x allant de -1 à 0, t va de 1 à 0 et dt est négatif; on doit donc écrire

$$dx = -\frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt \ldots\ldots\ldots\ldots \text{de } t=1 \text{ à } t=0.$$

Au contraire, x allant de 0 à 1, t va de 0 à 1 et dt est positif; donc:

$$dx = +\frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt \ldots\ldots\ldots\ldots \text{de } t=0 \text{ à } t=1.$$

La formule exacte est donc :

$$\int_{-1}^{+1} dx = \int_{-1}^{0} dx + \int_{0}^{1} dx = -\int_{1}^{0}\frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt + \int_{0}^{1}\frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt = 3\int_{0}^{1}\sqrt{t}\,dt = \left[2t^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{1} = 2.$$

176. – Formule de Wallis. – On fera, dans la suite du Cours, un fréquent usage des procédés de calcul indiqués ci-dessus; aussi se bornera-t-on ici à une seule application.

Considérons l'intégrale :

$$I_m = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx.$$

On peut écrire, en intégrant par parties

$$I_m = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^{m-1}x}_{u}\,(\underbrace{\sin x\,dx}_{dv}) = -\left[\sin^{m-1}x\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}x\cos^2 x\,dx$$

Si m est supérieur à 1, le terme tout intégré s'annule aux deux limites; quant à la dernière intégrale en y remplaçant $\cos^2 x$ par $1-\sin^2 x$, elle s'écrit $I_{m-2} - I_m$. On a donc :

$$I_m = (m-1)\left[I_{m-2} - I_m\right] \ldots\ldots\ldots\ldots \text{c. à. d.}$$

$$(3) \qquad I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$$

Supposons maintenant m entier; cette relation de récurrence permet de ramener $I_2, I_4, \ldots I_{2p}$ à I_0; et $I_3, I_5, \ldots I_{2p+1}$ à I_1. On a ainsi :

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p}\cdot\frac{2p-3}{2p-2}\ldots\ldots\ldots\frac{1}{2}I_0$$

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}\;\frac{2p-2}{2p-1}\ldots\ldots\ldots\frac{2}{3}I_1$$

Or $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$; $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \Big[-\cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. Donc :

$$I_{2p} = \frac{1.\,3.\,5 \ldots\ldots 2p-1}{2.\,4.\,6 \ldots\ldots 2p} \; \frac{\pi}{2}$$

$$I_{2p+1} = \frac{2.\,4.\,6 \ldots\ldots 2p}{3.\,5.\,7 \ldots\ldots 2p+1} \, ;$$

ce qui donne la valeur de I_m, pour m entier et positif : on peut déduire de là une formule remarquable. Divisons en effet membre à membre les deux dernières relations ; il vient.

(4) $$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdot \frac{6.6}{5.7} \ldots\ldots \frac{2p.\,2p}{(2p-1)(2p+1)} \cdot \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \, .$$

Or il est aisé de trouver une limite supérieure et une limite inférieure du rapport $\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}}$. En effet, il est clair que les intégrales I_m décroissent quand m augmente, car x étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, $\sin x$ est compris entre 0 et 1, de sorte que l'élément de l'intégrale, $\sin^m x.\,dx$, diminue lorsque m croît ; donc (N° 169, 4°) :

$$I_{2p+1} < I_{2p} < I_{2p-1}$$

c'est-à-dire

$$1 < \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} < \frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}}$$

Or, par la formule (3), le dernier rapport est égal à $\frac{2p+1}{2p}$; par suite :

$$1 < \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} < 1 + \frac{1}{2p} \, ;$$

d'où il résulte que le rapport $\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}}$ tend vers 1 pour p infini. La relation (4) donne ainsi :

$$\frac{\pi}{2} = \lim.\, \frac{2.\,2}{1.\,3} \; \frac{4.4}{3.\,5} \cdot \frac{6.6}{5.7} \ldots\ldots \frac{2p.\,2p.}{(2p-1)(2p+1)} \ldots\ldots \text{(pour } p \text{ infini)}.$$

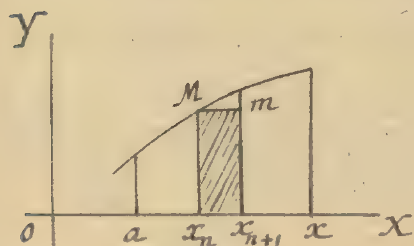
Cette formule remarquable est due à Wallis (1655).

Evaluation des aires planes.

177. — On a vu au N° 163 comment Newton établissait une liaison entre les aires planes et les fonctions primitives (ou les intégrales définies); mais on a fait observer à ce propos que la notion d'aire n'est pas une notion première et il importe avant tout de la préciser.

La Géométrie élémentaire ne définit directement que les aires des figures composées de droites; les aires terminées par des arcs de courbe sont définies comme des limites, de la manière suivante.

Considérons (axes rectangulaires) la courbe $Y = f(X)$, et les droites $X = a$, $X = x$; marquons sur OX, en allant de a vers x, des points $x_1, x_2, \dots x_n, \dots x_p$: l'aire comprise entre la courbe, l'axe des X et les deux ordonnées extrêmes a et x, sera par définition la limite (si elle existe) de la somme des aires des rectangles $x_n M m x_{n+1}$, c'est-à-dire de la somme



$$(\Sigma) \qquad \sum (x_{n+1} - x_n) f(x_n),$$

quand toutes les bases des rectangles tendront vers zéro.

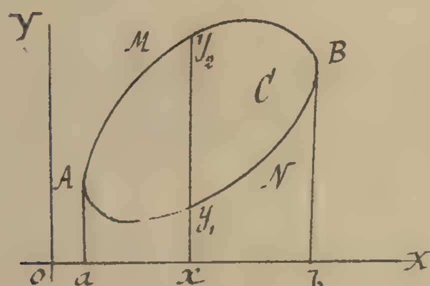
Or cette limite existe; c'est précisément (N° 167) l'intégrale définie $\int_a^x f(x)\,dx$: en d'autres termes, au lieu d'admettre avec Newton l'existence a priori de l'aire et d'y rattacher l'intégrale, on définit l'aire par l'intégrale, l'existence de celle-ci ayant été préalablement établie par l'analyse.

Les deux méthodes conduisent à la même conclusion : l'aire considérée ci-dessus a pour valeur $\int_a^x f(x)\,dx$, en observant toutefois que l'élément $(x_{n+1} - x_n) f(x_n)$ de la somme (Σ) a le signe + si $(x_{n+1} - x_n)$ et $f(x_n)$ sont de même signe, et le signe — dans le cas contraire. En d'autres termes, si $a < x$, les parties de l'aire situées au-dessus de OX (Correspondant à $f(x_n) > 0$) sont comptées positivement, et celles situées au-dessous, négativement; le contraire a lieu si $a > x$.

Si on a à calculer l'aire d'une portion quelconque du plan, on la divise en aires partielles, telles que le contour de chaque aire

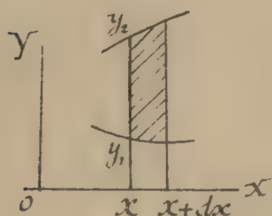
soit rencontré en deux points, au plus, par toute parallèle à Oy.

Soient alors : $y_1(x)$ et $y_2(x)$ les ordonnées des deux points où un des contours, C, est coupé par la droite $X = x$, $(y_2 > y_1)$; a et b les abscisses des parallèles extrêmes à OY qui rencontrent le contour.

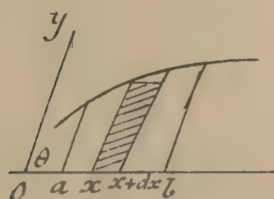


L'aire C, différences des deux aires $aAMBb$ et $aANBb$ a pour valeur :

$$\mathcal{A} = \int_a^b y_2\,dx - \int_a^b y_1\,dx = \int_a^b (y_2 - y_1)\,dx.$$



On aurait pu l'écrire directement en observant que $(y_2 - y_1)\,dx$ est évidemment la valeur principale de l'aire (ombrée) comprise entre le contour et les droites $X = x$, $X = x + dx$.



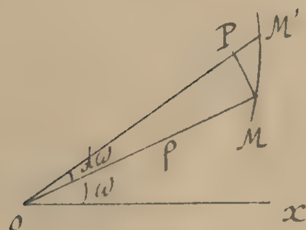
Axes non rectangulaires. — Si les axes de coordonnées font un angle θ, l'aire comprise entre la courbe $y = f(x)$, l'axe des x et les deux droites $x = a$, $x = b$, sera

$$\sin\theta \int_a^b f(x)\,dx,$$

car le parallélogramme ombré a pour valeur principale de son aire

$\sin\theta . f(x)\,dx$.

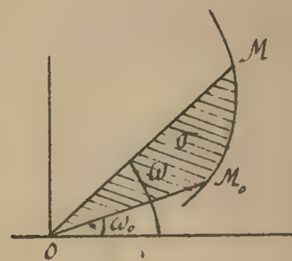
177 bis. — Coordonnées polaires. Soit $\rho = f(\omega)$ une courbe ; l'aire OMM', comprise entre un arc MM' de cette courbe et les deux rayons vecteurs qui font avec Ox les angles ω et $\omega + d\omega$, a pour valeur principale l'aire du secteur circulaire OMP, c. à. d. $\frac{1}{2}\rho^2 d\omega$: car la partie négligée, l'aire MPM', est évidemment du second ordre par rapport à $d\omega$.



Ainsi, en appelant σ l'aire comprise entre la courbe, un rayon vecteur fixe

OM, d'angle polaire ω_0, et un rayon vecteur mobile, OM, d'angle polaire ω, on a :

$$d\sigma = \frac{1}{2}\rho^2 d\omega \ldots\ldots\ldots \text{d'où :}$$

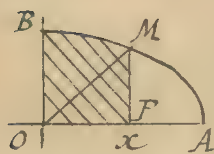


(1) $$\sigma = \frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega} \rho^2 d\omega$$

Exemples.

178. – Ellipse. – L'aire (ombrée) comprise entre les axes ox, oy, l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, et la parallèle à Oy d'abcisse x est :

(2) $$\mathcal{A} = \int_0^x y\, dx = \frac{b}{a}\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$



On a ainsi à intégrer une fonction qui contient un radical de la forme $\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}$: on pourrait appliquer la méthode du N° 133 ; il sera plus simple de suivre la méthode de réduction des intégrales hyperelliptiques (N° 160). On a en faisant passer le radical au dénominateur :

(3) $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Au dernier membre, la première intégrale est (N° 119) : $a^2 \arcsin \frac{x}{a}$; pour réduire la seconde, partons de l'identité :

$$\left[x\sqrt{a^2 - x^2}\right]' = \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad ; \quad \text{d'où :}$$

$$x\sqrt{a^2 - x^2} = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - 2\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

c'est-à-dire

(4) $$-\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{2}\, x\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Donc finalement, en portant cette valeur dans (3) :

(5) $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$$

et par suite, d'après (2) :

$$\mathcal{A} = \frac{b}{2a}\left[a^2 \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right]_0^x = \frac{b}{2a}\left[a^2 \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right]$$

Le second terme de $\mathcal{A}$ est l'aire du triangle OMP ; donc le premier terme,

$$\frac{ab}{2} \arcsin\frac{x}{a}$$

est l'aire du secteur elliptique BOM.

L'aire du premier quadrant, OBA, de l'ellipse s'obtient en faisant dans $\mathcal{A}$, $x = a$; on a ainsi

$$\text{aire } OBA = \frac{\pi ab}{4}; \ldots\ldots \text{ formule connue.}$$

Remarque. — On aurait pu trouver l'intégrale $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ par une voie plus courte en posant $x = a\sin t$; d'où :

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\int\cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt$$

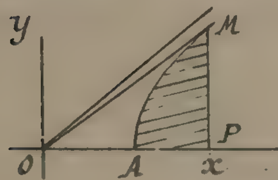
$$= \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right] = \frac{a^2}{2}\left[t + \sin t\cos t\right]$$

et en remplaçant t par $\arcsin\frac{x}{a}$; $\sin t$ par $\frac{x}{a}$, $\cos t$ par $\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$:

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$$

comme on l'a trouvé plus haut (formule (5)).

Hyperbole. — L'aire du segment AMP de l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est :



$$\mathcal{A} = \int_a^x y\,dx = \frac{b}{a}\int_a^x\sqrt{x^2-a^2}\,dx$$

Appliquons encore, pour calculer cette intégrale, la méthode de réduction :

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \int\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = -a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} + \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

au premier membre, la première intégrale est (N° 119) : $-a^2\log\left[x+\sqrt{x^2-a^2}\right]$; réduisons la seconde. On a :

$$\left[x\sqrt{x^2-a^2}\right]' = \sqrt{x^2-a^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{2x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}} \; ; \quad \text{d'où :}$$

$$x\sqrt{x^2-a^2} = 2\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}} - a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} .$$

On en conclut, comme plus haut, la formule analogue à (5) :

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = -\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-a^2}$$

ce qui donne, en multipliant par $\frac{b}{a}$, et prenant l'intégrale entre x et a :

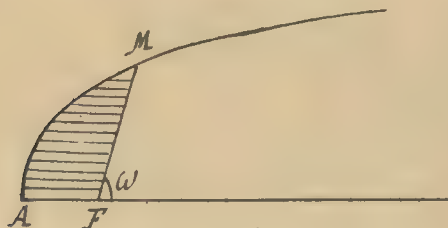
$$\mathcal{A} = \frac{b}{2a}\left[x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 \log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right]$$

On peut observer que le premier terme de $\mathcal{A}$ est l'aire du triangle OMP ; donc le second terme (changé de signe) :

$$\frac{ab}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

est l'aire du triangle curviligne OAM.

Parabole. – La parabole, rapportée à son foyer et à son axe a pour équation, en coordonnées polaires :



$$\rho = \frac{p}{1-\cos\omega} \; ;$$

l'aire FAM (ombrée) a donc pour valeur

$$\mathcal{A} = \frac{p^2}{2}\int_\omega^\pi \frac{d\omega}{(1-\cos\omega)^2} = \frac{p^2}{2}\int_\omega^\pi\frac{d\omega}{4\sin^4\frac{\omega}{2}}$$

On a à intégrer une fonction paire de $\sin\frac{\omega}{2}$ (et $\cos\frac{\omega}{2}$) ; on posera donc (N° 146, 1°)

$$tg\,\frac{\omega}{2} = t \; ; \qquad \text{d'où :}$$

$$\int\frac{d\omega}{\sin^4\frac{\omega}{2}} = \int\frac{2dt}{1+t^2}\cdot\frac{(1+t^2)^2}{t^4} = 2\int\frac{1+t^2}{t^4}\,dt$$

$$= -\frac{2}{3t^3} - \frac{2}{t} = -\frac{2}{3}\,\frac{3\,tg^2\frac{\omega}{2}+1}{tg^3\frac{\omega}{2}} \quad ; \ldots\ldots\ldots \text{par suite}$$

$$\mathcal{A} = \frac{p^2}{12}\,\frac{3\,tg^2\frac{\omega}{2}+1}{tg^3\frac{\omega}{2}}$$

Nous aurons occasion de rencontrer plus tard d'autres exemples.

III. – Extension de la notion d'Intégrale définie.

Nous avons essentiellement supposé jusqu'ici que la fonction à intégrer était continue entre les limites d'intégration et qu'aucune de celles-ci n'était infinie (N° 168); essayons maintenant de nous affranchir de ces restrictions, en commençant par le cas des

Limites infinies.

179. – Si la limite supérieure, par exemple, est infinie, on définit l'intégrale par la relation

$$(6) \qquad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \text{limite, pour } p = +\infty, \text{ de } \int_a^p f(x)\,dx$$

définition qui n'a de sens, bien entendu, que si le second membre a une limite, pour p infini : tout revient donc à voir si cette limite existe.

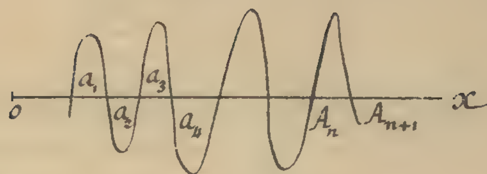
Or on ne peut donner de règle générale permettant de reconnaître, dans tous les cas, l'existence de la limite, de même que, dans la théorie des séries il n'y a pas de règle générale pour reconnaître la convergence : Comme dans la théorie des séries, on ne peut qu'indiquer des règles particulières, qui reposent sur la comparaison de l'intégrale proposée avec des intégrales à limite supérieure infinie, qu'on sait, a priori, être (ou non) finies et déterminées.

Observons d'abord que l'intégrale $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ne peut être finie et déterminée que si l'une ou l'autre des deux conditions suivantes est remplie :

1° Si $f(x)$ finit par garder un signe constant quand x tend vers $+\infty$, il faut que $f(x)$ ait zéro pour limite, pour x infini : car autrement, $f(x)$ restant, par exemple, positif et supérieur à un nombre positif, A, l'intégrale $\int_a^p f(x)\,dx$ serait supérieure à $A\int_a^p dx$, quantité qui devient infinie avec p.

2° Si $f(x)$ change une infinité de fois de signe quand x tend vers $+\infty$, c'est-à-dire si la courbe $y = f(x)$ traverse une infinité de fois l'axe des x, l'aire indéfinie comprise entre cette courbe, l'ordonnée fixe, $x = a$ et Ox a pour expression :

$$\mathcal{A} = \text{Const} + a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$



a_1, a_3, ... étant les aires des boucles situées au-dessus de Ox; a_2, a_4, ... celles des boucles situées en dessous. L'aire totale $\mathcal{A}$ se présente ainsi sous la forme d'une série, et, pour qu'elle ait une valeur finie et déterminée, il est nécessaire que le terme général, a_n, tende vers zéro : il faut pour cela, ou que l'ordonnée $f(x)$ de la courbe tende vers zéro, pour x infini ; conclusion analogue à celle du cas précédent ; ou bien que les bases $A_n A_{n+1}$ des boucles successives aient pour limite zéro.

Donc enfin :

Pour que l'intégrale $\int_a^\infty f(x)\,dx$ puisse être finie et déterminée, il est nécessaire : ou bien que $f(x)$ tende vers zéro pour x infini ; ou bien que $f(x)$ change une infinité de fois de signe entre a et $+\infty$, et de telle sorte que les intervalles où le signe demeure constant tendent vers zéro.

Ce second cas est rarement rencontré dans les applications ; en général, on n'a à étudier que des intégrales pour lesquelles $f(x)$ tend vers zéro, et voici, à leur sujet, les règles particulières les plus usuelles.

180. — On procède par comparaison avec l'intégrale $\int_a^\infty \frac{dx}{x^n}$, qu'on peut calculer directement. Cette intégrale (en supposant $a > 0$, pour éviter la discontinuité, qui correspondrait à $x = 0$, de la fonction $\frac{1}{x^n}$) est finie et déterminée pour $n > 1$, et infinie pour $n \leqq 1$. Cela résulte immédiatement des relations :

$$\int_a^p \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}\left\{\frac{1}{a^{n-1}} - \frac{1}{p^{n-1}}\right\}, \quad \text{si } n \gtrless 1 ;$$

(7)

$$\int_a^p \frac{dx}{x} = \log p - \log a, \qquad \text{si } n = 1 .$$

On déduit de là par comparaison, deux propositions plus étendues, d'une application fréquente.

I. – Si $f(x)$ peut se mettre sous la forme $\frac{\psi(x)}{x^n}$, la fonction $\psi(x)$ demeurant finie pour x infini, et n étant supérieur à l'unité, l'intégrale

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

a une valeur finie et déterminée.

Ce cas se présente, en particulier, lorsque, pour x infini, $\psi(x)$ a une limite finie.

II. – L'intégrale a au contraire une valeur infinie si n est inférieur ou égal à l'unité, et si, lorsque x tend vers l'infini, $\psi(x)$ finit par garder un signe constant et par rester supérieur, en valeur absolue, à un nombre positif non nul.

Ce cas se présente, en particulier, lorsque, pour x infini, $\psi(x)$ a une limite finie ou infinie, mais différente de zéro.

Voici la démonstration de ces deux importants théorèmes; on commencera par celle du second, qui est immédiate.

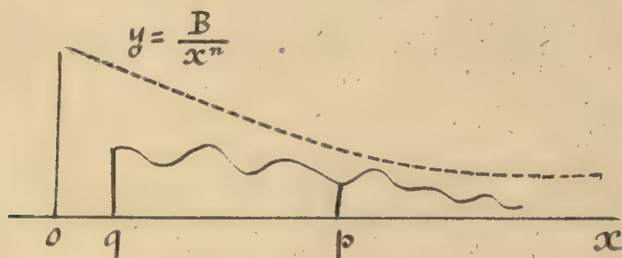
181. – Si, pour $x > q$, $\psi(x)$ reste positif, par exemple, et supérieur à A, l'intégrale $\int_q^p \frac{\psi(x)}{x^n}\,dx$ est supérieure (N° 169) à $A\int_q^p \frac{dx}{x^n}$, expression qui devient infinie avec p, puisque n est supposé inférieur ou égal à l'unité (N° 180). c. q. f. d.

182. – Dans le cas I, que nous abordons maintenant, dès que x dépasse une valeur q, $\psi(x)$ reste, par hypothèse, compris entre deux nombres finis, A et B ($A < B$); donc (N° 169) on a :

$$A\int_q^p \frac{dx}{x^n} < \int_q^p \frac{\psi(x)}{x^n}\,dx < B\int_q^p \frac{dx}{x^n}.$$

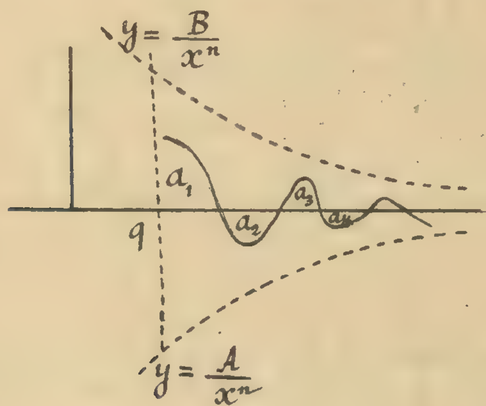
La quantité n étant supérieure à l'unité, l'intégrale qui figure dans les deux membres extrêmes a une limite finie pour p infini (N° 180); l'intégrale intermédiaire ne peut donc croître ou décroître au-delà de toute limite. Mais cette remarque ne suffit pas pour prouver qu'elle tend vers une limite déterminée lorsque p augmente indéfiniment.

a). L'existence d'une telle limite est à peu près évidente si A et B sont de même signe, c'est-à-dire si $\psi(x)$ [qui est compris entre A et B] garde un signe constant entre $x = q$ et $x = +\infty$. Dans ce cas, en effet, en supposant par exemple $\psi(x)$ positif, la courbe (trait plein) $y = \frac{\psi(x)}{x^n}$ a la forme ci-contre ; et l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x, l'ordonnée mobile $x = p$, augmente en même temps que p. D'un autre côté, on vient de voir qu'elle reste inférieure à une quantité finie : c'est donc une fonction de p qui croît constamment sans pouvoir dépasser un nombre fini ; elle a par suite une limite finie et déterminée.



b). Si A et B sont de signes contraires ($A < 0$, $B > 0$) c'est-à-dire si $\psi(x)$ change de signe une infinité de fois entre $x = q$ et $x = +\infty$, la courbe $y = \frac{\psi(x)}{x^n}$ a la forme ci-contre. Elle est comprise, par hypothèse entre les deux courbes

$$y = \frac{B}{x^n}; \quad y = \frac{A}{x^n}.$$



L'aire, $\mathcal{A}$, qui représente l'intégrale $\int_q^\infty \frac{\psi(x)}{x^n}dx$ est donnée par la série

$$\mathcal{A} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots\cdots$$

La somme, $\mathcal{S}$, des termes positifs de cette série :

$$\mathcal{S} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots\cdots$$

est finie et déterminée, puisqu'elle est inférieure à l'aire finie $B\int_q^\infty \frac{dx}{x^n}$; il en est de même de la somme, $\mathcal{S}'$ des termes négatifs, pris en valeur absolue :

$$\mathcal{S}' = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots\cdots$$

laquelle est inférieure à l'aire finie (mod. A) $\int_q^\infty \frac{dx}{x^n}$. Or il est clair

que si deux séries, S et S', à termes positifs, sont convergentes, la série obtenue en retranchant des termes de la première les termes de la seconde, dans un ordre quelconque, est convergente et a pour somme $S - S'$. L'aire A est donc finie et déterminée. C. q. f. d.

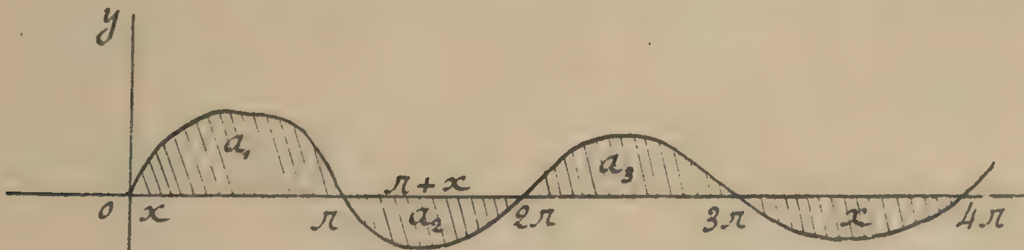
183. — Dans le cas II de $n \leqq 1$, si $\varphi(x)$ ne garde pas un signe constant quand x augmente indéfiniment, il peut se faire que dans l'intégrale $\int_q^p \frac{\varphi(x)}{x^n} dx$, les éléments positifs et négatifs se détruisent de telle sorte que l'intégrale ait une limite. C'est le cas de l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^n} dx, \quad \text{pour } n \leqq 1 \text{ et } > 0 \text{ [1]}$$

Pour établir que I a une limite, construisons la courbe

$$y = \frac{\sin x}{x^n}, \text{ à droite de } Oy$$

Elle se compose d'une infinité de boucles, de plus en plus



aplaties coupant Ox aux points d'abcisse $0, \pi, 2\pi, \ldots$

Soient en valeur absolue, $a_1, a_2, a_3, \ldots$ les aires (ombrées) des boucles successives ; on a :

$$I = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

Or les quantités $a_1, a_2, \ldots$ vont en diminuant ; car, à un élément $\frac{\sin x}{x^n} dx$ de l'aire a_1, par exemple, correspond l'élément $\frac{\sin(\pi + x)}{(\pi + x)^n} dx$ de l'aire a_2, inférieur au premier en valeur absolue, puisqu'on a évidemment

$$\operatorname{mod} \frac{\sin x}{x^n} dx > \operatorname{mod} \frac{\sin x}{(\pi + x)^n} dx$$

pour toute valeur positive de x.

---

[1] Si $n > 1$, l'intégrale $\int_1 \frac{\sin x}{x^n} dx$ (où on a pris 1 pour limite inférieure afin d'éviter la discontinuité qui correspond à $x = 0$) est finie et déterminée en vertu de la règle I.

De plus, a_p tend vers zéro quand p augmente, car, en valeur absolue, cette aire est inférieure à celle d'un rectangle de base π, dont la hauteur décroît indéfiniment.

L'intégrale I se présente ainsi sous la forme d'une série, à termes alternativement positifs et négatifs, qui décroissent en valeur absolue et ont zéro pour limite : elle a donc une limite finie et déterminée.

Remarque. — Ce résultat est d'autant plus intéressant que l'aire totale des boucles situées au-dessus de Ox : $a_1 + a_3 + \cdots$ est infinie, de même que l'aire totale des boucles situées au-dessous ; on établit ce point sans difficulté[1].

Discontinuité de la fonction.

184. — Cherchons maintenant à étendre la notion d'intégrale définie au cas de la discontinuité de la fonction.

1° Si $f(x)$ est discontinue pour la limite supérieure, b, on définit l'intégrale par la relation

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{limite, pour } \varepsilon = 0, \text{ de } \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

définition qui suppose que le second membre a une limite déterminée et finie quand ε tend vers zéro par valeurs positives.

2° On définit de même l'intégrale, dans le cas où la fonction est discontinue pour la limite inférieure, par la relation :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{limite, pour } \varepsilon' = 0, \text{ de } \int_{a+\varepsilon'}^b f(x)\,dx.$$

---

[1] Cela revient en effet à établir que l'intégrale $\int^\infty \left(\frac{dx}{x^n} \text{ mod. } \sin x\right)$ est infinie ; et il suffira pour cela de montrer, puisque mod $\sin x > \sin^2 x$, que $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^n}\,dx$ est infini. Or on a :

$$\int_1^p \frac{\sin^2 x}{x^n}\,dx + \int_1^p \frac{\cos^2 x}{x^n}\,dx = \int_1^p \frac{dx}{x^n}, \text{ ce qui est infini pour } p=\infty, \text{ puisque } n \leqq 1$$

$$\int_1^p \frac{\sin^2 x}{x^n}\,dx - \int_1^p \frac{\cos^2 x}{x^n}\,dx = -\int_1^p \frac{\cos 2x}{x^n}\,dx, \text{ ce qui est fini, pour } p=\infty,$$

comme le montre un raisonnement semblable à celui du N° 183. Il en résulte que les deux intégrales $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^n}\,dx$ et $\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{x^n}\,dx$ sont infinies ($n \leqq 1$).

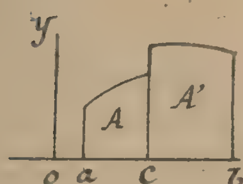
3° Enfin, si la fonction est discontinue pour une valeur, c, comprise entre a et b, on posera

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{limite pour } \varepsilon=0,\ \varepsilon'=0, \text{ de } \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx,$$

ε et ε' tendant vers zéro indépendamment l'un de l'autre et par valeurs positives.

185. – Observons que $f(x)$ peut être discontinue de deux manières : 1° ou bien, pour $x=c$, $f(x)$ a deux valeurs finies différentes, c'est-à-dire que $f(c-\varepsilon)$ et $f(c+\varepsilon)$ ont respectivement des limites différentes lorsque ε tend vers zéro par valeurs positives ; 2° ou bien, pour $x=c$, $f(x)$ devient infinie.

Dans le premier cas, la courbe $y=f(x)$ a la forme ci-contre.



L'intégrale

$$\int_a^b = \lim \int_a^{c-\varepsilon} + \lim \int_{c+\varepsilon'}^b$$

est, malgré la discontinuité, finie et déterminée, car l'intégrale $\int_a^{c-\varepsilon}$ tend, pour $\varepsilon=0$, vers l'aire curviligne A, et l'intégrale $\int_{c+\varepsilon'}^b$ tend de même vers l'aire A'. Il en résulte que les discontinuités de cette nature n'empêchent pas l'intégrale d'être déterminée.

Il en est autrement des discontinuités dues au passage de $f(x)$ par l'infini ; comme dans le cas des limites infinies on ne peut d'ailleurs indiquer que des règles particulières analogues à celles du N° 180.

186. – Si $f(x)$ est infini pour $x=c$, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ pourra, selon les cas, être finie ou non. Ainsi l'intégrale :

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^n}\ , \quad (a<c<b)$$

est finie si $n<1$; elle est infinie ou indéterminée si $\geqq 1$.

Cela résulte des égalités :

$$(8)\qquad \left.\begin{aligned} \int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{(x-c)^n} &= \frac{1}{n-1}\left[\frac{-1}{(-\varepsilon)^{n-1}} + \frac{1}{(a-c)^{n-1}}\right] \\ \int_{c+\varepsilon'}^b \frac{dx}{(x-c)^n} &= \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{\varepsilon'^{\,n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}}\right] \end{aligned}\right\} \text{pour } n \gtrless 1$$

et, dans le cas de $n=1$, des relations :

$$\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} = \log \frac{\varepsilon}{c-a} ; \quad \int_{c+\varepsilon'}^{b} \frac{dx}{x-c} = \log \frac{b-c}{\varepsilon'} .$$

Les seconds membres de ces relations ne restent finis, pour ε et ε' nuls, que si n est inférieur à l'unité.

On déduit de là, par une méthode semblable à celle des N.os 181-182, les deux théorèmes suivants.

I. – Si $f(x)$ peut se mettre sous la forme $\frac{\psi(x)}{(x-c)^n}$, la fonction $\psi(x)$ restant finie pour $x=c$, et n étant inférieur à l'unité l'intégrale

$$\int_a^b \frac{\psi(x)}{(x-c)^n}\, dx \qquad (a < c < b)$$

a une valeur finie et déterminée.

II. – L'intégrale est au contraire infinie ou indéterminée si n est supérieur ou égal à l'unité, et si, lorsque x tend vers c, $\psi(x)$ finit par garder un signe constant et par rester supérieur, en valeur absolue, à un nombre positif, non nul.

Ce dernier cas se présente en particulier, lorsque $\psi(c)$ a une valeur finie ou infinie, mais différente de zéro.

187. – On peut d'ailleurs déduire directement ces propositions de celles du N.º 180 en ramenant, par un changement de variable, le cas de la discontinuité à celui de la limite infinie.

D'après la définition

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{limite de} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)\,dx$$

on a deux limites à étudier, l'une pour $\varepsilon = 0$, l'autre pour $\varepsilon' = 0$.

Soit d'abord l'intégrale

$$\int_{c+\varepsilon'}^{b} \psi(x) \frac{dx}{(x-c)^n}$$

posons-y

$$x - c = \frac{1}{u} \text{ ; elle devient :}$$

$$(9) \qquad \int_{\frac{1}{b-c}}^{\frac{1}{\varepsilon'}} \psi\left(c + \frac{1}{u}\right) \frac{du}{u^{2-n}}$$

et on est ramené, pour $\varepsilon'=0$, au cas de la limite supérieure infinie.

Donc (Nº 180), si $2-n$ est supérieur à 1, c. à. d. si $n<1$, l'intégrale (9) est finie et déterminée, pourvu que $\psi\left(c+\frac{1}{u}\right)$, [c. à. d. $\psi(x)$,] reste fini pour u infini, [c. à. d. pour $x=c$]. De même, l'intégrale (9) est infinie si $2-n$ est égal ou inférieur à 1, [c. à. d. $n\geqq 1$], et si $\psi(x)$, quand x tend vers c, garde un signe constant et reste, en valeur absolue, supérieur à un nombre positif non nul.

On traiterait de même l'intégrale $\int_a^{c-\varepsilon}$, en posant $x-c=-\frac{1}{v}$, et on arriverait à des conclusions identiques.

Applications et exemples.

---

188. – Fonctions rationnelles. – Soit la fonction rationnelle:

$$f(x)=\frac{F(x)}{\varphi(x)}=\frac{A_0x^m+A_1x^{m-1}+\dots}{B_0x^n+B_1x^{n-1}+\dots},$$

F et φ étant des polynômes en x, premiers entre eux, de degrés m et n; pour que l'intégrale

$$(10)\qquad \int_a^b\frac{F(x)}{\varphi(x)}dx,$$

où a et b sont finis, ait une valeur finie et déterminée, il faut et il suffit que $\varphi(x)$ ne s'annule pas entre a et b. Car si $\varphi(x)$ s'annule pour $x=c$, on aura

$$f(x)=\frac{F(x)}{(x-c)^p\,Q(x)},$$

p étant au moins égal à l'unité, et la fonction $\frac{F(x)}{Q(x)}$ ayant une valeur déterminée, non nulle, pour $x=c$:
l'intégrale, dans ces conditions n'a pas de sens (186, II).

Si une limite est infinie, $b=+\infty$ par exemple, il faut, pour que l'intégrale (10) ait un sens, non seulement que $\varphi(x)$ ne s'annule pas entre a et $+\infty$, mais que le degré du numérateur, $F(x)$, soit inférieur de deux unités au moins au degré du dénominateur, $\varphi(x)$. Car on peut écrire:

$$f(x)=\frac{1}{x^{n-m}}\left[\frac{A_0+A_1\frac{1}{x}+\dots}{B_0+B_1\frac{1}{x}+\dots}\right];$$

la quantité entre crochets ayant une limite finie non nulle, $\frac{A_0}{B_0}$, pour x infini, il faut et il suffit (180, I et II) pour que l'intégrale (10) ait une valeur finie et déterminée, que $n-m$ soit supérieur à l'unité, c. à. d. puisque m et n sont entiers, que :

$$n-m \geqq 2.$$

En particulier que pour $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x)}{\varphi(x)}dx$ ait une valeur finie et déterminée, il faut et il suffit :

1° Que $\varphi(x)$ n'ait pas de racine réelle ;
2° Que le degré de $\varphi(x)$ surpasse, de deux unités au moins, celui de $F(x)$

189. — Exponentielles. — Une puissance positive quelconque de e^x est infiniment grande par rapport à toute puissance de x, pour x infini ; il en résulte que l'intégrale

$$\int_a^\infty e^{-mx} x^n \, dx \qquad (m > 0)$$

est finie, a étant positif ; car on peut l'écrire :

$$\int_a^\infty e^{-mx} x^{n+2} \frac{dx}{x^2} = \int_a^\infty \frac{\psi(x)}{x^2} dx,$$

$\psi(x)$ c. à. d. $e^{-mx}x^{n+2}$, ayant zéro pour limite, quelque soit n, pour $x=+\infty$. Donc (N° 180, I) l'intégrale est finie et déterminée. On a supposé a positif pour éviter la discontinuité qui correspondrait à $x=0$, si n était négatif.

Si a était nul ou négatif, mais fini, l'intégrale

$$\int_a^\infty e^{-mx} x^n \, dx$$

serait, à cause du point de discontinuité $x=0$, infinie ou indéterminée si $n \leqq -1$; elle serait finie et déterminée si > -1, (N° 186)

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx,$$

qui sera étudiée en seconde année comme fonction de α (fonction Eulérienne), est finie et déterminée si α est positif ; elle est infinie si α est nul ou négatif.

Calcul des Intégrales définies généralisées.

190. — La formule fondamentale du N° 172 :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

où $F(x)$ est une fonction primitive de $f(x)$, est-elle applicable au cas où $f(x)$ est discontinue entre a et b, et au cas d'une limite infinie ?

1° Supposons d'abord une limite infinie, $b = +\infty$; on a, si $f(x)$ est continue entre a et $+\infty$

$$\int_a^p f(x)\,dx = F(p) - F(a),$$

et cela quelque grand que soit p ; par suite, en passant à la limite :

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = F(\infty) - F(a)$$

la formule est donc applicable, si la fonction $f(x)$ est continue entre les limites d'intégration, et si $F(\infty)$ a une valeur déterminée.

2° Si $f(x)$ est discontinue entre a et b pour $x = c$, on a :

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx = F(c-\varepsilon) - F(a)$$

$$\int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx = F(b) - F(c+\varepsilon')$$

d'où, en ajoutant membre à membre, et faisant tendre ε et ε' vers zéro :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) + \lim.\,F(c-\varepsilon) - \lim F(c+\varepsilon').$$

Si $F(x)$ est continue pour $x = c$, $F(c-\varepsilon)$ et $F(c+\varepsilon')$ ont une même limite, $F(c)$, et il reste :

(11) $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

La formule est donc applicable si $F(x)$ est continue au point de discontinuité de $f(x)$; elle peut être en défaut dans le cas contraire.

191. — Exemples. — Soit $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}$; $f(x)$ est discontinue pour $x = 0$; $F(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}$ est continue en ce point ; la formule est applicable.

Au contraire pour $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}$, $F(x) = -\frac{1}{x}$ est discontinue pour $x = 0$, la formule peut être en défaut. Elle donne effectivement un résultat inexact :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = -\left[\frac{1}{x}\right]_{-1}^{+1} = -2,$$

ce qui est absurde, car le premier membre, somme d'éléments positifs, ne peut être négatif.

192. — Un exemple plus important est celui de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\, dx.$$

L'intégrale indéfinie est arc tg $f(x)$; pour préciser et puisque les diverses valeurs de l'arc tg diffèrent entre elles de la quantité constante $K\pi$, nous prendrons pour intégrale indéfinie la fonction Arc tg $f(x)$, la lettre A désignant l'arc unique compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ dont la tangente est $f(x)$. Cette fonction, Arc tg $f(x)$, est continue, à moins que $f(x)$ ne passe par l'infini en changeant de signe : car si $f(x)$ passe de $+\infty$ à $-\infty$ (ou de $-\infty$ à $+\infty$), Arc tg $f(x)$ passe brusquement de $+\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$ (ou de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$)

Si donc $f(x)$ ne devient pas infini quand x varie de a à b, ou si $f(x)$ passe par l'infini sans changer de signe, la fonction Arc tg $f(x)$ sera continue de $x = a$ à $x = b$, et la formule (11) sera applicable, en sorte que :

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\, dx = \text{Arc tg } f(b) - \text{Arc tg } f(a).$$

Cette formule est-elle encore applicable si $f(x)$, quand x varie de a à b, passe par l'infini en changeant de signe ?

Supposons que, de a à b, $f(x)$ passe une seule fois par l'infini, pour $x = c$, en allant $+\infty$ à $-\infty$ par exemple. On peut alors appliquer la formule ci-dessus dans chacun de deux intervalles $a, c-\varepsilon$ et $c+\varepsilon', b$; il vient aussi :

$$\int_a^{c-\varepsilon} \frac{f'(x)}{1+f^2}\, dx = \text{Arc tg } f(c-\varepsilon) - \text{Arc tg } f(a)$$

$$\int_{c+\varepsilon'}^{b} \frac{f'(x)}{1+f^2}\, dx = \text{Arc tg } f(b) - \text{Arc tg } f(c+\varepsilon')$$

Or, par hypothèse, $f(c-\varepsilon)$ tend vers $+\infty$ pour $\varepsilon = 0$; Arc tg $f(c-\varepsilon)$ tend

donc vers $\frac{\pi}{2}$; de même, puisque $f(c+\varepsilon')$ tend vers $-\infty$ pour $\varepsilon'=0$, $\text{Arc tg} f(c+\varepsilon')$ tend vers $-\frac{\pi}{2}$. Il vient donc en ajoutant membre à membre, et faisant tendre ε et ε' vers zéro :

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = \text{Arc tg} f(b) - \text{Arc tg} f(a) + \pi .$$

Si pour $x=c$, $f(x)$ eût passé de $-\infty$ à $+\infty$, on aurait eu $-\pi$ au lieu de π dans le second membre.

D'une manière générale, on voit de même que si, de a à b, $f(x)$ pour K fois de $+\infty$ à $-\infty$, et K' fois de $-\infty$ à $+\infty$, on aura :

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = \text{Arc tg} f(b) - \text{Arc tg} f(a) + (K-K')\pi ,$$

Application. — Cherchons, en coordonnées polaires, l'aire de l'ellipse :

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 = 1 .$$

$AC-B^2$ est >0 ; A et C sont également >0 si l'ellipse est réelle.

L'aire, $\mathcal{A}$, comprise entre la courbe et les deux rayons vecteurs d'angles polaires 0 et ω_0 est :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_0^{\omega_0} \rho^2 d\omega = \frac{1}{2}\int_0^{\omega_0} \frac{d\omega}{A\cos^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\sin^2\omega}$$

Pour calculer l'intégrale indéfinie, posons (N° 146) $\text{tg}\,\omega = t$; on a

$$\int \frac{d\omega}{A\cos^2\omega + \cdots\cdots} = \int \frac{dt}{A+2Bt+Ct^2} = \frac{1}{C}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{B}{C}\right)^2 + \frac{AC-B^2}{C^2}}$$

L'intégrale $\int \frac{du}{a^2+u^2}$ est (N° 119) $\frac{1}{a}$ arc tg $\frac{u}{a}$; donc

$$\int \frac{d\omega}{A\cos^2\omega + \cdots\cdots} = \frac{1}{C}\ \frac{C}{\sqrt{AC-B^2}}\ \text{arc tg}\frac{Ct+B}{\sqrt{AC-B^2}}$$

d'où finalement :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\left[\text{arc tg}\ \frac{C\,\text{tg}\,\omega + B}{\sqrt{AC-B^2}}\right]_0^{\omega_0}$$

et d'après la règle ci-dessus :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2\sqrt{AC-B^2}}\left[\text{Arc tg}\ \frac{C\,\text{tg}\,\omega_0 + B}{\sqrt{AC-B^2}} - \text{Arc tg}\ \frac{B}{\sqrt{AC-B^2}} + (K-K')\pi\right],$$

K et K' étant respectivement les nombres de passages de $+\infty$ à $-\infty$, et de $-\infty$ à $-\infty$, de la fonction $\frac{C\,tg\,\omega + B}{\sqrt{AC-B^2}}$ quand ω va de 0 à ω_0 : d'ailleurs cette fonction ne peut devenir infinie que si $tg\,\omega$ est infini, c. à. d. si ω passe par $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$. Il résulte de là que :

1°. Si $0 < \omega_0 < \frac{\pi}{2}$, on a : $K = K' = 0$.

2°. Si $\frac{\pi}{2} < \omega_0 < \frac{3\pi}{2}$, quand ω franchit $\frac{\pi}{2}$ la fonction $\frac{C\,tg\,\omega + B}{\sqrt{AC-B^2}}$ passe de $+\infty$ à $-\infty$, (puisque $C > 0$) ; donc $K = 1$, $K' = 0$. En particulier, l'aire de la demi ellipse s'obtient pour $\omega_0 = \pi$: les deux Arc tg se détruisent, et il reste

$$\frac{\pi}{2\sqrt{AC-B^2}}$$

3°. Si $\frac{3\pi}{2} < \omega_0 < 2\pi$, on a de même $K = 2$, $K' = 0$; l'aire de l'ellipse totale s'obtient en faisant $\omega_0 = 2\pi$, ce qui donne

$$\frac{2\pi}{2\sqrt{AC-B^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$$

IV. – Intégration des séries ; dérivation.

---

193. – Il peut être utile, pour calculer une intégrale définie, de développer en série la fonction à intégrer : l'intégrale de la série est-elle la somme des différents termes de celle-ci ? Voici à ce sujet le théorème fondamental.

Théorème. – L'intégrale, entre deux limites finies, d'une série uniformément convergente dans un intervalle qui comprend ces limites, s'obtient en faisant la somme des intégrales des termes de la série.

Soit en effet $S(x)$ la somme d'une série uniformément convergente (N° 66) pour une valeur x comprise dans l'intervalle de convergence uniforme ; désignons par a et b deux quantités de

ce même intervalle. On a :

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots\cdots + u_n(x) + R_n(x); \ldots \text{ d'où :}$$

$$(1) \qquad \int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \cdots\cdots\cdots + \int_a^b u_n(x)\,dx + \int_a^b R_n(x)\,dx.$$

La série $S(x)$ étant uniformément convergente, on peut prendre N assez grand pour que mod $R_n(x)$ soit inférieur à un nombre donné, ε, pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b et pour toutes les valeurs $n \geqq N$; on a donc, dans ces conditions :

$$\text{mod} \int_a^b R_n(x)\,dx \leqq \varepsilon(b-a)$$

Donc, si $(b-a)$ est fini, (c. à. d. si les deux limites a et b sont finies) on pourra prendre N assez grand pour que le premier membre de cette inégalité soit aussi petit qu'on veut, pour toutes les valeurs $n \geqq N$; et par suite, d'après (1), la série

$$\int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \cdots\cdots$$

aura pour somme la quantité $\int_a^b S(x)\,dx$ c. q. f. d.

194. — Il est indispensable d'introduire, dans le raisonnement précédent, la notion de convergence uniforme : Duhamel, qui ne le fait pas, dans son Traité de Calcul infinitésimal, commet une erreur facile à mettre en évidence.

Voici le raisonnement de Duhamel (tome II, page 44). On écrit la série :

$$S(x) = u_1(x) + \cdots\cdots + u_n(x) + R_n(x)$$

puisqu'elle est, par hypothèse, convergente, R_n tend vers zéro pour n infini. Si maintenant on intègre les deux membres entre a et b, il vient :

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b u_1\,dx + \cdots + \int_a^b u_n\,dx + \int_a^b R_n\,dx,$$

et, puisque R_n tend vers zéro à mesure que n augmente, $\int_a^b R_n\,dx$ tend aussi vers zéro. Donc . . . .

La faute de ce raisonnement est la suivante :

Pour une valeur donnée de x, entre a et b, la série S est convergente ; c'est-à-dire que $R_n(x)$ tend vers zéro, à mesure que n augmente, <u>x restant fixe</u>. Mais si l'on fait <u>à la fois</u> varier n et x, rien ne prouve

que $R_n(x)$ tende vers zéro : or dans l'intégrale

$$\int_a^b R_n(x)\,dx,$$

x est essentiellement variable, et on n'a pas le droit de dire, avec Duhamel, que l'intégrale a pour limite zéro, quand n augmente indéfiniment.

Un exemple va le confirmer.

Reprenons en effet la série non uniformément convergente du N° 66 (Remarque I), pour laquelle :

$$R_{n+1}(x) = \frac{nx}{(x^2+1)^{n+1}};$$

ce reste tend vers zéro quand x a une valeur fixe réelle quelconque, et quand n augmente indéfiniment : car pour $x=0$, $R_{n+1}(x)$ est nul, quelque soit n ; et pour x non nul, l'exponentielle (à base >1), $(1+x^2)^{n+1}$, est infiniment grande par rapport à n, quand n tend vers l'infini. Néanmoins l'intégrale

$$\int_0^1 R_{n+1}(x)\,dx$$

ne tend pas vers zéro, lorsque n augmente, car on a :

$$\int_0^1 \frac{nx}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x^2+1)^n}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}},$$

expression, qui, pour $n=\infty$, est égale à $\frac{1}{2}$.

195. – La question de la dérivation des séries est liée à la précédente ; on va établir que :

Théorème. – Si une série, $S(x)$, est convergente dans un intervalle ab et si la série

$$\Sigma = u_1'(x) + u_2'(x) + \cdots$$

des dérivées de ses termes est, non seulement convergente, mais uniformément convergente dans cet intervalle, $\Sigma(x)$ sera la dérivée de $S(x)$, pour toute valeur de x comprise entre a et b.

On a en effet, x étant compris entre a et b :

$$\int_a^x \Sigma(x)\,dx = \int_a^x u_1'(x)\,dx + \cdots + \int_a^x u_n'(x)\,dx + \int_a^x R_n(x)\,dx;$$

ou :

$$\int_a^x \Sigma(x)\,dx = \left[u_1(x) - u_1(a)\right] + \cdots\cdots\cdots - + \int_a^x R_n(x)\,dx$$

ce qui peut s'écrire :

$$\int_a^x \Sigma(x)\,dx = \left[u_1(x)+\cdots+u_n(x)\right] - \left[u_1(a)+\cdots+u_n(a)\right] + \int_a^x R_n(x)\,dx$$

Or, la série $\Sigma(x)$ étant uniformément convergente, le terme $\int_a^x R_n(x)\,dx$ a pour limite zéro quand n augmente indéfiniment ; la série $u_1(x)+\cdots+u_n(x)$ a pour limite $S(x)$, puisque la série S est convergente pour la valeur considérée de x ; de même $u_1(a)+\cdots+u_n(a)$ tend vers $S(a)$, et il vient :

$$\int_a^x \Sigma(x)\,dx = S(x) - S(a) ;$$

relation qui montre bien (N° 170) que $\Sigma(x)$ est la dérivée de $S(x)-S(a)$, c. à. d. de $S(x)$.

C. q. f. d.

196. — Remarque. — Quand la série $S(x)$ converge, la série des dérivées de ses termes peut ne pas converger. Ainsi la série :

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2^2 x}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n^2 x}{n^2} + \cdots\cdots$$

est convergente, puisque les modules de ses termes sont inférieurs aux termes de la série convergente dont le terme général est $\frac{1}{n^2}$; mais sa dérivée n'est pas représentée par la série :

$$\cos x + \cos 4x + \cdots + \cos n^2 x + \cdots\cdots$$

qui n'est pas convergente.

Applications.

197. — Développement de arc sin x. — On part de la formule du binôme généralisée

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \cdots\cdots + \frac{1.3\ldots\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\,x^{2n} + \cdots\cdots$$

Cette série converge (cours de spéciales) pour x réel et compris entre -1 et $+1$, elle diverge si $x > 1$. Considérée comme série de puissances, elle a donc pour cercle de convergence le cercle de rayon 1, à l'intérieur duquel elle est uniformément convergente (N° 69) ; en particulier elle converge uniformément pour x réel et compris entre $-\rho$ et $+\rho$, ρ étant aussi voisin de 1 qu'on veut, mais < 1. On peut donc intégrer la série entre 0 et x, pourvu que mod $x < \rho$, ce qui donne :

$$\text{arc sin}\, x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \cdots\cdots + \frac{1.3\ldots\ldots 2n-1}{2.4\ldots\ldots 2n}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\cdots,$$

développement valable entre $-\rho$ et $+\rho$, c'est-à-dire entre -1 et $+1$, ces limites pouvant être exceptées.

198. – Développement de arc tg x. – On part de la série :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\ldots$$

qui de même converge uniformément pour x réel et compris entre $-\rho$ et $+\rho$ $[\rho < 1]$. Donc en intégrant entre 0 et x :

$$\text{arc tg } x' = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots$$

développement valable quand x est compris entre -1 et $+1$, ces limites pouvant être exceptées.

Des considérations d'une autre nature, dues à Abel, montrent que les développements de arc sin x et arc tg x sont encore valables pour $x = \pm 1$.

V. – Série de Fourier.

---

199. – Lemme. – On a, lorsque m est un entier positif (ou nul) :

(1) $$\int_a^{a+2\pi} \sin mx . dx = -\frac{1}{m}\left[\cos mx\right]_a^{a+2\pi} = 0$$

De même

(2) $$\int_a^{a+2\pi} \cos mx . dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \gtrless 0 \\ 2\pi, & \text{si } m = 0 \end{cases}$$

Soient maintenant m et n deux entiers positifs ; on a :

(3) $$\int_a^{a+2\pi} \sin mx \cos nx . dx = \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi} \sin(m+n)x . dx + \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi} \sin(m-n)x . dx = 0$$

(4) $$\int_a^{a+2\pi} \sin mx \sin nx . dx = \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi} \left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right] dx = 0, \quad \text{si } m \gtrless n.$$
$$= \pi, \quad \text{si } m = n.$$

(5) $$\int_a^{a+2\pi} \cos mx . \cos nx . dx = \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi} \left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right] dx = 0, \quad \text{si } m \gtrless n$$
$$= \pi, \quad \text{si } m = n.$$

200. – Cela posé, supposons qu'une fonction, $f(x)$, soit représentable, entre $x=a$ et $x=a+2\pi$, par un développement uniformément convergent de la forme :

$$(6)\qquad \begin{aligned} f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \cdots + A_n \cos nx + \cdots\cdots \\ + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \cdots + B_n \sin nx + \cdots\cdots ; \end{aligned}$$

il est aisé de calculer les coefficients A et B. Intégrons en effet les deux membres de (6) entre a et $a+2\pi$; l'intégrale du second membre est la somme des intégrales des différents termes, puisque la série est supposée uniformément convergente ; il vient ainsi :

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx = 2\pi A_0 + 0,$$

car tous les autres termes, au second membre, sont nuls en vertu de (1) et (2).

Donc :

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx,$$

ce qui détermine A_0.

Pour calculer A_n, multiplions les deux membres de (6) par $\cos nx$, et intégrons ensuite de a à $a+2\pi$; il vient, en tenant compte de (5)

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nx.\,dx = \pi A_n,$$

tous les autres termes, au second membre, sont nuls, en vertu de (3) et de (5).

De même

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \pi B_n,$$

ce qui donne,

$$(7)\qquad A_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nx\,dx\ ; \qquad B_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nx.\,dx$$

Telles sont les expressions cherchées des coefficients.

201. – Les calculs supposent essentiellement que $f(x)$ est développable en série de la forme (6), et que cette série est, non seulement convergente, mais uniformément convergente, entre a et $a+2\pi$.

Dans quel cas sera-t-on sûr qu'il en est ainsi, c'est-à-dire dans quel cas la série

$$(8) \qquad \begin{aligned} &A_0 + A_1 \cos x + \cdots\cdots + A_n \cos nx + \cdots\cdots \\ &+ B_1 \sin x + \cdots\cdots + B_n \sin nx + \cdots\cdots \end{aligned}$$

où les A et B sont remplacés par leurs valeurs (7), sera-t-elle uniformément convergente et aura-t-elle pour somme $f(x)$?

Nous ne traiterons pas cette importante question, dont la solution demande d'assez longs développements ; bornons-nous à indiquer le résultat.

Si $f(x)$ est une fonction finie et continue entre a et $a+2\pi$, pouvant toutefois posséder un nombre fini de discontinuités sans passage par l'infini, et si elle n'a, dans l'intervalle considéré qu'un nombre fini de maxima et de minima, la série (8), dite de Fourier, est valable[1], dans l'intervalle $a - a+2\pi$.

Remarque I. – Ce théorème offre un grand intérêt analytique. Il permet d'exprimer, à l'aide d'une série, dont les termes sont continus, des fonctions discontinues, et aussi de représenter par une même série deux ou plusieurs fonctions différentes : Voici comment cela doit s'entendre. Soient $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ deux fonctions de x, continues par exemple, entre a et $a+2\pi$; soit b une valeur de x comprise dans cet intervalle. Désignons par $f(x)$ une fonction égale à $\varphi_1(x)$ entre a et b, et à $\varphi_2(x)$ entre b et $a+2\pi$: $f(x)$ est une fonction continue, de a à b sauf une discontinuité possible en b ; on peut donc la développer en série de Fourier :

$$\begin{aligned} f(x) = A_0 + A_1 \cos x + \cdots \\ + B_1 \sin x + \cdots\cdots \end{aligned}$$

et on a ainsi une série qui entre a et b représente $\varphi_1(x)$, et entre b et $a+2\pi$ représente $\varphi_2(x)$. On pourrait de même supposer qu'il y a trois, quatre, ... fonctions φ différentes.

Exemple. – Cherchons la série de Fourier qui représente $\varphi_1(x) = 1$ entre 0 et π, et $\varphi_2(x) = -1$ entre π et 2π.

---

[1] Si $f(x)$ présente des discontinuités, sans passage par l'infini, entre a et $a+2\pi$, les intégrales qui définissent les coefficients A_n et B_n sont bien déterminées et finies (N° 185), et il n'y a aucune indétermination dans les valeurs de ces coefficients.

On a:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx . dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1.\cos nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-1)\cos nx . dx,$$

car $f(x) = 1$ entre 0 et π et $= -1$ entre π et 2π. On en conclut $A_n = 0$.

De même

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\, dx - \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\sin nx\, dx = -\frac{1}{n\pi}\Big[\cos nx\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\Big[\cos nx\Big]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ si } n \text{ est pair} \\ \frac{4}{n\pi}, \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Donc, en observant que A_0 est nul aussi:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\cdots\right]$$

c'est-à-dire sous une autre forme, que la série

$$\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots$$

est égale à $\frac{\pi}{4}$, quand x est compris entre 0 et π, et à $-\frac{\pi}{4}$, quand x est compris entre π et 2π.

Remarque II. — Il résulte de la remarque qui précède que, dans un intervalle b — $a+2\pi$, inférieur à 2π, on pourra représenter une fonction donnée, $\varphi(x)$, par une infinité de séries de Fourier: car il suffira de se donner arbitrairement une fonction, $\varphi_1(x)$, entre a et b, et de former la série qui représente $\varphi_1(x)$ entre a et b et $\varphi(x)$ entre b et $a+2\pi$.

Par exemple, soit $a = -\pi$, $b = 0$, $a + 2\pi = \pi$; nous pouvons prendre pour $\varphi_1(x)$, entre $-\pi$ et 0, la fonction:

$$\varphi_1(x) = +\varphi(-x)$$

La fonction $f(x)$, égale à $\varphi(-x)$ entre $-\pi$ et 0, et à $\varphi(x)$ entre 0 et π, est une fonction paire; $f(x)\sin nx$ est impaire; donc:

$$\pi B_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\, dx = 0.$$

De même, $f(x)\cos nx$ est une fonction paire et:

$$\pi A_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\, dx = 2\int_0^{\pi}\varphi(x)\cos nx\, dx;\quad \pi A_0 = \int_0^{\pi}\varphi(x)\, dx$$

Ce développement de $\varphi(x)$, valable entre 0 et π seulement, ne contient que des cosinus.

Si on avait choisi $\varphi_1(x)$, entre $-\pi$ et 0, par la condition :

$$\varphi_1(x) = -\varphi(-x),$$

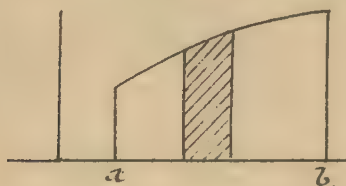
$f(x)$ eût été une fonction impaire : alors les A_n sont nuls, et le développement de $\varphi(x)$, valable encore entre 0 et π, ne contient que des sinus.

VI. – Calcul approché des Intégrales définies.

---

202. – Quand il n'est pas possible de calculer la valeur exacte d'une intégrale définie, on a recours, dans la pratique, à des méthodes d'approximation qui vont être exposées. L'une d'elles, sur laquelle on ne reviendra pas, est le <u>développement en série</u> de la fonction sous le signe $\int$; on limite ce développement à quelques termes, qu'on intègre séparément.

203. – Méthode des trapèzes. – Pour calculer $\int_a^b f(x)\,dx$, c. à. d. <u>l'aire</u> comprise entre l'axe des x, la courbe $y = f(x)$ et les deux ordonnées $x = a$, $x = b$, on la divise en aires plus petites, en menant des ordonnées intermédiaires. On substitue ensuite à chacun des trapèzes curvilignes ainsi obtenus le trapèze rectiligne de mêmes sommets, et la somme des aires des trapèzes rectilignes donne une valeur approchée de l'intégrale proposée.



Si la courbe $y = f(x)$ est tracée, il sera bon de mener des ordonnées intermédiaires équidistantes ; si au contraire on ne connaît pas exactement la courbe, mais seulement la valeur de y pour certaines valeurs de x, on pourra se borner à mener les ordonnées qui correspondent à ces valeurs de l'abcisse.

204. – Interpolation. – On remplace la courbe $y = f(x)$ par une autre qui s'en rapproche entre les limites d'intégration, $y = \varphi(x)$, et l'aire correspondant à celle-ci fournira une approximation de l'aire cherchée.

Supposons que, pour des valeurs $x = a_1, a_2, \ldots a_n$ comprises entre a et b, $y = f(x)$ ait les valeurs $y_1, y_2, \ldots y_n$: on peut choisir pour $\varphi(x)$ le polynôme d'ordre $n-1$ qui, pour $x = a_1, \ldots a_n$, est égal à $y_1, \ldots y_n$, et dont l'expression est

$$\varphi(x) = y_1 \frac{(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_n)} + \ldots\ldots\ldots + y_n \frac{(x-a_1)\ldots\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)\ldots\ldots(a_n-a_{n-1})}$$

Si l'on intègre ce polynôme entre a et b, on a, pour valeur approchée de l'aire primitive

$$y_1 I_1 + y_2 I_2 + \cdots + y_n I_n,$$

en désignant, pour abréger, par $I_1, \ldots I_n$ les intégrales :

$$I_1 = \int_a^b \frac{(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_n)}\,dx\,; \ldots\ldots\ldots\ldots$$

qui ne dépendent pas de la fonction $f(x)$, et dont le calcul n'offre aucune difficulté, puisqu'elles portent sur un polynôme entier en x.

205. – Méthode de Cotes. – Il n'est pas nécessaire de calculer les intégrales I dans chaque cas particulier : le calcul peut être fait une fois pour toutes à l'aide d'un changement de variables. Posons en effet :

$$x = a + (b-a)\,\theta \qquad \text{d'où } dx = (b-a)\,d\theta$$
$$a_1 = a + (b-a)\,\theta_1$$
$$a_2 = a + (b-a)\,\theta_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n = a + (b-a)\,\theta_n$$

il vient :

$$I_1 = (b-a)\int_0^1 \frac{(\theta-\theta_2)(\theta-\theta_3)\ldots(\theta-\theta_n)}{(\theta_1-\theta_2)(\theta_1-\theta_3)\ldots(\theta_1-\theta_n)}\,d\theta$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$I_n = (b-a)\int_0^1 \frac{(\theta-\theta_1)(\theta-\theta_2)\ldots(\theta-\theta_{n-1})}{(\theta_n-\theta_1)(\theta_n-\theta_2)\ldots(\theta_n-\theta_{n-1})}\,d\theta$$

$\theta_1, \theta_2 \ldots \theta_n$ sont égaux respectivement aux rapports dans lesquels $a_1 a_2 \ldots$ divisent l'intervalle ab. Si donc nous adoptons toujours le même mode de division, nous pouvons calculer une fois pour toutes les intégrales qui figurent dans l'expression de $I_1, \ldots I_n$; appelons les $K_1, \ldots K_n$; il

viendra :

$$\int_a^b f x\, dx = (b-a)\,(K_1 y_1 + \cdots + K_n y_n),$$

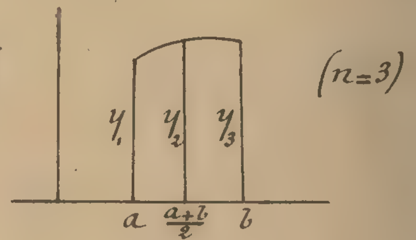
Cotes suppose qu'on a divisé l'intervalle ab en parties égales, et que le point a_1 coïncide avec a, le point a_n avec b.

On a alors :

$$\theta_1 = 0 \quad \theta_2 = \frac{1}{n-1} \quad \theta_3 = \frac{2}{n-1} \cdots \quad \theta_n = 1$$

Développons le calcul en supposant $n = 3$; on a :

$$K_1 = \int_0^1 \frac{(\theta-\frac{1}{2})(\theta-1)}{(-\frac{1}{2})(-1)}\, d\theta = \int_0^1 (2\theta^2 - 3\theta + 1)\, d\theta = \frac{1}{6}$$



et de même

$$K_2 = \frac{2}{3}\,; \qquad K_3 = \frac{1}{6}$$

d'où l'expression approchée de l'aire :

$$\frac{b-a}{6}\,(y_1 + 4y_2 + y_3)$$

On trouverait ainsi :

$$\text{pour } n = 4 : \ \frac{b-a}{8}\left[y_1 + 3y_2 + 3y_3 + y_4\right]$$

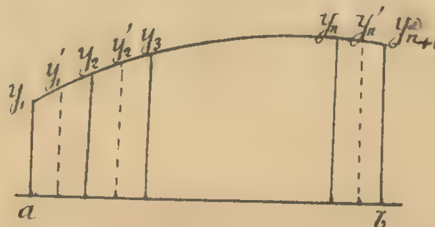
$$\text{pour } n = 5 \ \ \frac{b-a}{90}\left[7y_1 + 32y_2 + 12y_3 + 32y_4 + 7y_5\right] \cdots\cdots \text{etc}$$

206. — Méthode de Simpson. — On divise l'aire en n parties par des ordonnées équidistantes ; on a ainsi à évaluer n trapèzes curvilignes. Pour évaluer approximativement chacun de ces trapèzes, on en mesure l'ordonnée médiane, et on applique la formule de Cotes pour n 3. Si donc $y_1, y_2, \ldots y_n$ désignent les longueurs des n ordonnées primitives ; $y'_1, y'_2, \ldots y'_{n-1}$ celles des ordonnées médianes, l'aire sera donnée par la formule approchée :

$$\frac{b-a}{6n}\left[(y_1 + 4y'_1 + y_2) + (y_2 + 4y'_2 + y_3) + \cdots\cdots + (y_{n-1} + 4y'_{n-1} + y_n)\right]$$

c'est-à-dire :

$$\frac{b-a}{6n}\left[y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \cdots + 2y_n + y_{n+1} + 4y'_1 + 4y'_2 + \cdots + 4y'_n\right]$$

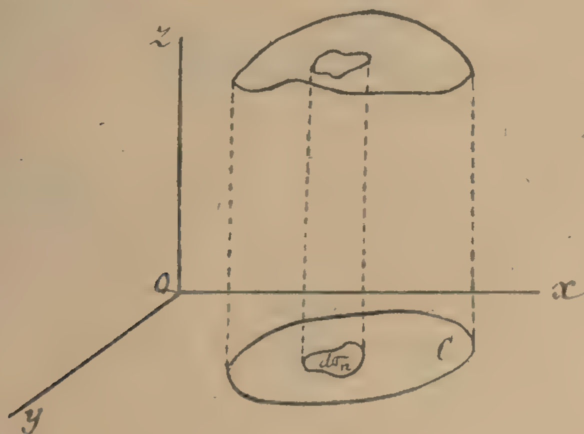


Chapitre III.

Intégrales multiples.

I. — Définition et Calcul.

207. — Intégrale double. — La notion d'intégrale double dérive aisément de celle de volume, de même que la notion d'intégrale simple dérive de la notion d'aire. Donnons-nous en effet, dans le plan des xy, (axes rectangulaires) une aire limitée, C, et soit une surface, $z = f(x,y)$: pour évaluer le volume compris entre cette surface, le plan des xy et le cylindre droit qui a pour base C, on peut décomposer l'aire C en éléments très petits, $d\sigma_1, d\sigma_2, \ldots d\sigma_n, \ldots$; et si l'on désigne par x_n, y_n un point quelconque de l'élément $d\sigma_n$, le volume proposé sera évidemment la limite de la somme:



$$\sum f(x_n, y_n)\, d\sigma_n,$$

lorsque les dimensions des éléments $d\sigma_n$ tendront vers zéro dans tous les sens. Cette limite se représente par le symbole

$$\iint_C f(x,y)\, d\sigma;$$

sa signification géométrique montre qu'elle est indépendante du mode de division de l'aire C en éléments, ainsi que du choix du point x_n, y_n dans chaque élément $d\sigma$. En particulier si l'on divise C

en éléments infiniment petits par des parallèles à Ox, distantes de dy, et par des parallèles à Oy, distantes de dx, l'élément d'aire sera $dx\,dy$ ($= d\sigma$) et l'intégrale double s'écrira :

$$\iint_C f(x,y)\,dx\,dy.$$

Il est clair que cette définition est tout à fait insuffisante au point de vue analytique, comme l'était celle de l'intégrale simple par une aire. Mais on peut, en admettant la continuité (uniforme par conséquent) de $f(x,y)$ dans l'aire C, et en supposant que cette aire soit limitée, établir la proposition suivante, analogue à celle du N° 167:

« Si l'on décompose C en éléments d'aires, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, ... $d\sigma_n$, ..., et si $x_n\,y_n$
« est un point quelconque pris à l'intérieur de l'élément $d\sigma_n$, ou sur
« son contour la somme :

$$\sum f(x_n\,y_n)\,d\sigma_n$$

« tend, lorsque les dimensions des éléments $d\sigma_n$ ont pour limite zéro
« dans tous les sens, vers une limite, finie et déterminée, indépen-
« dante du mode de décomposition de C et du choix des points x_n, y_n. »

La démonstration serait calquée sur celle du N° 167.

La limite dont l'existence est ainsi établie se nomme l'intégrale double de la fonction $f(x,y)$, prise dans le champ d'intégration C, et se représente par les notations indiquées ci-dessus.

208. – Intégrale triple. – L'intégrale triple se définirait de la manière suivante. Soit $f(x,y,z)$ une fonction de trois variables continue à l'intérieur d'un corps ou volume limité, V; si l'on décompose V en éléments de volume, dV_1, dV_2, ... dV_n, ... et si x_n, y_n, z_n est un point quelconque de l'élément dV_n, la somme

$$\sum f(x_n, y_n, z_n)\,dV_n$$

tend, lorsque les dimensions des éléments dV_n ont pour limite zéro dans tous les sens, vers une limite finie et déterminée, indépendante du mode de décomposition de V et du choix des points x_n, y_n, z_n.

Cette limite se représente par le symbole

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dV\,;$$

En particulier, si l'on suppose le corps décomposé en éléments infiniment petits par trois systèmes de plans parallèles aux plans de coordonnées et distants, dans chaque système de dx, dy, dz, l'élément dV sera $dx.\,dy.\,dz$, et l'intégrale triple s'écrira

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

<u>Au point de vue mécanique</u>, l'intégrale triple ci-dessus représente évidemment la masse totale du corps V, en admettant que la densité de ce corps, en chaque point x, y, z, soit égale à $f(x,y,z)$.

Remarque. _ Ainsi, pour définir une intégrale double ou triple, il faut se donner, non seulement la fonction à intégrer, mais un champ d'intégration, aire pour une intégrale double, volume pour une triple.

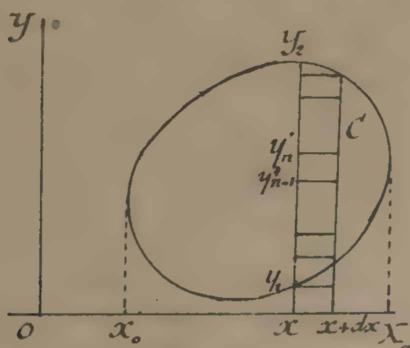
Le champ d'intégration ne doit avoir aucun point à l'infini et la fonction à intégrer, $f(x,y)$ ou $f(x,y,z)$, doit être continue dans ce champ ; on essaiera plus loin de s'affranchir de ces restrictions.

Calcul d'une intégrale double.

209. _ Pour calculer l'intégrale

(1) $$\iint_C f(x,y)\,d\sigma,$$

supposons, ce qu'on peut toujours réaliser par le partage de l'aire en plusieurs autres, que la courbe qui limite le champ C soit rencontrée en deux points, au plus, par toute parallèle à Oy.



Divisons le champ en tranches, par des parallèles à Oy, distantes de dx ; considérons une de ces tranches, comprise entre les parallèles $X = x$ et $X = x + dx$, et désignons par y_1 et y_2 ($y_1 < y_2$) les points où la droite $X = x$ rencontre le contour du champ. Marquons ensuite sur le segment $y_1 y_2$ en allant de y_1 vers y_2, des points $y'_1, y'_2, \dots y'_n \dots y'_p$, par lesquels nous

mènerons des parallèles à Ox : la tranche sera ainsi décomposée en éléments d'aire $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, ... $d\sigma_n$, ... et on aura en grandeur et <u>en signe</u> (puisque $y'_n > y'_{n-1}$) :

$$d\sigma_n = (y'_n - y'_{n-1})\,dx$$

La somme des éléments de l'intégrale (1) qui correspondent à ces éléments d'aire sera la limite de la somme :

$$S\, f(x, y_{n-1})\,(y'_n - y'_{n-1})\,dx,$$

où x est le même pour tous les termes. Cette limite puisque dx peut être mis en facteur, dans la somme, est évidemment égale[1] à

(2) $$dx \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (y_1 < y_2)$$

x étant regardé comme constant dans l'intégrale simple.

Pour avoir la valeur cherchée de l'intégrale double (1), il faut maintenant faire la somme des expressions (2) qui correspondent à toutes les tranches, ce qui donne évidemment l'intégrale simple :

$$\int_{x_0}^{X_0} dx \left\{ \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy \right\},$$

x_0 et X_0 étant les abcisses des parallèles extrêmes à Oy qui rencontrent le contour du champ C.

Ainsi, l'intégrale double peut se calculer par deux intégrations simples successives ; on ne devra pas oublier 1° que x_0 et X_0 sont des constantes absolues, tandis que y_1 et y_2 sont des fonctions de x ; 2° que dans l'intégration par rapport à y, x est regardé comme constant.

Remarque I. – Le résultat aurait été le même, puisque l'intégrale double a une valeur unique, si on avait procédé par tranches parallèles à Ox. Si donc y_0 et Y_0 sont les ordonnées des parallèles extrêmes à Ox qui rencontrent le contour du champ, et x_1, x_2 les abcisses (fonctions de y) où le contour est coupé par la parallèle à Ox, d'ordonnée y, on aura :

(3) $$\int_{x_0}^{X_0} dx \left\{ \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy \right\} = \int_{y_0}^{Y_0} dy \left\{ \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx \right\}$$

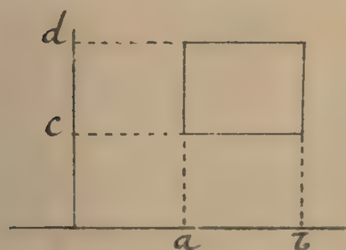
---

[1] d'après la définition même de l'intégrale définie simple.

Remarque II. — Dans le cas où le champ d'intégration est un rectangle, compris entre les parallèles aux axes :

$$x = a, \quad x = b; \qquad y = c, \; y = d, \qquad (a < b \; ; \; c < d),$$

les limites y_1 et y_2 de l'intégrale $\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy$ sont <u>indépendantes de x</u> et égales à c et d ; x_0 et X_0 sont a et b. De même, au second membre de (3), les limites y_0 et Y_0, x_1 et x_2 sont aussi c et d, a et b, de sorte que la formule (3) devient :



$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx \,;$$

ce qui exprime en disant que :

Entre les limites constantes, on peut renverser l'ordre des intégrations.

Mais on ne peut le faire avec sécurité que si la fonction $f(x,y)$ est continue dans le rectangle, supposé lui-même fini : car l'existence de l'intégrale double n'est établie que dans ces conditions.

210. — En résumé, voici la règle à retenir pour le calcul d'une intégrale double.

Règle. — On écrit

$$\int dx \left\{ \int f(x,y)\,dy \right\} ;$$

dans l'intégrale $\int f(x,y)\,dy$, que l'on calcule d'abord, x est regardé comme constant, et les limites sont les valeurs de y qui correspondent aux deux points du contour du champ dont l'abcisse est x, la limite inférieure étant la plus petite de ces 2 valeurs ;

dans l'intégrale $\int dx \{ \quad \}$ que l'on calcule ensuite, les limites sont la plus petite et la plus grande valeur que prend x sur le contour du champ.

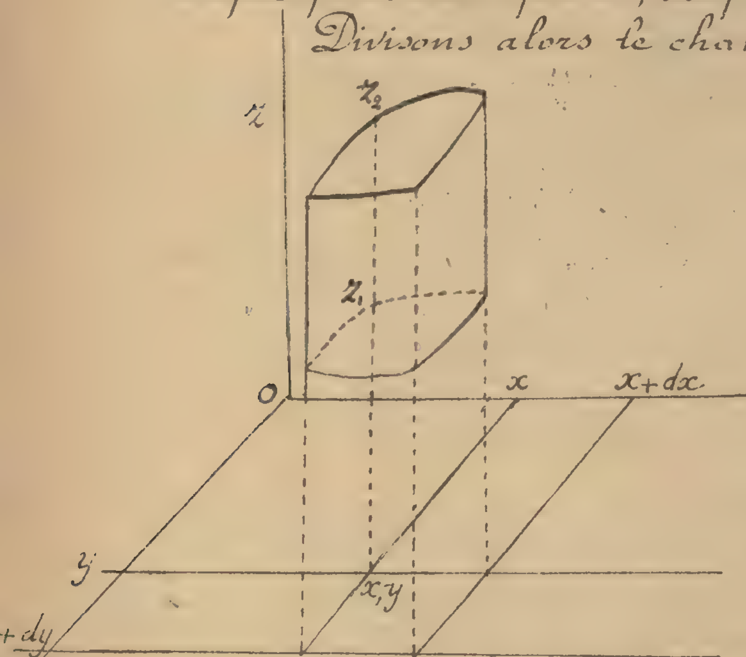
Calcul d'une Intégrale triple.

211. — Pour calculer

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dV = \iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

nous supposerons encore, ce qu'on peut toujours réaliser par le partage du champ en plusieurs autres, que la surface qui limite le volume V n'est coupée qu'en deux points, au plus, par toute parallèle à Oz.

Divisons alors le champ en tranches verticales, par des plans normaux à Ox, distants de dx, et des plans normaux à Oy, distants de dy; soit la tranche comprise entre les plans



$$X = x, \quad X = x + dx \quad \text{et} \quad Y = y, \quad Y = y + dy.$$

Si nous la décomposons en éléments de volume infiniment petits par des plans normaux à Oz, distants de dz, la somme des éléments de l'intégrale triple qui correspondent à ces éléments de volume sera évidemment

$$(4) \qquad dx\, dy \int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\, dz,$$

z_1 et z_2 étant les cotes des points où la parallèle à Oz, d'abcisse x et d'ordonnée y, rencontre le contour du champ, et x, y étant regardés comme constants dans l'intégrale simple en z.

Il faut faire maintenant, pour avoir la valeur de l'intégrale triple, la somme des expressions (4) qui correspondent à toutes les tranches verticales, ce qui revient à calculer l'intégrale double.

$$\iint dx\, dy \left\{ \int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\, dz \right\}$$

pour toutes les valeurs de x, y telles que la verticale $X = x$, $Y = y$ rencontre la surface limite du champ V. En d'autres termes, le champ, C, de cette intégrale double sera l'intérieur du contour apparent du volume V sur le plan des xy, ou encore, la région du plan des xy à l'intérieur de laquelle se projettent les points de ce volume.

Sous le bénéfice de cette définition, on a donc :

$$\iiint_V f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iint_C dx\, dy \left\{ \int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\, dz \right\}$$

et on ne devra pas oublier :

1° que z_1 et z_2 sont fonctions de x et y;

2° que dans l'intégration par rapport à z, x et y sont regardés comme constants.

On calculera ensuite l'intégrale double par la méthode du N° 209.

Remarque. — Si le volume V est l'intérieur du parallélipipède rectangle P dont les arêtes sont parallèles aux axes et dont les faces sont :

$$X = a_1 , \quad X = a_2 ; \quad Y = b_1 , \quad Y = b_2 ; \quad Z = c_1 , \quad Z = c_2 ,$$

on a évidemment en appliquant la règle ci-dessus :

$$\iiint_P f(x,y,z)\, dz = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)\, dz ;$$

les limites sont donc toutes des constantes absolues. Les intégrations commencent, comme toujours, par la droite.

Par exemple :

$$\iiint_P xyz \; dx\, dy\, dz = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} xyz\, dz$$

et, puisque x et y sont regardés comme constants dans l'intégrale en z, ainsi que x dans l'intégrale en y, on peut écrire :

$$\int_{a_1}^{a_2} x\,dx \int_{b_1}^{b_2} y\,dy \int_{c_1}^{c_2} z\,dz, \text{ c. à. d. } \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \; \frac{b_2^2 - b_1^2}{2} \; \frac{a_2^2 - a_1^2}{2}$$

De même

$$\iiint_P \varphi(x)\,\psi(y)\,\chi(z)\, dx\, dy\, dz = \int_{a_1}^{a_2} \varphi(x)\,dx \int_{b_1}^{b_2} \psi(y)\,dy \int_{c_1}^{c_2} \chi(z)\, dz ;$$

le second membre étant ainsi le produit de trois intégrales simples.

Applications.

1° Volumes.

212. — D'après ce qui a été dit au N° 207, le volume compris entre le plan des xy, la surface $z = f(x, y)$ et le cylindre droit qui a pour base la courbe fermée, C, du plan des xy, est représenté par

l'intégrale double $\iint_C f(x,y)\,dx\,dy$.

Volume du tétraèdre trirectangle. — Le volume du tétraèdre limité par les 3 plans de coordonnées et le plan $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$, est égal, d'après cela, à l'intégrale double

$$\iint z\,dx\,dy = \iint c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dx\,dy$$

prise à l'intérieur du triangle OAB, limité par les axes Ox, Oy et la droite $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Pour calculer cette intégrale, écrivons-la suivant la règle du N° 210 :

$$c\int dx\int\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dy$$

Les limites de l'intégrale en y sont les valeurs de l'ordonnée qui correspondent aux points P et Q où la parallèle à Oy, d'abcisse x, rencontre le contour du champ, ce sont donc ici $y=0$ et $y=b\left(1-\frac{x}{a}\right)$; quant aux limites de l'intégrale en x, ce sont 0 et a, abcisses extrêmes des parallèles à Oy qui rencontrent le contour du champ. Le volume cherché est donc :

$$c\int_0^a dx\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dy\,,$$

x étant regardé comme constant dans l'intégrale en y. Or

$$\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dy=\left[y\left(1-\frac{x}{a}\right)-\frac{y^2}{2b}\right]_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}=\frac{b}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2$$

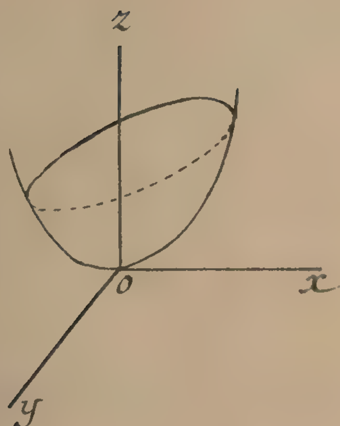
d'où pour le volume :

$$c\int_0^a\frac{b}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2dx=-\frac{abc}{6}\left[\left(1-\frac{x}{a}\right)^3\right]_0^a=\frac{abc}{6}\,,$$

résultat connu.

Volume d'un segment de paraboloïde elliptique. — Soit le paraboloïde :

$$z=px^2+qy^2\,; \qquad (p \text{ et } q>0)$$



on demande le volume du segment compris entre cette surface et le plan

$$z = 2ax + b,$$

perpendiculaire à un des plans principaux.

Ce volume est donné par l'intégrale triple

$$V = \iiint dx\, dy\, dz$$

étendue à tout le segment ; en l'écrivant

$$V = \iint dx\, dy \int dz,$$

les limites de l'intégrale en z sont

$$px^2 + qy^2 \quad \text{et} \quad 2ax + b,$$

cotes des points où la verticale $X = x$, $Y = y$ rencontre le contour du segment. Ainsi :

$$V = \iint dx\, dy \left[2ax + b - px^2 - qy^2\right],$$

l'intégrale double ayant pour champ, dans le plan des xy, la région où se projettent les points du volume, c. à. d. l'intérieur de l'ellipse :

$$(1) \qquad px^2 + qy^2 - 2ax - b = 0,$$

projection de l'ellipse base du segment. Donc :

$$V = \int_{x_0}^{X_0} dx \int_{y_1}^{y_2} (2ax + b - px^2 - qy^2)\, dy,$$

y_1 et y_2 étant les racines de l'équation (1) résolue par rapport à y ; et x_0, X_0 désignant la plus petite et la plus grande de x sur l'ellipse (1), c. à. d. les valeurs de x pour lesquelles l'équation (1), <u>en y</u>, a une racine double. Ainsi :

$$y_1 = -\sqrt{\frac{2ax + b - px^2}{q}} \quad ; \quad y_2 = +\sqrt{\frac{2ax + b - px^2}{q}}$$

$$x_0 = \frac{a - \sqrt{a^2 + pb}}{p} \quad ; \quad X_0 = \frac{a + \sqrt{a^2 + pb}}{p}$$

On obtient alors, en effectuant l'intégration par rapport à y :

$$V = \int_{x_0}^{X_0} dx \left[(2ax + b - px^2)(y_2 - y_1) - \frac{q}{3}(y_2^3 - y_1^3)\right]$$

$$= \int_{x_0}^{X_0} \frac{4}{3}(2ax + b - px^2)\sqrt{\frac{2ax + b - px^2}{q}}\, dx.$$

On est ramené à intégrer une fonction rationnelle de x et d'un radical portant sur un polynôme du second degré en x (N° 133); le plus simple ici sera de simplifier d'abord le radical en faisant disparaître le terme du premier degré. On a :

$$V = \int_{x_0}^{X_0} \frac{4}{3\sqrt{q}} \left(2ax + b - px^2\right)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{3\sqrt{q}} \int_{x_0}^{X_0} p^{\frac{3}{2}} \left[-x^2 + 2\frac{a}{p}x + \frac{b}{p}\right]^{\frac{3}{2}} dx \; ;$$

on posera donc :

$$x - \frac{a}{p} = u \; ;$$

les limites de u seront, d'après les valeurs de x_0 et X_0, $\mp \frac{\sqrt{a^2+pb}}{p}$ par suite :

$$V = \frac{4}{3} p \sqrt{\frac{p}{q}} \int_{-\frac{1}{p}\sqrt{a^2+pb}}^{\frac{1}{p}\sqrt{a^2+pb}} du \left[\frac{a^2+pb}{p^2} - u^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

Posons maintenant :

$$u = \frac{\sqrt{a^2+pb}}{p} \cos\varphi$$

on a :

$$V = \frac{4}{3} p \sqrt{\frac{p}{q}} \int_0^{\pi} \frac{(a^2+pb)^2}{p^4} \sin^4\varphi \, d\varphi$$

Or évidemment

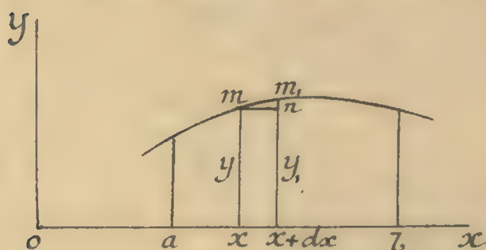
$$\int_0^{\pi} \sin^4\varphi \, d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi \, d\varphi = 2 \cdot \frac{3}{8} \, \frac{\pi}{2} \; \ldots\ldots \text{(N° 176)}$$

et enfin :

$$V = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{q}} \, \frac{(a^2+pb)^2}{p^3}$$

212 bis Remarque. — Il est quelquefois possible d'évaluer un volume à l'aide d'une intégrale simple ; voici deux exemples.

Volume des surfaces de révolution. — On demande le volume compris entre la surface de révolution engendrée par la courbe du plan des xy : $y = f(x)$, tournant autour de Ox, et les deux plans $x = a$, $x = b$, normaux à l'axe.



Le volume engendré par la rotation de l'arc mm_1, compris entre les abcisses x et $x+dx$, a évidemment pour valeur principale le volume du cylindre engendré par la rotation du segment rectiligne mn, parallèle à Ox[1] : or ce cylindre a pour volume $\pi y^2 dx$. Si donc on désigne par dV la différentielle du volume de révolution quand on passe de l'abcisse x à l'abcisse $x+dx$, on a :

$$dV = \pi y^2 dx \,;$$

d'où résulte, pour le volume cherché, l'expression

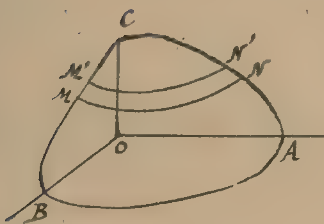
$$\pi \int_a^b y^2 dx$$

Ainsi, pour l'ellipsoïde engendré par la courbe $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, le volume total est

$$\pi \int_{-a}^{+a} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi b^2 a - \frac{\pi b^2}{a^2} \cdot \frac{2}{3} a^3$$

$$= \frac{4}{3} \pi a b^2 .$$

Volume de l'ellipsoïde. — Soit l'ellipsoïde



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \,;$$

coupons-le par deux plans MN et $M'N'$, parallèles au plan des xy, et de cotes z et $z+dz$. Le volume compris entre l'ellipsoïde et ces deux plans a évidemment même valeur principale que le cylindre droit, de hauteur dz, qui aurait pour base la section de l'ellipsoïde par le plan MN. Or la base de ce cylindre a pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2} ,$$

z étant regardé comme une constante ; c'est une ellipse dont les axes sont $a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$, et l'aire $\pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$. Le cylindre considéré a donc pour volume

$$\pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz \,;$$

par suite le volume de l'ellipsoïde sera

$$\pi ab \int_{-c}^{+c} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \pi ab \left[2c - \frac{2c^3}{3c^2}\right] = \frac{4}{3} \pi abc .$$

Une méthode analogue s'applique à toute surface qui est coupée par des plans parallèles suivant des courbes fermées dont on peut évaluer l'aire directement.

[1] Car ce volume est compris évidemment entre $\pi y^2 dx$ et $\pi y_1^2 dx = \pi (y + \Delta y)^2 dx$, quantités dont la valeur principale est la même : $\pi y^2 dx$.

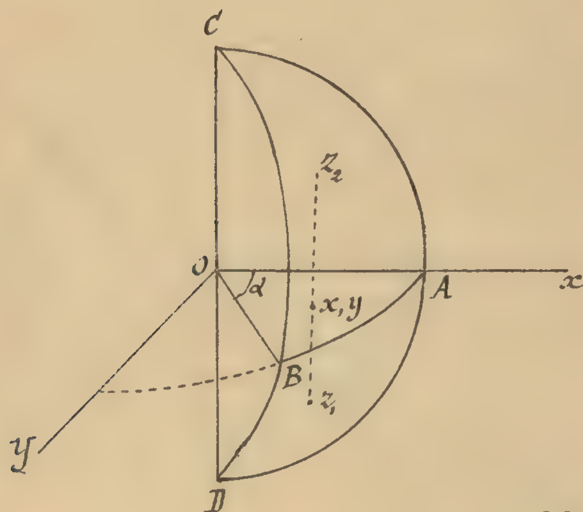
2° Centres de gravité.

213. – On établit en Mécanique les formules suivantes, qui donnent les coordonnées, ξ, η, ζ, du centre de gravité, G, d'un corps homogène V :

$$\xi = \frac{\iiint_V x\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V dx\,dy\,dz}\ ; \qquad \eta = \frac{\iiint_V y\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V dx\,dy\,dz}\ ; \qquad \zeta = \frac{\iiint_V z\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V dx\,dy\,dz}\ ,$$

les intégrales triples étant toutes prises à l'intérieur du corps V. D'ailleurs l'intégrale $\iiint_V dx\,dy\,dz$, qui figure au dénominateur, est le volume du corps V.

Exemple. – Centre de gravité d'un onglet sphérique. –



Cherchons le centre de gravité du corps (onglet) compris dans le trièdre positif des axes, entre la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

le plan des zx, $y = 0$; et le plan $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$, passant par OZ :

il est clair, par des raisons de symétrie que ce centre de gravité sera dans le plan des xy, et sur la bissectrice de l'angle AOB, de sorte qu'il suffit, pour le déterminer, de calculer son abcisse :

$$\xi = \frac{\iiint_V x\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V dx\,dy\,dz}.$$

Or le volume du corps est évidemment égal à $\frac{\alpha}{2\pi}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\alpha R^3$; donc

$$\frac{2}{3}\alpha R^3 \xi = \iiint_V x\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iint dx\,dy \int x\,dz$$

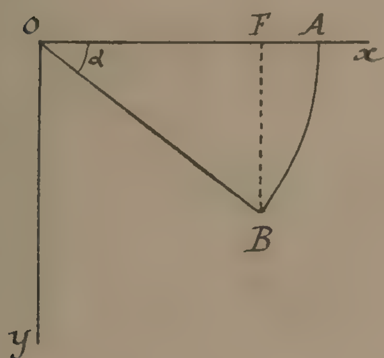
Les limites, z_1 et z_2 de l'intégrale en z (où x, y sont regardés comme constants)

sont les cotes des points où la verticale d'abcisse x et ordonnée y rencontre le contour du champ V, c. à. d. la sphère ; donc ces limites sont $-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ et $+\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Par suite :

$$\frac{2}{3}\alpha R^3 \xi = \iint dx\, dy \,.\, 2x\sqrt{R^2-x^2-y^2}\ ;$$

et le champ de l'intégrale double est la région du plan des xy où se projettent les points du volume V, c. à. d. l'intérieur du secteur circulaire $0AB$. Ainsi :

(1) $$\frac{1}{3}\alpha R^3 \xi = \iint_{0AB} x\sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dx\, dy \,.$$



Ecrivons :

$$\iint_{0AB} x\sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dx\, dy = \int dx \int x\sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dy \,.$$

Les limites, pour l'intégrale en y sont les ordonnées des points où la parallèle à $0y$, d'abcisse x, rencontre le contour du champ $0AB$: la limite inférieure est 0, mais la limite supérieure est l'y de la droite $0B$ ou celui de l'arc de cercle BA, selon que x est $<$ ou $>$ que $0F$.

Il faut donc décomposer l'intégrale en deux :

$$\iint_{0AB} = \iint_{0FB} + \iint_{FAB}\ , \text{ et on a :}$$

$$\iint_{0FB} x\sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dx\, dy = \int_0^{R\cos\alpha} dx \int_0^{x\operatorname{tg}\alpha} x\sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dy$$

$$\iint_{FAB} x\sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dx\, dy = \int_{R\cos\alpha}^{R} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} x\sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dy \,.$$

On est ainsi ramené à calculer des intégrales simples, bien définies ; nous ne développerons pas ces calculs, car il est plus commode, pour trouver l'intégrale double qui figure au second membre de (1), de commencer l'intégration par rapport à x :

$$\iint_{0AB} x\sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dx\, dy = \int dy \int \sqrt{R^2-x^2-y^2}\, x\, dx$$

Les limites de l'intégrale en x, abcisses des points où la parallèle à Ox, d'ordonnée y, rencontre le contour OAB, sont $\frac{y}{tg\alpha}$ et $\sqrt{R^2-y^2}$; les limites extrêmes, pour y, sont 0 et $BF = R\sin\alpha$.

Donc :

$$\iint_{OAB} = \int_0^{R\sin\alpha} dy \int_{y\cot g\alpha}^{\sqrt{R^2-y^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\; x\,dx$$

$$= \int_0^{R\sin\alpha} dy \left[-\frac{1}{3}\left(R^2-x^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{y\cot g\alpha}^{\sqrt{R^2-y^2}} = \frac{1}{3}\int_0^{R\sin\alpha} \left[R^2-\frac{y^2}{\sin^2\alpha}\right]^{\frac{3}{2}} dy$$

On calculera la dernière intégrale simple en faisant le changement de variable

$$\frac{y}{\sin\alpha} = R\cos\varphi ;$$

l'intégrale devient

$$\frac{\sin\alpha}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^4 \sin^4\varphi\, d\varphi = \frac{R^4}{3}\sin\alpha\,\frac{3}{8}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi R^4}{16}\sin\alpha$$

Donc enfin, d'après (1) :

$$\frac{1}{3}\alpha R^3 \xi = \frac{\pi R^4}{16}\sin\alpha ;$$

$$\xi = \frac{3\pi}{16}\,\frac{R}{\alpha}\sin\alpha$$

La distance du centre de gravité au centre, O, de la sphère est $\xi : \cos\frac{\alpha}{2}$, c'est-à-dire :

$$\frac{3\pi}{8}\,\frac{R}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2} .$$

213 bis. — On obtient de même le centre de gravité d'une aire plane, C, par les formules :

$$\xi = \frac{\iint_C x\,dx\,dy}{\iint_C dx\,dy} \quad ; \quad \eta = \frac{\iint_C y\,dx\,dy}{\iint_C dx\,dy}$$

et on a ainsi à calculer trois intégrales doubles, dont celle qui figure en dénominateur est l'aire du champ C.

3° Moments d'inertie.

214. – On nomme moment d'inertie d'un élément de volume par rapport à une droite le produit de la masse de l'élément par le carré de sa distance à la droite ; le moment d'inertie d'un corps est la somme des moments d'inertie des éléments de volume qui le composent. Si donc V est le corps ; si μ est la densité de l'élément dV, r sa distance à la droite, le moment d'inertie du corps V sera

$$I = \iiint_V \mu r^2 dV$$

Pour un corps homogène, $\mu = $ const, ; et tout revient à calculer l'intégrale triple

$$\iiint_V r^2 dV .$$

Exemple. – Moment d'inertie d'un prisme rectangulaire par rapport à un de ses axes. – Soit le prisme d'arêtes $2a$, $2b$, $2c$, dont le centre est l'origine, et dont les arêtes sont parallèles aux axes. Son moment d'inertie par rapport à OZ est (en faisant $\mu = 1$) :

$$I = \iiint_P (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz \;;$$

et puisque le champ est un parallélipipède rectangle, de faces parallèles aux plans de coordonnées, on a (Rem. du N° 211) :

$$I = \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b}^{+b} dy \int_{-c}^{+c} (x^2+y^2)\, dz = 2c \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b}^{+b} (x^2+y^2)\, dy$$

$$= 2c \int_{-a}^{+a} dx \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{-b}^{+b} = 4bc \int_{-a}^{+a} \left(x^2 + \frac{b^2}{3}\right) dx = \frac{8}{3} abc\, (a^2+b^2)$$

II. – Changement de variables dans les intégrales multiples.

215. – Considérons d'abord un cas particulier. Dans l'intégrale

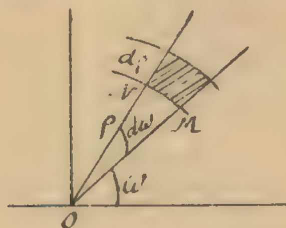
$$I = \iint_C f(x,y)\, dx\, dy$$

prise dans un champ C, on fait le changement de variables

$$x = \rho \cos \omega \ ; \ y = \rho \sin \omega .$$

Quelle est l'expression nouvelle de l'intégrale, si l'on prend comme variables indépendantes ρ et ω ?

Observons que l'intégrale s'écrit $\iint f(x,y)\, d\sigma$, $d\sigma$ étant l'élément d'aire du plan ; or, si l'on divise le champ en éléments, par des circonférences ayant pour centre l'origine et par des rayons vecteurs issus de ce centre, l'aire (ombrée) comprise entre les circonférences de rayons ρ, $\rho + d\rho$ et les rayons d'angles polaires ω, $\omega + d\omega$ est égale à

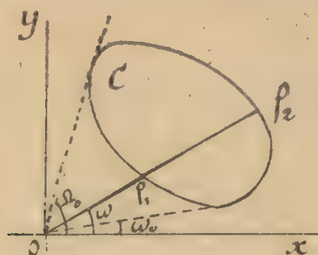


$$\rho \, d\omega \, d\rho :$$

C'est en effet la différentielle, par rapport à ρ, de l'aire $\frac{1}{2}\rho^2 d\omega$ du secteur OMN. Il résulte de là que l'intégrale double proposée s'écrira

$$I = \iint f(\rho \cos \omega, \rho \sin \omega)\, \rho \, d\rho \, d\omega .$$

C'est une intégrale double en ρ et ω que l'on calculera par la méthode générale ; on aura, par exemple, en supposant que les rayons vecteurs ne rencontrent pas le champ en plus de deux points :



$$I = \int_{\omega_0}^{\Omega_0} d\omega \int_{\rho_1}^{\rho_2} f . \rho \, d\rho ,$$

ρ_1 et ρ_2 étant les valeurs de ρ qui correspondent aux deux points du contour du champ qui ont ω pour angle polaire ; ω_0 et Ω_0 le minimum et le maximum de ω sur le contour du champ.

216. – Remarque. – Cet exemple montre qu'on ne doit pas remplacer dx et dy, dans $\iint f\, dx\, dy$, par leurs valeurs obtenues en différentiant les équations du changement de variables :

$$x = \rho \cos \omega \quad ; \quad y = \rho \sin \omega ;$$

ce qui conduirait d'ailleurs à un résultat sans signification, puisque, sous le signe $\iint$, on aurait non seulement un terme en $d\rho\, d\omega$, mais des termes en $d\rho^2$ et $d\omega^2$.

217. – Changement de variables en général. – Nous diviserons

l'étude de cette question en deux parties.

Première partie. — Supposons d'abord qu'on ne change qu'une seule des deux variables, y par exemple, en posant

(1) $$y = F(x, u),$$

u étant la nouvelle variable remplaçant y ; il s'agit de chercher l'expression, en x et u, de l'intégrale

$$I = \iint_C f(x,y)\, dx\, dy$$

On peut admettre, sans restreindre la généralité, que la fonction $\frac{\partial F}{\partial u}$ garde un signe constant dans le champ d'intégration : en effet, $\frac{\partial F}{\partial u}$ est une fonction de x et de u, et par suite, d'après (1), c'est une fonction de x et y, $\varphi(x,y)$; or la courbe $\varphi(x,y) = 0$ divise le champ primitivement donné en champs partiels, dans chacun desquels la fonction $\varphi\left(= \frac{\partial F}{\partial u}\right)$ conserve le même signe, et il suffit de supposer que C est un de ces champs partiels.

Cela posé, l'intégrale I s'écrit :

(2) $$I = \int_{x_0}^{X_0} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\, dy \;, \qquad (y_1 < y_2)$$

y_1 et y_2 étant les valeurs de y qui correspondent, sur le contour du champ C, à la valeur x de l'abcisse ; et x_0, X_0 le minimum et le maximum de x sur ce contour.

Or dans l'intégrale $\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\, dy$, x est regardé comme constant ; si donc on pose

$$y = F(x, u)$$

on aura

$$dy = \frac{\partial F}{\partial u}\, du$$

et par suite :

(3) $$\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\, dy = \int_{u_1}^{u_2} f(x, F)\, \frac{\partial F}{\partial u}\, du \,,$$

u_1 et u_2 étant les valeurs de u, déduites de $y = F(x,u)$ qui correspondent aux valeurs y_1 et y_2 de y, et à la valeur x de l'abcisse ; c'est-à-dire qu'on a :

$$y_1 = F(x, u_1)\ ; \quad y_2 = F(x, u_2)$$

Soient : U_1 la plus petite, U_2 la plus grande des quantités u_1, u_2 ; je dis qu'on a :

(4)
$$\int_{u_1}^{u_2} f(x,F)\,\frac{\partial F}{\partial u}\,du = \int_{U_1}^{U_2} f(x,F)\,\mathrm{mod}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right).\,du$$

Car la relation

$$dy = \frac{\partial F}{\partial u}\,du$$

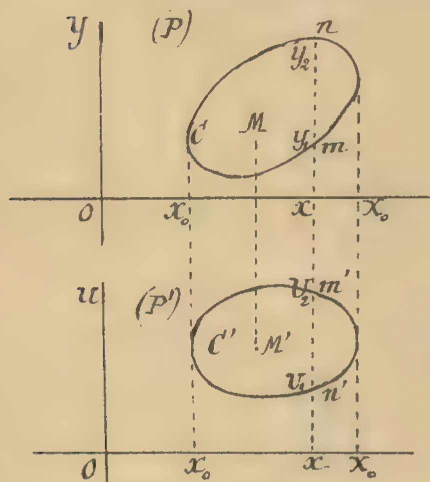
montre que si $\frac{\partial F}{\partial u}$ est positif dans le champ, u croît en même temps que y, (x étant constant), et comme $y_1 < y_2$ on aura $u_1 < u_2$, c'est-à-dire que $u_1 = U_1$; $u_2 = U_2$, et la relation (4) est évidente. De même si $\frac{\partial F}{\partial u}$ est négatif dans le champ, u décroît quand y croît (x étant constant) et comme $y_1 < y_2$, on a $u_1 > u_2$; d'où $u_1 = U_2$; $u_2 = U_1$, et la relation (4) est encore évidente.

Donc enfin, en vertu de (2), (3) et (4), on a :

(5)
$$I = \int_{x_0}^{X_0} dx \int_{U_1}^{U_2} f(x,F)\,\mathrm{mod}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right).\,du \qquad (U_1 < U_2)$$

Or, considérons x et u comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans un nouveau plan, P' ; soit P le plan des anciennes coordonnées x et y. A tout point, M, de coordonnées x, y, du plan P, faisons correspondre, dans le plan P', un point M', de coordonnées x, u, u étant donné par l'équation $y = F(x, u)$.

Les points M et M' ont ainsi même abcisse, x.



Si M reste à l'intérieur du champ C, M' reste dans un champs C' ; et à un point, m, du contour de C, correspond un point, m', de même abcisse, situé sur le contour de C' (1).

Cela posé, observons que y_1 et y_2 sont, par hypothèse, les ordonnées des deux points m et n, du contour de C, qui ont pour

(1) Par exemple si le champ C est l'intérieur du cercle $x^2+y^2-R^2=0$, c. à. d. s'il est défini par l'inégalité
$$x^2 + y^2 \leqq R^2,$$
le champ C' sera défini par
$$x^2 + F^2(x,u) \leqq R^2,$$
et sa courbe limite sera $x^2 + F^2 - R^2 = 0$, x et u étant les coordonnées courantes.

abcisse x ; les relations $y = F(x, u_1)$ et $y_2 = F(x, u_2)$ montrent que les points du plan P' qui correspondent à m et n, c. à. d. les points m' et n' de la figure, ont pour abcisse x et pour ordonnées u_1 et u_2 : en d'autres termes u_1 et u_2 (c. à. d. V_1 et V_2) sont les valeurs de u qui correspondent à l'abcisse x sur le contour du champ C'.

En vertu de cette remarque, le second membre de (5) n'est autre chose, d'après sa forme même (N.os 209 et 210) que l'intégrale double

$$\iint_{C'} f(x, F) \bmod \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) dx\, du.$$

prise dans le champ C' : car, pour calculer cette intégrale, la règle du N.o 210 conduit précisément à écrire le second membre de (5).

On a ainsi résolu le problème, c'est-à-dire trouvé la forme de l'intégrale donnée, en introduisant les variables x et u : observons, pour terminer, que $\frac{\partial F}{\partial u}$ n'est autre chose que le Jacobien des anciennes variables x et y, par rapport aux nouvelles, x et u. Car les formules de transformation sont

$$x = x$$
$$y = F(x, u) ;$$

d'où

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,u)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial u} \end{vmatrix} = \frac{\partial F}{\partial u}$$

La formule finale est donc :[1]

$$(6) \qquad \iint f(x,y)\, dx\, dy = \iint f(x, F) \bmod \frac{\partial(x,y)}{\partial(x,u)}\, dx\, du.$$

---

[1] Cette formule est indépendante du signe constant que $\frac{\partial F}{\partial u}$ a été censé garder dans le champ C ; on en conclut qu'elle est vraie même si $\frac{\partial F}{\partial u}$ change de signe. En effet, soit C un champ quelconque, tel que dans sa partie C_1, $\frac{\partial F}{\partial u}$ soit >0, et que dans sa partie C_2, $\frac{\partial F}{\partial u}$ soit <0. La formule étant vraie pour les champs C_1 et C_2 on a :

$$\iint_{C_1} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{C_1'} f(x, F) \bmod J.\, dx\, du,$$
$$\iint_{C_2} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{C_2'} f(x, F) \bmod J\, dx\, du,$$

d'où en ajoutant membre à membre :

$$\iint_{C} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{C'} f(x, F) \bmod J\, dx\, du,$$

C' étant le champ $(C_1' + C_2')$ qui correspond à C.

Seconde Partie. — Changeons maintenant <u>les deux</u> variables, x et y ; soient u et v les nouvelles variables.

Si on prend d'abord pour variables à la place de x et y les variables x et u, on aura, comme on vient de le voir :

$$\iint_C f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{C'} f(x,y) \bmod \frac{\partial(x,y)}{\partial(x,u)}\,dx\,du,$$

y étant remplacé dans la seconde intégrale, par sa valeur en x et u, et C' étant le champ des systèmes de valeurs de x, u qui correspondent aux valeurs x, y du champ C.

Prenons maintenant comme variables, à la place de x et de u, les variables u et v ; on aura, toujours d'après (5) :

$$\iint_{C'} f(x,y) \bmod \frac{\partial(x,y)}{\partial(x,u)}\,dx\,du = \iint_{C''} f(x,y) \bmod \frac{\partial(x,y)}{\partial(x,u)} \bmod \frac{\partial(x,u)}{\partial(u,v)}\,du\,dv;$$

C'' étant le champ des systèmes de valeurs de u, v qui correspondent aux valeurs x, u du champ C', c. à. d. aux valeurs x, y du champ C.

Or, d'après une propriété fondamentale des Jacobiens (N° 29) :

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,u)}\,\frac{\partial(x,u)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

Donc enfin :

$$\iint_C f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{C''} f(x,y) \bmod \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv;$$

x et y étant, au second membre, supposés remplacés par leurs valeurs en u et v.

Donc :

218. — Règle. — Pour changer de variables dans une intégrale double,

$$\iint_C f(x,y)\,dx\,dy,$$

on remplace x et y, dans $f(x,y)$, par leurs valeurs en fonction des variables nouvelles, u et v, et on remplace $dx\,dy$ par $du\,dv.\bmod J$, J étant le jacobien de x, y par rapport à u et v.

Le champ de l'intégrale nouvelle est l'ensemble des systèmes de valeurs de u, v qui correspondent aux systèmes de valeurs de x, y compris dans le champ primitif, C.

Ainsi, le champ C étant défini par une ou plusieurs inégalités

$$\varphi_1(x,y) > 0 \ ; \ \varphi_2(x,y) > 0, \ldots\ldots$$

le champ nouveau sera défini par les mêmes inégalités, où on suppose x et y remplacés par leurs valeurs en u et v.

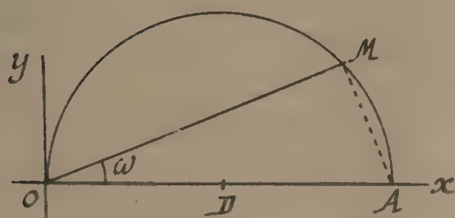
219. – La règle est la même pour une intégrale triple ; on remplace $dx\,dy\,dz$ par $du\,dv\,dw$. mod J, J étant le Jacobien de x, y, z par rapport à u, v, w. La démonstration est identique à celle qui précède.

220. – 1° Coordonnées polaires. – Si l'on pose

$$x = \rho \cos\omega \ ; \quad y = \rho \sin\omega,$$

on trouve $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\omega)} = \rho$, et comme ρ est essentiellement positif, $dx\,dy$ doit être remplacé par $\rho\,d\rho\,d\omega$, ainsi qu'on l'a trouvé au N° 215.

Comme application, cherchons le centre de gravité du demi cercle, C, OMA, de rayon R, tangent à l'origine à l'axe des y. Ce point est évidemment sur la parallèle à Oy menée par le centre D ; il suffit donc de calculer son ordonnée, η.



On aura (N° 213 bis)

$$\eta = \frac{\iint_C y\,dx\,dy}{\iint_C dx\,dy} = \frac{2\iint_C y\,dx\,dy}{\pi R^2},$$

car l'aire du demi-cercle, qui est le dénominateur de η, est $\frac{1}{2}\pi R^2$. Transformons l'intégrale du numérateur en coordonnées polaires :

$$\frac{1}{2}\pi R^2 \eta = \iint \rho^2 \sin\omega\,d\rho\,d\omega$$

Commençons à intégrer par rapport à ρ :

$$= \int \sin\omega\,d\omega \int \rho^2\,d\rho$$

Les limites de l'intégrale en ρ sont 0 et OM, valeurs de ρ qui correspondent à l'angle polaire ω sur le contour du champ ; les limites de l'intégrale en ω sont 0 et $\frac{\pi}{2}$, valeurs extrêmes de l'angle polaire sur le contour (N° 215) et comme $OM = 2R\cos\omega$, il vient :

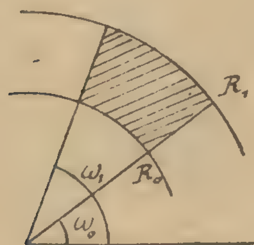
$$\frac{1}{2}\pi R^2 \eta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\omega\, d\omega \int_0^{2R\cos\omega} \rho^2 d\rho = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8R^3 \cos^3\omega \sin\omega\, d\omega$$

$$\frac{3}{16}\pi\frac{\eta}{R} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\omega \sin\omega\, d\omega = \left[\frac{\cos^4\omega}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$$

d'où finalement

$$\eta = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}.$$

Remarque. – Si le champ C est la région comprise entre les deux cercles de rayons R_0 et R_1 qui ont l'origine pour centre, et entre les deux rayons vecteurs d'angles polaires ω_0 et ω_1, on a évidemment



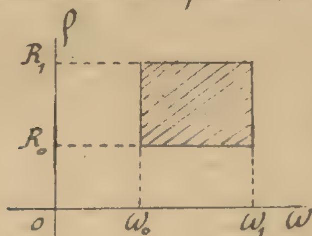
$$\iint_C f(\rho,\omega)\, d\rho\, d\omega = \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_{R_0}^{R_1} f(\rho,\omega)\, d\rho,$$

les limites étant des constantes absolues. Car les valeurs de ρ qui correspondent, sur le contour du champ, à l'angle polaire ω, sont R_0 et R_1 ; les valeurs extrêmes de ω sur le contour sont ω_0 et ω_1.

On peut dire aussi que le champ est défini par les inégalités

$$\omega_0 \leqq \omega \leqq \omega_1 \quad ; \quad R_0 \leqq \rho \leqq R_1 ,$$

c.à.d. que si ω et ρ sont regardées comme les coordonnées rectangulaires d'un point d'un plan, le champ est l'intérieur d'un rectangle de côtés parallèles aux axes. Donc (Rem. II du Nº 209) les limites sont R_0 et R_1 pour l'intégrale en ρ, ω_0 et ω_1 pour l'intégrale en ω.



Les coordonnées polaires seront donc très avantageuses quand on aura à calculer des intégrales doubles dans des champs limités par des cercles concentriques et des rayons issus de leur centre commun.

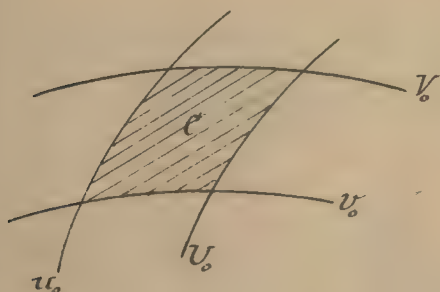
2° Coordonnées curvilignes. – Soient 2 familles de courbes :

$$u = \varphi(x,y), \;\ldots\ldots\ldots \text{ et}$$
$$v = \psi(x,y),$$

où u et v sont des paramètres arbitraires. On demande de calculer l'intégrale

$$I = \iint_C f(x,y)\,dx\,dy,$$

le champ, C, étant l'aire (ombrée) comprise entre les quatre courbes qui correspondent respectivement aux valeurs u_0 et U_0, v_0 et V_0, des paramètres u et v.



A cet effet, faisons le changement de variables :

$$u = \varphi(x,y) \quad , v = \psi(x,y),$$

u et v étant les nouvelles variables. Le champ ancien (en x, y) est évidemment défini par les inégalités :

$$u_0 \leqq \varphi(x,y) \leqq U_0 \quad ,$$

$$v_0 \leqq \psi(x,y) \leqq V_0 \quad ;$$

donc dans le plan des variables u, v, le champ C', correspondant, sera défini par :

$$u_0 \leqq u \leqq U_0 \quad ,$$

$$v_0 \leqq v \leqq V_0 \quad ;$$

ce sera donc un rectangle, de côtés parallèles aux axes des u et des v, ce qui simplifie les calculs.

On a ainsi

$$\iint_C f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{C'} f(x,y) \bmod J.\, du\,dv,$$

J étant le Jacobien $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, lequel est (N° 30) l'inverse du Jacobien $J_1 = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$, qui se calcule immédiatement. Car :

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Donc enfin

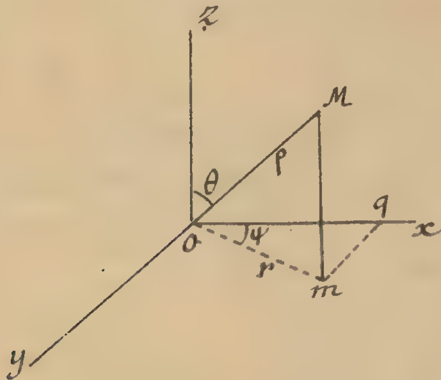
$$\iint_C f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{C'} f(x,y)\frac{du\,dv}{\bmod J_1} = \int_{u_0}^{U_0} du \int_{v_0}^{V_0} \frac{f(x,y)}{\bmod J_1}\,dv$$

en supposant x, y remplacés dans f et J_1 par leurs valeurs en u et v, déduites de $u = \varphi(x,y)$; $v = \psi(x,y)$.

Applications à l'espace.

221. – Changements de variables en coordonnées polaires et semi-polaires.

1° Les coordonnées polaires d'un point M de l'espace sont les quantités ρ, θ et ψ de la figure ; si x, y, z sont les coordonnées cartésiennes de ce point, on a :



$$x = Oq = Om \cos\psi = \rho \sin\theta \cos\psi$$
$$y = mq = Om \sin\psi = \rho \sin\theta \sin\psi$$
$$z = Mm \qquad\qquad = \rho \cos\theta$$

Il importe d'observer que, quelle que soit la position de M dans l'espace, on peut supposer ρ positif, θ compris entre 0 et π, ψ compris entre 0 et 2π. Réciproquement, à un système de valeurs de ρ, θ, ψ satisfaisant à ces conditions correspond un et un seul point (x, y, z) de l'espace.

Les formules de transformation ci-dessus donnent :

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\psi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\psi & \rho\cos\theta\cos\psi & -\rho\sin\theta\sin\psi \\ \sin\theta\sin\psi & \rho\cos\theta\sin\psi & \rho\sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta$$

Ainsi, dans une intégrale triple, $dx\,dy\,dz$ sera remplacé par $\rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\psi$; il n'y a pas à introduire le module du Jacobien, puisque ρ^2 et $\sin\theta$ sont positifs.

2° Les coordonnées semi-polaires de M sont $Om = r$, ψ et z ; on a les formules de transformation :

$$x = r\cos\psi \;; \quad y = r\sin\psi \;; \quad z = z.$$

On peut supposer r positif et ψ compris entre 0 et 2π

Le Jacobien $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\psi,z)}$ est égal à r : donc $dx\,dy\,dz$ sera remplacé dans une intégrale triple par $r\,dr\,d\psi\,dz$, puisque r est positif.

Voici quelques applications.

222. – Centre de gravité d'une portion de sphère. – Considérons un corps, V, limité

1° par deux sphères, ayant l'origine pour centre, de rayons ρ_0 et ρ_1 ;

2° par deux demi-cônes de révolution autour de Oz, d'angles au sommet $2\theta_0$ et $2\theta_1$;

3° par deux demi-plans menés par Oz, et faisant avec zOx les angles ψ_0 et ψ_1.

L'emploi des coordonnées polaires est très avantageux dans toutes les intégrales triples étendues au corps V. En effet, pour un point quelconque (ρ, θ, ψ) de ce champ, on a ;

$$\rho_0 \leqq \rho \leqq \rho_1 \;;\quad \theta_0 \leqq \theta \leqq \theta_1 \;;\quad \psi_0 \leqq \psi \leqq \psi_1 ;$$

et réciproquement, si ρ, θ, ψ vérifient ces inégalités, le point (ρ, θ, ψ) est à l'intérieur de V.

Si donc on transforme en coordonnées polaires une intégrale

$$I = \iiint_V f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

ayant V pour champ, le nouveau champ, en regardant ρ, θ et ψ comme les coordonnées rectangulaires d'un point, sera un parallélipipède rectangle de faces parallèles aux plans de coordonnées. On aura donc (N° 211, Remarque) :

$$\iiint_V f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_{\rho_0}^{\rho_1} d\rho \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta \int_{\psi_0}^{\psi_1} d\psi . \rho^2 \sin\theta\, f(\rho \sin\theta \cos\psi, \ldots)$$

$$= \int_{\rho_0}^{\rho_1} \rho^2 d\rho \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin\theta\, d\theta \int_{\psi_0}^{\psi_1} f .\, d\psi$$

Ainsi, le volume du corps V s'obtiendra en faisant $f = 1$; d'où

$$V = \frac{\rho_1^3 - \rho_0^3}{3} (\cos\theta_0 - \cos\theta_1)(\psi_1 - \psi_0)$$

L'abcisse ξ centre de gravité sera une fraction ayant V pour dénominateur, et pour numérateur l'intégrale triple I où $f = x$, c. à. d $= \rho \sin\theta \cos\psi$. Cette intégrale s'écrit :

$$\int_{\rho_0}^{\rho_1} \rho^3 d\rho \int_{\theta_1}^{\theta_1} \sin^2\theta \, d\theta \int_{\psi_0}^{\psi_1} \cos\psi \, d\psi = \frac{1}{4}\left(\rho_1^4 - \rho_0^4\right)\frac{1}{2}\left[\theta_1 - \theta_0 - \sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_0\right](\sin\psi_1 - \sin\psi_0)$$

d'où la valeur de ζ.

<u>En particulier</u>, pour retrouver l'<u>onglet sphérique</u>, déjà considéré au N°213, il faut supposer :

$$\rho_0 = 0 \;;\; \rho_1 = R \;;$$
$$\theta_0 = 0 \;;\; \theta_1 = \pi \;;$$
$$\psi_0 = 0 \;;\; \psi_1 = \alpha \;;$$

et il vient :

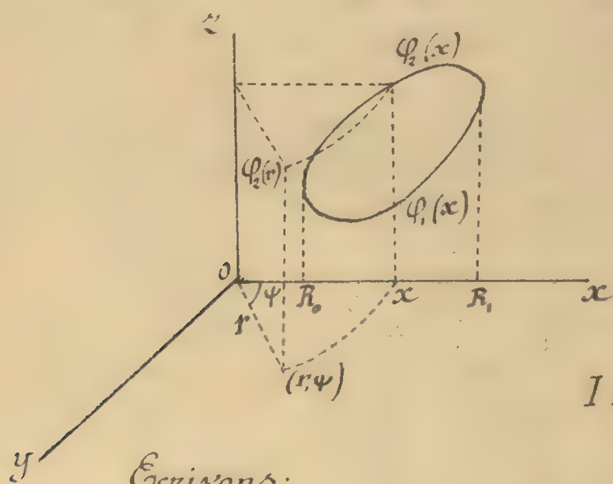
$$\zeta = \frac{1}{8} R^4 . \pi . \sin\alpha : \frac{1}{3} R^3 . 2\alpha = \frac{3}{16} \pi R \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

comme on l'avait trouvé par une autre méthode, bien moins simple.

223. – Moment d'inertie d'une surface de révolution par rapport à son axe.

Les coordonnées semi-polaires sont avantageuses dans les questions relatives aux surfaces de révolution autour de Oz.

Considérons, par exemple, le volume de révolution engendré par une courbe fermée du plan des xz, tournant autour de Oz. Soit $z = \varphi(x)$ cette courbe, supposée rencontrée en deux points, au plus, par toute parallèle à Oz : désignons par $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ les deux valeurs de z qui correspondent, sur la courbe à l'abcisse x, $\varphi_1(x)$ étant $\leqq \varphi_2(x)$.



Le <u>moment d'inertie</u> de ce volume, V, par rapport à Oz est, en coordonnées semi-polaires :

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz = \iiint r^3 dr\, d\psi\, dz$$

Ecrivons :

$$I = \iint r^3 dr\, d\psi \int dz \;;$$

les limites de l'intégrale en z sont les valeurs de z qui correspondent, sur la <u>surface</u> de révolution, aux valeurs r et ψ des deux autres coordonnées,

c. à. d. évidemment : $z_1 = \varphi_1(r)$; $z_2 = \varphi_2(r)$; donc

$$I = \iint r^3 \left[\varphi_2(r) - \varphi_1(r)\right] dr\, d\psi ,$$

et le champ de cette intégrale double est l'ensemble des valeurs de r, ψ qui correspondent aux points du volume de révolution. En d'autres termes, ce champ est la région du plan des xy où se projettent les points du volume, c'est-à-dire la couronne circulaire comprise entre deux circonférences de centre O et de rayons R_0 et R_1, R_0 et R_1 étant le minimum et le maximum de la distance d'un point de la courbe méridienne à l'axe Oz. Par suite (N° 220, Remarque) l'intégrale double s'écrit :

$$I = \int_{R_0}^{R_1} r^3 \left[\varphi_2(r) - \varphi_1(r)\right] dr \int_0^{2\pi} d\psi = 2\pi \int_{R_0}^{R_1} r^3 \left[\varphi_2(r) - \varphi_1(r)\right] dr$$

Exemples. _ 1° Sphère. _ La méridienne est

$$z = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$$

d'où $\varphi_2(x) = +\sqrt{R^2 - x^2}$; $\varphi_1(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$

et

$$I = 2\pi \int_0^R 2r^3 \sqrt{R^2 - r^2}\, dr .$$

Pour intégrer, on prendra pour variable r^2, puisque on n'a, sous le signe $\int$, que $r\,dr$ et r^2 ; mieux encore, on posera

$$R^2 - r^2 = t^2 \quad ; \ldots\ldots\ldots\ldots \text{d'où}$$

$$I = 4\pi \int_0^R (R^2 - t^2)\, t^2\, dt = \frac{8}{15} \pi R^5$$

2° Cylindre. _ On a évidemment, en désignant par h la hauteur du cylindre, par R son rayon et en supposant la base dans le plan des xy :

$$\varphi_2(x) = h \quad ; \quad \varphi_1(x) = 0$$

donc :

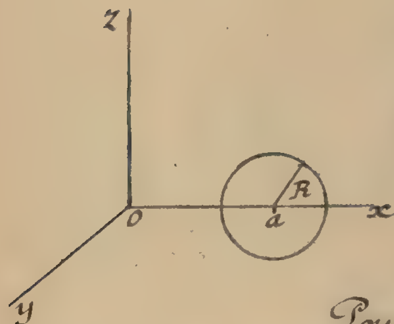
$$I = 2\pi \int_0^R h r^3\, dr = \frac{1}{2} \pi h R^4$$

3° Tore. — La méridienne est :

$$(x-a)^2+z^2=R^2\ ; \qquad z=\pm\sqrt{R^2-(x-a)^2}$$

d'où :

$$\varphi_2(x)=+\sqrt{\quad}\ ; \quad \varphi_1(x)=-\sqrt{\quad}$$



On a donc :

$$I=2\pi\int_{a-R}^{a+R} 2r^3\sqrt{R^2-(r-a)^2}\,dr$$

Pour intégrer, on peut ramener aux lignes trigonométriques en posant :

$$r-a=R\sin\varphi\ ;$$

ce qui donne

$$I=4\pi R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(a+R\sin\varphi)^3\cos^2\varphi\,d\varphi\ ;$$

ou en développant

$$\frac{1}{4\pi R^2}I=a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi+3a^2R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi+3aR^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi+R^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi$$

La seconde et la quatrième intégrales sont nulles, car ce sont des intégrales de fonctions impaires, entre des limites égales et de signes contraires (N° 169, 5°)

On a d'ailleurs

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)\,d\varphi=2\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\right]=\frac{\pi}{2} \quad \text{(N° 176)}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi(1-\sin^2\varphi)\,d\varphi=2\left[\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}-\frac{1.3}{2.4}\,\frac{\pi}{2}\right]=\frac{\pi}{8} \quad \text{(id.)}$$

Finalement :

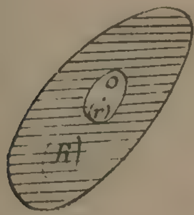
$$I=4\pi R^2\left[\frac{\pi}{2}a^3+\frac{3}{8}\pi aR^2\right]=\frac{\pi^2 aR^2}{2}\left[4a^2+3R^2\right].$$

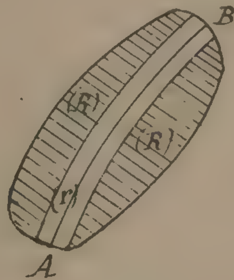
III. — Extension de la notion d'Intégrale double et triple.

224. — Cherchons à étendre la notion d'intégrale multiple au cas d'un champ infini, ou d'une fonction à intégrer discontinue[1].

[1] Si la fonction est discontinue sans passage par l'infini, l'intégrale ne cesse pas d'être finie et déterminée ; on n'a donc à s'occuper que du cas où la fonction devient infinie.

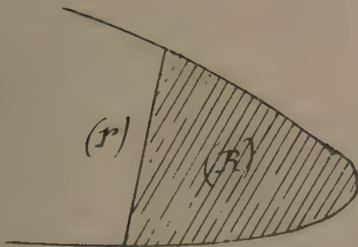
Soit par exemple une intégrale double, $\iint_C f(x,y)\,d\sigma$, prise dans un champ C. Si la fonction $f(x,y)$ devient discontinue en un point du champ (exemple $\frac{1}{x^2+y^2}$) ou le long d'une ligne (exemple $\frac{1}{x-y}$), on partagera le champ C en deux régions, R et r, dont l'une r, enveloppe le point ou la ligne de discontinuité.





Dans les figures ci-contre, O et AB sont le point et la ligne de discontinuité, R est la région ombrée, r la région non ombrée.

De même, si le champ d'intégration est infini, on le décomposera en deux régions, l'une, R, finie, l'autre, r, s'étendant à l'infini.



Cela posé, l'intégrale $\iint_R f(x,y)\,d\sigma$ aura une valeur finie et déterminée, puisque $f(x,y)$ est continu dans R, et que R est fini; on appellera valeur de l'intégrale double, dans le champ C primitif, la limite vers laquelle tend $\iint_R f(x,y)\,d\sigma$ lorsqu'on fait décroître indéfiniment l'étendue de la région r (cas de la discontinuité) ou croître indéfiniment l'étendue de R aux dépens de r (cas du champ infini).

Cette définition suppose essentiellement que $\iint_R$ tend vers une limite finie, déterminée, indépendante de la forme de la région r.

224 bis. L'extension précédente est une généralisation directe de celle qui s'est présentée dans la théorie des intégrales simples; il y a toutefois, entre les deux cas une différence importante.

Plaçons-nous pour fixer les idées, dans l'hypothèse d'un champ infini. L'intégrale simple, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, est la limite de l'expression $\int_a^p f(x)\,dx$, pour p augmentant indéfiniment; dans cette dernière expression, à mesure que p augmente, les éléments $f(x)dx$ se présentent dans un ordre déterminé, qui est celui des valeurs successives et croissantes de x. Au contraire, dans l'intégrale double $\iint_R f(x,y)\,d\sigma$, dont le champ R augmente indéfiniment, rien ne fixe

à priori l'ordre dans lequel se présentent les éléments $f(x,y)\,d\sigma$; cet ordre dépend de la manière dont on fait croître R au dépens de r. De là résulte une profonde dissemblance.

En effet, dans le cas de l'intégrale simple, les éléments positifs et négatifs de l'intégrale $\int f(x)\,dx$ peuvent avoir séparément des sommes infinies, leur différence restant néanmoins finie (Nº 183, Remarque) à cause de l'ordre bien déterminé dans lequel se succèdent ces éléments dans la somme totale. Il en est tout autrement dans le cas de l'intégrale double : faisons croître R ; la somme des éléments positifs de l'intégrale augmente avec R et tend par suite vers une limite finie ou infinie, I_1, indépendante de la manière dont R croît aux dépens de r[1] ; de même la somme des éléments négatifs a une limite finie ou infinie, $-I_2$. La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale double ait une valeur finie, déterminée et indépendante de la forme de la région r, est que les limites I_1 et I_2 soient <u>séparément</u> finies : car si elles étaient toutes deux infinies, la différence $I_1 - I_2$ serait indéterminée, puisque l'ordre dans lequel se succèdent, dans l'intégrale totale, les éléments positifs et négatifs, est tout à fait arbitraire. Si au contraire I_1 et I_2 sont finis, l'intégrale double aura pour limite $I_1 - I_2$, quelle que soit la forme de la région r.

Des considérations identiques s'appliquent au cas de la discontinuité de la fonction.

Ainsi, pour que l'intégrale $\iint_R f(x,y)\,d\sigma$ ait une limite finie et déterminée, il faut et il suffit que les éléments positifs et négatifs de l'intégrale aient séparément des sommes finies, condition équivalente à la suivante : l'intégrale $\iint_R [\mathrm{mod}\, f(x,y)]\,d\sigma$ doit avoir une limite finie.

225. – Il n'y a pas de règle générale permettant de reconnaître si l'intégrale $\iint_R [\mathrm{mod}\, f(x,y)]\,d\sigma$ a (ou non) une limite finie ; comme dans la théorie des Intégrales simples, on doit se borner à des règles particulières dont voici les plus intéressantes.

a) Champ infini. – Supposons que, pour tous les points x, y, extérieurs à un cercle fixe, C_0, de rayon ρ_0, on ait :

---

[1] Car une somme de termes de même signe est indépendante de l'ordre de ces termes.

$$\operatorname{mod} f(x,y) \leqq \frac{A}{\rho^\alpha}$$

ρ étant la distance du point x, y au centre du cercle C_0; A une constante; α un exposant supérieur à deux. Je dis que, dans ces conditions, l'intégrale

$$\iint \left[\operatorname{mod} f(x,y)\right] d\sigma$$

est finie dans un champ infini quelconque.

En effet, dans la partie du champ intérieur au cercle C_0, l'intégrale ci-dessus a une valeur finie (si bien entendu, $f(x,y)$ est une fonction continue dans le champ donné); quant à sa valeur dans la partie du champ extérieur au cercle C_0, on l'augmente en prenant pour champ toute la région du plan extérieure à ce cercle : car tous les éléments de l'intégrale sont positifs. Or, dans ce nouveau champ, on a, d'après l'hypothèse

$$\iint \left[\operatorname{mod} f(x,y)\right] d\sigma \leqq \iint \frac{A}{\rho^\alpha} \rho \, d\rho \, d\omega,$$

en remplaçant l'élément d'aire, $d\sigma$, par sa valeur $\rho \, d\rho \, d\omega$, en coordonnées polaires (N.° 215). Dans l'intégrale double du second membre, les limites sont ρ_0 et ∞ pour ρ, 0 et 2π pour ω (N.° 220, Remarque); elle s'écrit donc :

$$A \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{\rho \, d\rho}{\rho^\alpha} \int_0^{2\pi} d\omega \; ; \quad \text{c. à d.} \; - \frac{2\pi A}{\alpha - 2} \left[\frac{1}{\rho^{\alpha-2}} \right]_{\rho_0}^{\infty}$$

expression qui se réduit à $\dfrac{2\pi A}{\alpha - 2} \dfrac{1}{\rho_0^{\alpha-2}}$ puisque $\alpha > 2$. Cette quantité étant finie l'intégrale double primitive est elle-même finie. C.q.f.d.

b) Fonction discontinue en un point. — Supposons que $f(x,y)$ soit infinie en un point O, mais de telle sorte que, dans l'intérieur du cercle C_0, de rayon ρ_0, ayant ce point pour centre, on ait

$$\operatorname{mod} f(x,y) \leqq \frac{A}{\rho^\alpha},$$

ρ étant la distance du point x, y au point O; A une constante; α un exposant inférieur à deux. Je dis encore que, dans ces conditions, l'intégrale

$$\iint \left[\operatorname{mod} f(x,y)\right] d\sigma$$

est finie dans un champ fini quelconque, entourant le point O.

Il suffit en effet de le démontrer en prenant pour champ tout l'intérieur du cercle C_0. Or on a, d'après l'hypothèse :

$$\iint_{C_0} \left[\text{mod}\, f(x,y)\right] d\sigma \leqq \iint_{C_0} \frac{A}{\rho^\alpha} \rho\, d\rho\, d\omega,$$

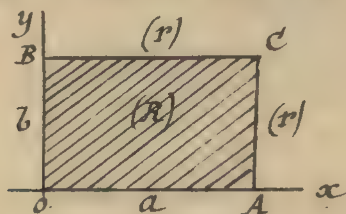
et l'intégrale du second membre s'écrit :

$$A\int_0^{\rho_0} \frac{\rho\, d\rho}{\rho^\alpha} \int_0^{2\pi} d\omega; \quad \text{c. à. d. :} -\frac{2\pi A}{\alpha - 2}\left[\frac{1}{\rho^{\alpha-2}}\right]_0^{\rho_0};$$

elle est donc finie et égale à $\frac{2\pi A}{2-\alpha}\rho_0^{2-\alpha}$, puisque $\alpha < 2$. Il en résulte que l'intégrale double primitive est elle-même finie. C.q.f.d.

226. – Exemple. Donnons, d'après Cayley, un exemple d'intégrale double, prise dans un champ indéfini, et dont la valeur dépend de la forme de la région R : cette intégrale sera nécessairement formée d'éléments positifs et négatifs, de sommes séparement infinies (N° 224 bis).

Soit $$I = \iint \sin(x^2+y^2)\, d\sigma,$$
l'intégrale étant étendue à l'angle indéfini xOy.



Pour la calculer prenons d'abord pour champ R un rectangle $OACB$, de côtés a et b, que nous ferons ensuite croître indéfiniment.

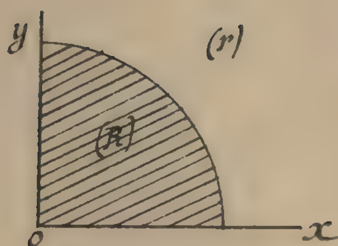
Elle s'écrit :

$$I = \iint_R (\sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2)\, dx\, dy =$$
$$= \int_0^a \sin x^2 dx \int_0^b \cos y^2 dy + \int_0^a \cos x^2 dy \int_0^b \sin y^2 dy.$$

Les intégrales (dites de Fresnel, théorie de la diffraction), $\int_0 \sin x^2 dx$ et $\int \cos x^2 dx$, sont finies et égales à $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$, comme on le verra en seconde année ; on a donc, en faisant croître indéfiniment a et b :

$$I = 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

Evaluons autrement I en prenant pour champ R un quart de cercle du centre O et de rayon ρ, que nous ferons ensuite croître sans limite. On a, en coordonnées polaires



$$I = \iint_R (\sin \rho^2)\,\rho\, d\rho\, d\omega$$

c'est-à-dire :

$$I = \int_0^p (\sin \rho^2)\,\rho\, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega = \frac{\pi}{2}\left(\frac{-\cos \rho^2}{2}\right)_0^p = \frac{\pi}{4}\left(1 - \cos p^2\right),$$

expression qui n'a pas de limite déterminée pour p infini.

227. – Intégrales multiples en général. – Nous n'avons parlé jusqu'ici que d'intégrales doubles et triples ; la généralisation s'impose d'elle-même. Ainsi l'intégrale <u>quadruple</u>

$$I = \iiiint f(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz\, dt$$

étendue à toutes les valeurs de x, y, z, t qui vérifient une ou plusieurs inégalités,

$$\varphi_1(x, y, z, t) > 0; \quad \varphi_2 > 0; \ldots\ldots$$

sera finie et déterminée si pour l'ensemble de ces valeurs, $f(x, y, z, t)$ est continue et si aucune de ces valeurs n'est infinie.

Le calcul de l'intégrale I se ramènera à celui d'une intégrale triple ; si par exemple on a, pour définir le champ la seule inégalité :

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - R^2 < 0,$$

on aura

$$I = \iiint_V dx\, dy\, dz \left\{ \int_{t_1}^{t_2} f(x, y, z, t)\, dt \right\},$$

x, y, z étant regardés comme constants dans l'intégrale $\int_{t_1}^{t_2}$, et t_1, t_2 étant les valeurs que donne pour t, en fonction de x, y, z l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - R^2 = 0$$

Quant au champ, V, de l'intégrale triple, il comprendra l'ensemble des valeurs de x, y, z, telles qu'il leur corresponde, par l'équation précédente, une valeur de t réelle ; ce sera donc l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

La théorie du changement de variables dans les intégrales doubles et triples s'étend sans difficulté aux intégrales multiples d'ordre quelconque ; on remplace $dx\, dy\, dz\, dt$ par $du. dv. dw. d\theta$, multiplié par le module du Jacobien des anciennes variables x, y, z, t par rapport aux nouvelles, u, v, w, θ.

Troisième Partie.

Applications Géométriques.

Chapitre I.

Théorie du contact; enveloppes; Arcs.

I. _ Théorie du Contact.

228. _ On peut définir une courbe plane, soit par la relation $f(x,y)=0$ qui lie les coordonnées x, y d'un de ses points; soit en se donnant les expressions de x et y en fonction d'un paramètre ou argument, t:

$$x = \varphi(t) \; ; \quad y = \psi(t).$$

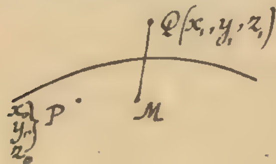
De même, pour une surface, on peut se donner soit l'équation $f(x,y,z)=0$ qui lie les coordonnées x, y, z d'un point; soit l'expression de x, y, z en fonction de deux paramètres, u et v:

$$x = \varphi(u,v) \; ; \quad y = \psi(u,v) \; ; \quad z = \chi(u,v).$$

Enfin une <u>courbe gauche</u> peut être définie soit par l'intersection de deux surfaces, $f(x,y,z)=0$; $F(x,y,z)=0$; soit par l'expression des coordonnées x, y, z en fonction d'<u>un</u> paramètre, t :

$$x=\varphi(t)\ ; \qquad y=\psi(t)\ ; \qquad z=\chi(t).$$

229. – Distance à une surface d'un point infiniment voisin. – Considérons, sur une surface, un point <u>simple</u> P, de coordonnées x_0, y_0, z_0, et soit $Q(x_1, y_1, z_1)$ un point infiniment voisin de P et <u>non</u> situé sur la surface, une sécante quelconque, menée par Q, et <u>non parallèle au plan tangent en P</u>, coupe la surface en un point M, voisin de P : on demande la valeur principale de la longueur infiniment petite, QM.



Si λ, μ, ν sont les cosinus directeurs de QM, et x, y, z les coordonnées de M, on a :

$$\frac{x_1-x}{\lambda}=\frac{y_1-y}{\mu}=\frac{z_1-z}{\nu}=\delta,$$

$\delta = QM$ étant la longueur dont on demande la valeur principale. On tire de là $x=x_1-\lambda\delta$; $y=\ldots$; $z=\ldots$, et en portant ces valeurs dans l'équation $f(x,y,z)=0$ de la surface, on obtient :

$$(1)\qquad 0=f(x_1-\lambda\delta,\ y_1-\mu\delta,\ z_1-\nu\delta)=f(x_1,y_1,z_1)-\delta\left[\lambda f'_{x_1}+\mu f'_{y_1}+\nu f'_{z_1}\right]+\delta^2\left[\quad\right]+\ldots$$

Le point x_1, y_1, z_1 (Q) étant infiniment voisin de x_0, y_0, z_0 (P), les valeurs principales de $f'_{x_1}, f'_{y_1}, f'_{z_1}$ sont $f'_{x_0}, f'_{y_0}, f'_{z_0}$; la valeur principale du coefficient de δ est ainsi $(\lambda f'_{x_0}+\mu f'_{y_0}+\nu f'_{z_0})$: cette quantité n'est pas nulle, car son évanouissement exprimerait que la direction λ, μ, ν de la sécante est parallèle au plan $(X-x_0)f'_{x_0}+(Y-y_0)f'_{y_0}+(Z-z_0)f'_{z_0}=0$, tangent à la surface en P,[1] et cette hypothèse a été expressément écartée. Le second membre de (1) a alors pour valeur principale, puisque les termes en $\delta^2, \delta^3\ldots$ sont négligeables devant le terme en δ :

$$f(x_1,y_1,z_1)-\delta\left[\lambda f'_{x_0}+\mu f'_{y_0}+\nu f'_{z_0}\right]$$

(1) Ce raisonnement suppose que le plan tangent en P à la surface existe, c. à. d. que $f'_{x_0}, f'_{y_0}, f'_{z_0}$ ne sont pas nuls à la fois, ou que P est un point <u>simple</u> de la surface, comme on l'a explicitement supposé.

d'où :

$$\text{valeur pp}^{\text{ale}} \text{ de } \delta = \frac{f(x_1, y_1, z_1)}{\lambda f'_{x_0} + \mu f'_{y_0} + \nu f'_{z_0}} ;$$

ce qui montre, puisque le dénominateur n'est pas nul, que δ est de l'ordre de $f(x_1, y_1, z_1)$.

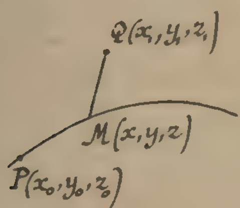
En particulier, la distance du point Q à la surface, comptée sur la normale menée de Q, est de l'ordre de $f(x_1, y_1, z_1)$.

De même, la distance à une courbe plane, $f(x, y) = 0$, d'un point x_1, y_1, infiniment voisin de la courbe, est de l'ordre de $f(x_1, y_1)$.

230. _ Distance à une courbe gauche d'un point infiniment voisin. _ Soit, sur une courbe gauche :

$$f(x, y, z) = 0 \quad ; \quad g(x, y, z) = 0 ,$$

un point simple, P, (x_0, y_0, z_0) ; par un point Q (x_1, y_1, z_1), voisin de P et non situé sur la courbe, on mène une sécante, QM, coupant celle-ci en un point M, voisin de P : on demande la valeur principale de QM, en supposant que la sécante n'est pas parallèle à la tangente de la courbe au point P.



En gardant les notations du n° précédent, on a de même ($\delta = QM$) :

$$(2) \qquad 0 = f(x, y, z) = f(x_1, y_1, z_1) - \delta\left[\lambda f'_{x_1} + \mu f'_{y_1} + \nu f'_{z_1}\right] + \delta^2(\quad) + \cdots$$

$$(3) \qquad 0 = g(x, y, z) = g(x_1, y_1, z_1) - \delta\left[\lambda g'_{x_1} + \mu g'_{y_1} + \nu g'_{z_1}\right] + \delta^2(\quad) + \cdots$$

Les valeurs principales des coefficients de δ sont $\lambda f'_{x_0} + \mu f'_{y_0} + \nu f'_{z_0}$ et $\lambda g'_{x_0} + \mu g'_{y_0} + \nu g'_{z_0}$: une au moins de ces deux quantités n'est pas nulle ; car, si la première par exemple était nulle, la direction λ, μ, ν de la sécante serait parallèle au plan tangent de la surface $f(x, y, z) = 0$ au point P (x_0, y_0, z_0), de sorte que l'évanouissement des deux quantités indiquerait que la sécante est parallèle à l'intersection des plans tangents en P aux surfaces $f = 0$, $g = 0$, c'est-à-dire à la

tangente de la courbe C, ce qui est contraire à l'hypothèse[1].

Supposons, par exemple, $\lambda f'_{x_0} + \dots \gtrless$; l'équation (2) se réduit, en ne gardant que les termes principaux, à :

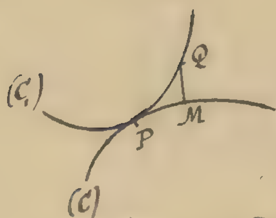
$$f(x_1, y_1, z_1) - \delta\left[\lambda f'_{x_0} + \mu f'_{y_0} + \nu f'_{z_0}\right] = 0,$$

ce qui montre que δ est de l'ordre de $f(x_1, y_1, z_1)$. De même si $\lambda g'_{x_0} + \dots \gtrless 0$, δ est de l'ordre de $g(x_1, y_1, z_1)$, qui est dès lors le même que celui de $f(x_1, y_1, z_1)$. Mais si $\lambda g'_{x_0} + \dots = 0$, le coefficient de δ, dans l'équation (3), est infiniment petit, et cette équation montre alors que $g(x_1, y_1, z_1)$ est d'ordre supérieur à δ, c. à. d. à $f(x_1, y_1, z_1)$.

Il résulte de là que, dans tous les cas, δ est l'ordre de celle des quantités $f(x_1, y_1, z_1)$ et $g(x_1, y_1, z_1)$ dont l'ordre est le moins élevé.

En particulier, la distance de Q à la courbe, comptée sur la normale menée de Q, est de l'ordre de la plus grande des deux quantités $f(x_1, y_1, z_1)$, $g(x_1, y_1, z_1)$.

Définition du Contact. – Soient C et C_1 deux courbes ou surfaces pour lesquelles P est un point commun, simple sur chacune : si la distance à C d'un point quelconque, Q, infiniment voisin de P, pris sur C_1, est d'ordre $n+1$ par rapport à la longueur PQ, on dit que C_1 a, avec C, un contact d'ordre n au point P.



231. – Contact de deux courbes planes. – C étant la courbe

$$f(x, y) = 0,$$

et C_1 étant définie par

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

---

[1] Ce raisonnement suppose : 1° que les plans tangents en P aux deux surfaces $f=0$, $g=0$ existent ; 2° que ces plans sont distincts, c. à. d. :

1° que f'_{x_0}, f'_{y_0}, f'_{z_0} (et de même g'_{x_0}, g'_{y_0}, g'_{z_0}) ne sont pas nuls à la fois, ou que P est un point simple sur les deux surfaces $f=0$, $g=0$;

2° que les deux surfaces ne se touchent pas en P.

Or, si l'une ou l'autre de ces conditions n'était pas remplie, la courbe commune aux surfaces $f=0$, $g=0$ aurait un point multiple en P, cas qui a été écarté.

désignons par x_0, y_0 les coordonnées de P, par x_1, y_1 celles de Q. La distance de Q à la courbe C est (nº 229) de l'ordre de $f(x_1, y_1)$; tout revient donc à exprimer que $F(x_1, y_1)$ est d'ordre $n+1$ par rapport à PQ. Or, si t_0 et t_1 sont les arguments de P et Q sur la courbe C_1, on a:

$$\overline{PQ}^2 = \left[\varphi(t_1)-\varphi(t_0)\right]^2+\left[\psi(t_1)-\psi(t_0)\right]^2 = \left[(t_1-t_0)\varphi'(t_0)+\cdots\right]^2+\left[(t_1-t_0)\psi'(t_0)+\cdots\right]^2,$$

ce qui montre que la valeur principale de PQ est

$$(t_1-t_0)\sqrt{\varphi'^2(t_0)+\psi'^2(t_0)}$$

Le point P étant supposé simple sur C_1, il est aisé de voir que $\varphi'(t_0)$ et $\psi'(t_0)$ ne sont pas nuls à la fois[1]; donc PQ est de l'ordre de t_1-t_0, et il faut écrire que $f(x_1, y_1)$ est d'ordre $(n+1)$ par rapport à t_1-t_0. Or si l'on pose (pour abréger):

$$f\left[\varphi(t), \psi(t)\right] = F(t),$$

et si l'on admet que $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont développables par la formule de Taylor suivant les puissances de $t-t_0$, au moins pour les valeurs de t voisines de t_0; on a:

$$f(x_1,y_1) = f\left[\varphi(t_1),\psi(t_1)\right] = F(t_1) = F(t_0)+(t_1-t_0)F'(t_0)+\cdots\cdots+\frac{(t_1-t_0)^n}{n!}F^n(t_0)+\cdots\cdots$$

et pour que le dernier membre soit d'ordre $n+1$ en t_1-t_0, il faut et il suffit que:

$$F(t_0) = F'(t_0) = F''(t_0) = \cdots\cdots\cdots = F^n(t_0) = 0,$$

soit en tout $(n+1)$ conditions.

De là cette <u>règle</u>:

---

[1] Supposons en effet qu'au voisinage de la valeur $t=t_0$, les fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ soient développables par la formule de Taylor, et de plus qu'à un point de C_1, pris au voisinage de P, corresponde une seule valeur de t. Menons par P une sécante:
$y=\psi(t_0)+\lambda\left[x-\varphi(t_0)\right]$; elle coupe C_1 en des points dont les arguments, t, vérifient l'équation:

$$\psi(t)-\psi(t_0)+\lambda\left[\varphi(t)-\varphi(t_0)\right]=0;$$

c. à. d.

$$(t-t_0)\psi'(t_0)+\frac{1}{2}(t-t_0)^2\psi''(t_0)+\cdots+\lambda(t-t_0)\varphi'(t_0)+\frac{\lambda}{2}(t-t_0)^2\varphi''(t_0)+\cdots=0$$

et si $\psi'(t_0)=\varphi'(t_0)=0$, la quantité $(t-t_0)^2$ est en facteur dans le premier membre, c. à. d. que la sécante coupe C_1 en <u>deux</u> points confondus avec P: ce point n'est donc pas simple; (c'est généralement un rebroussement).

Pour exprimer que la courbe C_1 $[x=\varphi(t),\ y=\psi(t)]$ a avec la courbe C $[f(x,y)=0]$ un contact d'ordre $n+1$ au point d'argument t_0, on remplace, dans le premier membre de l'équation de C, x et y par leurs valeurs $\varphi(t)$, $\psi(t)$ relatives à C_1, et on écrit que la fonction de t ainsi obtenue s'annule, avec ses n premières dérivées, pour $t=t_0$.

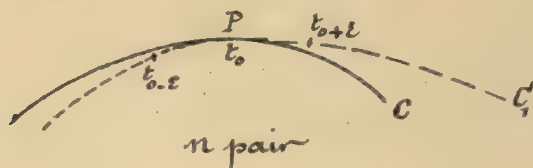
Remarque. – Les deux courbes C et C_1 se traversent ou ne se traversent pas au point P selon que le contact est d'ordre pair ou impair. En effet, soit x_1, y_1 un point de C_1, voisin de P, et correspondant à l'argument $t_1 = t_0 + \varepsilon$; si l'on substitue x_1, y_1 à x, y dans le premier membre, $f(x,y)$, de l'équation de la courbe C, le résultat est $F(t_1)$, c. à. d.

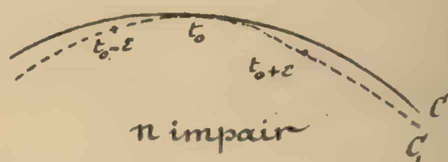
$$F(t_1) = \frac{1}{(n+1)!}\ (t_1 - t_0)^{n+1} F^{n+1}(t_0) + \cdots\cdots$$

dont la valeur principale est

$$\frac{1}{(n+1)!}\ \varepsilon^{n+1} F^{n+1}(t_0).$$

On voit ainsi que $F(t_1)$ c. à. d. $f(x_1, y_1)$ change ou ne change pas de signe avec ε selon que $n+1$ est impair ou pair :





en d'autres termes, les deux points de C_1, dont les arguments sont $t_0-\varepsilon$ et $t_0+\varepsilon$, et qui sont situés sur cette courbe de part et d'autre de P, sont de part et d'autre de la courbe $f(x,y)=0$, ou du même côté de cette courbe, selon que $n+1$ est impair ou pair. Donc enfin, si n est pair, les deux courbes C et C_1 se traversent, et si n est impair elles ne se traversent pas au point P.

232. – Si les deux courbes C et C_1 sont donnés sous la forme :

$$y = g(x)\ ; \qquad y = g_1(x).$$

on rentrera dans le cas précédent en représentant C_1 par les équations :

$$x = t \quad ; \quad y = g_1(t)$$

Alors :

$$F(t) = g_1(t) - g(t),$$

et les conditions de contact sont, en remplaçant t par x :

$$g(x) - g_1(x) = 0$$
$$g'(x) - g_1'(x) = 0$$
$$- - - - - - - - - - - -$$
$$g^n(x) - g_1^n(x) = 0,$$

relations symétriques par rapport à C et C_1. Donc, si C_1 a avec C un contact d'ordre n en un point, C a avec C_1 un contact de même ordre en ce point.

Observons enfin que si C et C_1 sont données par

$$f(x,y) = 0 \; ; \quad f_1(x,Y) = 0,$$

les conditions de contact d'ordre n au point x, y sont, d'après ce qui précède :

$$y = Y,$$
$$y' = Y',$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y^n = Y^n,$$

$y', \ldots y^n, Y' \ldots Y^n$ étant les dérivées successives de y et Y par rapport à x, dérivées qui se déduisent sans difficulté des équations des 2 courbes.

233. – Contact d'une courbe gauche et d'une surface. – C est la surface

$$f(x,y,z) = 0 \; ;$$

C_1 la courbe gauche :

$$x = \varphi(t); \qquad y = \psi(t) \; ; \qquad z = \chi(t).$$

Soient encore : x_0, y_0, z_0 les coordonnées de P ; x_1, y_1, z_1 celles de Q ; t_0 et t_1 les arguments de P et Q sur la courbe C_1.

Il faut exprimer que $f(x_1, y_1, z_1)$ est d'ordre $(n+1)$ par rapport à PQ ; or la valeur principale de PQ est

$$(t_1 - t_0)\sqrt{\varphi'^2(t_0) + \psi'^2(t_0) + \chi'^2(t_0)},$$

de sorte que PQ est de l'ordre de $t_1 - t_0$, en écartant le cas $\varphi'(t_0) = \psi'(t_0) = \chi'(t_0) = 0$, qui est le cas où C_1 aurait un point multiple en P, ainsi qu'on le verrait sans difficulté. (Note du n° 231).

En posant

$$F(t) = f\left[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\right]$$

On a :

$$f(x_1, y_1, z_1) = F(t_1) = F(t_0) + (t_1 - t_0) F'(t_0) + \cdots\cdots ;$$

pour que le dernier membre soit d'ordre $(n+1)$ en $t_1 - t_0$, il faut et il suffit que :

$$F(t_0) = F'(t_0) = \ldots\ldots\ldots = F^n(t_0) = 0 ,$$

soit $(n+1)$ conditions ; et on déduit une règle toute semblable à la précédente, qu'il est inutile d'énoncer.

On voit, comme dans la Remarque du n° 231, que la courbe et la surface se traversent ou ne se traversent pas au point P selon que le contact est d'ordre pair ou impair.

234. – Contact de deux courbes gauches.

– C est la courbe

$$f(x,y,z) = 0 \; ; \quad g(x,y,z) = 0 \; ;$$

C_1 la courbe :

$$x = \varphi(t) ; \quad y = \psi(t) ; \quad z = \chi(t) .$$

En gardant les notations du N° précédent, il faut exprimer que la distance à la courbe C du point $Q(x_1, y_1, z_1)$, infiniment voisin de $P(x_0, y_0, z_0)$, sur C_1, est d'ordre $(n+1)$ par rapport à PQ : cette distance étant (n° 230) de l'ordre de la plus grande des quantités $f(x_1, y_1, z_1)$, $g(x_1, y_1, z_1)$, il faut et il suffit que ces deux quantités soient d'ordre $n+1$ par rapport à PQ. Or PQ est de l'ordre de $t_1 - t_0$ (N° 233) si l'on admet que P est un point simple de C_1 ; tout revient donc à écrire que $f(x_1, y_1, z_1)$ et $g(x_1, y_1, z_1)$ sont d'ordre $(n+1)$ en $t_1 - t_0$.

En posant :

$$f\left[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\right] = F(t)$$

$$g\left[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\right] = G(t)$$

les conditions nécessaires et suffisantes du contact d'ordre n seront :

$$F(t_0)=F'(t_0)=\dots\dots\dots=F^n(t_0)=0\,;$$
$$G(t_0)=G'(t_0)=\dots\dots\dots=G^n(t_0)=0\,;$$

soit en tout $2(n+1)$ conditions ; et, on est conduit encore à une règle analogue aux précédentes.

235. – Si C et C_1 sont représentées par

$$C\begin{cases} y=f(x)\\ z=g(x)\end{cases}\qquad\qquad C_1\begin{cases} y=f_1(x)\\ z=g_1(x)\end{cases}$$

on rentrera dans le cas ci-dessus en écrivant

$$C_1\begin{cases} x=t\\ y=f_1(t)\\ z=g_1(t)\end{cases}$$

d'où

$$F(t)=f_1(t)-f(t)$$
$$G(t)=g_1(t)-g(t)$$

Les conditions du contact d'ordre n, au point x, y, z, sont donc, en remplaçant t par x :

$$\begin{array}{ll} f(x)=f_1(x) & g(x)=g_1(x)\\ f'(x)=f'_1(x) & g'(x)=g'_1(x)\\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\ f^n(x)=f^n_1(x) & g^n(x)=g^n_1(x)\end{array}$$

elles sont symétriques par rapport aux deux courbes.

Enfin, si C et C' sont données par

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0\\ g(x,y,z)=0\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases} f_1(x,Y,Z)=0\\ g_1(x,Y,Z)=0\,,\end{cases}$$

les conditions de contact d'ordre n, au point x, y, z, seront, d'après ce qui précède :

$$y = Y \qquad z = Z$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dx} \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{dZ}{dx}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n Y}{dx^n} \qquad \frac{d^n Z}{dx^n} = \frac{d^n Z}{dx^n},$$

$\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \ldots \frac{dY}{dx}, \frac{dZ}{dx}, \ldots$ étant les dérivées successives de y et z, Y et Z par rapport à x, dérivées qui se déduisent sans difficulté des équations des deux courbes.

236. – Contact de deux surfaces. – C est la surface
$$f(x, y, z) = 0;$$
C_1 la surface:
$$x = \varphi(u, v); \quad y = \psi(u, v); \quad z = \chi(u, v)$$

Soient toujours x_0, y_0, z_0 le point P; x_1, y_1, z_1 un point Q, infiniment voisin de P, pris sur C_1: la distance de Q à C étant de l'ordre de $f(x_1, y_1, z_1)$, il faut exprimer que $f(x_1, y_1, z_1)$ est d'ordre $n+1$ par rapport à PQ. Or, si u_0, v_0 et u_1, v_1 sont les valeurs de u, v qui correspondent à P et Q sur la surface C_1, on a:
$$\overline{PQ}^2 = \left[\varphi(u_1, v_1) - \varphi(u_0, v_0)\right]^2 + \cdots\cdots = \left[(u_1 - u_0)\varphi'_{u_0} + (v_1 - v_0)\varphi'_{v_0} + \cdots\right]^2 + \cdots\cdots$$
d'où, pour la valeur principale de PQ une expression, ρ, de la forme:
$$\rho = \sqrt{M(u_1 - u_0)^2 + 2N(u_1 - u_0)(v_1 - v_0) + P(v_1 - v_0)^2}$$
en posant pour simplifier:
$$M = \varphi'^2_{u_0} + \psi'^2_{u_0} + \chi'^2_{u_0}; \qquad N = \varphi'_{u_0}\varphi'_{v_0} + \psi'_{u_0}\psi'_{v_0} + \chi'_{u_0}\chi'_{v_0}; \quad P = \varphi'^2_{v_0} + \psi'^2_{v_0} + \chi'^2_{v_0}$$

Je dis que, si l'on regarde $u_1 - u_0$ et $v_1 - v_0$ comme du premier ordre, ρ est aussi du premier ordre, quelle que soit la valeur réelle du rapport $\frac{v_1 - v_0}{u_1 - u_0}$: en effet, il ne pourrait en être autrement que pour les valeurs de ce rapport qui annulent le trinôme, sous le radical, mais il est aisé de voir que ces valeurs sont imaginaires. Formons en effet la quantité $MP - N^2$; d'après une formule connue on a:
$$MP - N^2 = \left[\varphi'_{u_0}\psi'_{v_0} - \varphi'_{v_0}\psi'_{u_0}\right]^2 + \left[\varphi'_{u_0}\chi'_{v_0} - \varphi'_{v_0}\chi'_{u_0}\right]^2 + \left[\psi'_{u_0}\chi'_{v_0} - \psi'_{v_0}\chi'_{u_0}\right]^2,$$

et le second membre est essentiellement positif, ce qui démontre la proposition[1], c. à. d. que PQ est toujours du premier ordre en u_1-u_0, v_1-v_0.

Il faut donc finalement exprimer que $f(x_1, y_1, z_1)$ est d'ordre $n+1$ par rapport à u_1-u_0, v_1-v_0, considérés comme du premier ordre.

Or si l'on pose :

$$f\left[\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)\right] = F(u,v),$$

On a :

$$f(x_1, y_1, z_1) = F(u_1, v_1) = F(u_0, v_0) + (u_1-u_0)\,F'_{u_0} + (v_1-v_0)\,F'_{v_0} + \cdots$$

et les conditions du contact d'ordre n sont :

$$F(u_0, v_0) = 0\;; \qquad F'_{u_0} = 0 \quad F''_{u_0^2} = 0 \ldots\ldots F^{n}_{u_0^n} = 0$$
$$F'_{v_0} = 0 \quad F''_{u_0 v_0} = 0 \ldots\ldots F^{n}_{u_0^{n-1} v_0} = 0$$
$$F''_{v_0^2} = 0 \ldots\ldots$$
$$F^{n}_{v_0^n} = 0\;;$$

soit en tout $1+2+3+\cdots+n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ conditions.

De là cette Règle.

Pour exprimer que la surface C_1 $\left[x=\varphi(u,v)\,;\ y=\psi(u,v)\,;\ z=\chi(u,v)\right]$ a, avec la surface C $\left[f(x,y,z)=0\right]$, un contact d'ordre n au point d'arguments u_0 et v_0, on remplace, dans le premier membre de l'équation de C, x, y et z par leurs valeurs $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$, $\chi(u,v)$, relatives à C_1, et on écrit que la fonction de u, v ainsi obtenue s'annule, ainsi que toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre n inclus, pour $u=u_0$, $v=v_0$.

237. — Si C a pour équation $z=f(x,y)$ et C_1 : $z=g(x,y)$, on rentre dans le cas précédent en posant

$$C_1 \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = g(u,v) \end{cases}$$

---

[1] $MP-N^2$ pourrait toutefois être nul si les trois carrés étaient nuls, c. à. d. si

$$\frac{\varphi'_{u_0}}{\varphi'_{v_0}} = \frac{\psi'_{u_0}}{\psi'_{v_0}} = \frac{\chi'_{u_0}}{\chi'_{v_0}}$$

En ce cas, le point P ne serait pas simple sur la surface C_1, comme on le démontrerait aisément.

d'où $$F(u,v) = g(u,v) - f(u,v)$$
et les conditions de contact sont, en remplaçant u et v par x, y :

$$f(x,y) = g(x,y)\ ; \quad f'_x = g'_x\ ; \quad f''_{x^2} = g''_{x^2} \cdots\cdots\cdots f^n_{x^n} = g^n_{x^n}$$
$$f'_y = g'_y\ ; \quad f''_{xy} = g''_{xy} \cdots\cdots\cdots f^n_{x^{n-1}y} = g^n_{x^{n-1}y}$$
$$f''_{y^2} = g''_{y^2} \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^n_{y^n} = g^n_{y^n}$$

Par exemple, en désignant par p, q, r, s, t les dérivées partielles premières et secondes de z par rapport à x et y, il faut, pour le contact du second ordre, que les deux surfaces aient, pour un système de valeurs de x, y, mêmes valeurs de z, p, q, r, s, t ; et réciproquement. On peut dire aussi qu'en un point commun aux deux surfaces il y aura contact du second ordre si p, q, r, s, t sont les mêmes en ce point pour les deux surfaces. Pour le contact du premier ordre en un point commun, il faut et il suffit que p et q soient les mêmes pour les deux surfaces.

238. – Autre point de vue. – Reprenons les conditions de contact d'une courbe

(C_1) $$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$
et de la surface C : $$f(x,y,z) = 0$$

En posant
$$f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) = F(t),$$
ces conditions sont (t_0 étant le point de contact) :
$$F(t_0) = 0\ ; \quad F'(t_0) = 0\ ; \ \ldots\ldots\ldots \ F^n(t_0) = 0\ .$$

Or la surface C coupe la courbe C_1 en des points dont les arguments t vérifient évidemment l'équation :

$$f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) = 0; \quad \text{c. à. d.}\ F(t) = 0$$

et comme on a :
$$F(t) = F(t_0) + (t - t_0) F'(t_0) + \cdots\cdots + \frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!} F^{n+1}(t_0) + \cdots\cdots$$

on voit que $(t - t_0)^{n+1}$ est en facteur dans $F(t)$, c. à. d. que le point t_0 compte pour $n+1$ dans le nombre des points où la courbe est coupée par la surface.

On peut donc dire sous une autre forme, que si une courbe C, et une surface, C', ont un contact d'ordre n en un point, C et C' ont en ce point n+1 intersections confondues. Mêmes conclusions pour le contact de deux courbes planes, ou de deux courbes gauches.

II. – Théorie des enveloppes.

---

239. – Laissant de côté la question connue des enveloppes dans le plan, nous traiterons de l'enveloppe d'une famille de surfaces. Deux cas sont à distinguer, selon que cette famille est simplement ou doublement infinie, c. à d. selon que son équation générale contient un ou deux paramètres variables.

Enveloppe d'une famille simplement infinie.

240. – Soient les surfaces représentées par l'équation

$$f(x, y, z, \lambda) = 0,$$

où λ est un paramètre. Une de ces surfaces

(1) $$f(x, y, z, c) = 0$$

coupe la surface infiniment voisine

(2) $$f(x, y, z, c+dc) = 0$$

selon une courbe représentée par les deux équations (1) et (2), et dont il est aisé de trouver la position limite. En effet, en tenant compte de (1) et divisant par dc, (2) s'écrit :

(3) $$0 = f'_c(x, y, z, c) + \tfrac{1}{2}\, dc\, f''_{c^2}(x, y, z, c+\theta . dc)$$

et, à la limite, pour dc = 0, la courbe devient :

(4) $$(c) \left\{ \begin{array}{l} f(x, y, z, c) = 0 \\ f'_c(x, y, z, c) = 0 \end{array} \right.$$

On la nomme <u>caractéristique</u>. Par définition, l'<u>enveloppe</u> des surfaces (1) (dites enveloppées) est le lieu des caractéristiques (4); on obtient donc son équation en éliminant C entre les deux équations (4).

241 — La caractéristique qui correspond à la surface $f(x,y,z,c)=0$ (et qu'on appellera caractéristique c) coupe la surface infiniment voisine (2) en des points qui vérifient les équations:

$$f(x,y,z,c)=0\,; \qquad f'_c(x,y,z,c)=0\,; \qquad f(x,y,z,c+dc)=0$$

La dernière équation s'écrit, en tenant compte des deux premières, et en divisant par $\overline{dc}^2$:

$$\frac{1}{2} f''_{c^2}(x,y,z,c) + \frac{dc}{6} f'''_{c^3}(x,y,z,c+\theta.dc) = 0,$$

de sorte que, à la limite, les points considérés sont donnés par les trois équations:

$$(5) \qquad f=0\,; \qquad f'_c=0\,; \qquad f''_{c^2}=0\,.$$

Le lieu de ces points, obtenu en éliminant c entre les trois équations (5), est une courbe, évidemment située sur l'enveloppe, et qu'on nomme arête de rebroussement de cette enveloppe.

242. – Théorème I. – Chaque enveloppée est tangente à l'enveloppe tout le long de la caractéristique correspondante.

Soit l'enveloppée $f(x,y,z,c_0)=0$; prenons un point, P, x_0, y_0, z_0 sur la caractéristique c_0 correspondante; on a:

$$(6) \qquad f(x_0,y_0,z_0,c_0)=0\,; \qquad f'_c(x_0,y_0,z_0,c_0)=0$$

Désignons par x_1, y_1, z_1 un point Q de l'enveloppe, voisin de x_0, y_0, z_0, et d'ailleurs quelconque; pour établir le théorème, il faut, d'après la théorie du contact, montrer que $f(x_1,y_1,z_1,c_0)$ est du second ordre par rapport à la distance PQ.

Or Q, étant sur l'enveloppe, est sur une caractéristique, c_1, voisine de la caractéristique c_0; en sorte qu'on a:

$$(7) \qquad f(x_1,y_1,z_1,c_1)=0\,; \qquad f'_c(x_1,y_1,z_1,c_1)=0\,.$$

Alors:

$$f(x_1, y_1, z_1, c_0) = f(x_1, y_1, z_1, c_1 + \overline{c_0 - c_1}) = f(x_1, y_1, z_1, c_1) + (c_0 - c_1) f'_c(x_1, y_1, z_1, c_1) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}(c_0 - c_1)^2 f''_{c^2}(x_1, y_1, z_1, c_1) + \dots$$

c. à. d. que $f(x_1, y_1, z_1, c_0)$ est du second ordre en $(c_0 - c_1)$. Tout se réduit alors à établir que la distance PQ est du premier ordre au plus en $c_0 - c_1$; or la seconde des relations (7) donne, en tenant compte de (6):

$$(8) \quad 0 = f'_c(x_1, y_1, z_1, c_1) = f'_c(x_0 + \overline{x_1 - x_0}, \dots, c_0 + \overline{c_1 - c_0}) = f'_c(x_0, y_0, z_0, c_0) + (x_1 - x_0) f''_{c.x} + (y_1 - y_0) f''_{c.y} +$$

$$+ (z_1 - z_0) f''_{c.z} + (c_1 - c_0) f''_{c^2} + \dots$$

ce qui montre (en excluant le cas particulier où $f''_{c^2}(x_0, y_0, z_0, c_0)$ serait nul, c. à. d. où le point P serait sur l'arête de rebroussement) que $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$ et $z_1 - z_0$ ne peuvent être tous trois d'ordre supérieur à $c_0 - c_1$.[1] Il en résulte que

$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2},$$

qui est plus grand, en valeur absolue, que $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, $z_1 - z_0$, ne peut être d'ordre supérieur à $c_0 - c_1$; PQ est donc du premier ordre, au plus, en $c_0 - c_1$, ce qui établit le théorème.

243. _ Théorème II. _ L'arête de rebroussement a un contact du second ordre avec chaque enveloppée, et un contact du premier ordre avec chaque caractéristique.

Soit x_0, y_0, z_0 un point P de l'arête de rebroussement, c_0 la valeur correspondante du paramètre. On a:

$$(9) \qquad f(x_0, y_0, z_0, c_0) = 0; \quad f'_c(x_0, y_0, z_0, c_0) = 0; \quad f''_{c^2}(x_0, y_0, z_0, c_0) = 0.$$

Un point infiniment voisin $Q(x_1, y_1, z_1, c_1)$ de l'arête donne de même:

$$(10) \qquad f(x_1, y_1, z_1, c_1) = 0; \quad f'_c(x_1, y_1, z_1, c_1) = 0; \quad f''_{c^2}(x_1, y_1, z_1, c_1) = 0$$

[1] Car si $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, $z_1 - z_0$ étaient d'ordre supérieur à $c_1 - c_0$, il y aurait, dans l'équation (8), un seul terme d'ordre plus petit que tous les autres, à savoir $(c_1 - c_0) f''_{c^2}$: ce terme ne pouvant se réduire avec aucun autre, le dernier membre de (8) ne pourrait être nul.

Je dis que l'arête de rebroussement a, au point P, un contact du second ordre avec l'enveloppée $f(x,y,z,c_0)=0$, et un contact du premier ordre avec la caractéristique C_0 : $f(x,y,z,c_0)=f'_c(x,y,z,c_0)=0$. il suffit pour cela d'établir que les quantités

$$f(x_1,y_1,z_1,c_0) \text{ et } f'_c(x_1,y_1,z_1,c_0)$$

sont respectivement du troisième et du second ordre par rapport à PQ. Or on a, en tenant compte de (10):

$$f(x_1,y_1,z_1,c_0)=f(x_1,y_1,z_1,c_1)+(c_0-c_1)f'_c(x_1,y_1,z_1,c_1)+\tfrac{1}{2}(c_0-c_1)^2 f''_{c^2}(x_1,y_1,z_1,c_1)+\tfrac{1}{6}(c_0-c_1)^3 f'''_{c^3}(\quad)+\dots$$

$$f'_c(x_1,y_1,z_1,c_0)=f'_c(x_1,y_1,z_1,c_1)+(c_0-c_1)f''_{c^2}(x_1,y_1,z_1,c_1)+\tfrac{1}{2}(c_0-c_1)^2 f'''_{c^3}(x_1,y_1,z_1,c_1)+\dots$$

c.à.d. que $f(x_1,y_1,z_1,c_0)$ et $f'_c(x_1,y_1,z_1,c_0)$ sont respectivement du troisième et du second ordre en c_0-c_1.

Tout se réduit à établir que PQ est <u>au plus</u> d'ordre un par rapport à c_0-c_1. La troisième des relations (10) donne, en tenant compte de (9):

$$0=f''_{c^2}(x_1,y_1,z_1,c_1)=f''_{c^2}(x_0+\overline{x_1-x_0},\dots c_0+\overline{c_1-c_0})=f''_{c^2}(x_0,y_0,z_0,c_0)+(x_1-x_0)f'''_{c^2x}+(y_1-y_0)f'''_{c^2y}+$$
$$+(z_1-z_0)f'''_{c^2z}+(c_1-c_0)f'''_{c^3}+\dots$$

d'où il résulte (en supposant $f'''_{c^3}(x_0,y_0,z_0,c_0)\gtrless 0$, c.à.d. en excluant certains points particuliers de l'arête de rebroussement) que x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0 ne peuvent être à la fois d'ordre supérieur à c_0-c_1. Par suite $PQ=\sqrt{(x_0-x_1)^2+\dots}$ est <u>au plus</u> du premier ordre en c_0-c_1, ce qui établit le théorème.

244. – Exemple ; surfaces développables. – Une surface développable est l'enveloppe d'un plan mobile, dont l'équation contient un paramètre. Les caractéristiques, intersections d'un plan et du plan infiniment voisin de la famille, sont des droites ; d'après le théorème II, ces droites sont tangentes à une même courbe (arête de rebroussement). On peut donc dire qu'une surface développable est le lieu des tangentes d'<u>une</u> courbe <u>gauche</u> ; inversement, nous verrons plus tard que les tangentes de toute <u>courbe</u> gauche déterminent une développable.

Les théorèmes I et II montrent en outre que chaque plan de la

famille touche la surface développable tout le long d'une droite (caractéristique) et a un contact du second ordre avec l'arête de rebroussement, au point où celle-ci touche la caractéristique correspondante.

Enveloppe d'une famille doublement infinie.

245. – Soient les surfaces représentées par l'équation :

(11) $$f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0,$$

où λ et μ sont deux paramètres. Une de ces surfaces (λ, μ) coupe une surface infiniment voisine $(\lambda + d\lambda, \mu + d\mu)$ le long de la courbe représentée par les équations :

$$\begin{cases} f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0 \\ f(x, y, z, \lambda + d\lambda, \mu + d\mu) = 0 \end{cases} \quad \text{ou (N° 17)} : \quad \begin{cases} f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0 \\ d\lambda f'_\lambda(x, y, z, \lambda + \theta\, d\lambda, \mu + d\mu) + \\ \quad + d\mu f'_\mu(x, y, z, \lambda, \mu + \theta' d\mu) = 0 \end{cases}$$

à la limite, on voit que les deux surfaces passent, quelque soit le rapport de $d\lambda$ à $d\mu$, par les points déterminés par les trois équations :

(12) $$f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0 \; ; \quad f'_\lambda(x, y, z, \lambda, \mu) = 0 \; ; \quad f'_\mu(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$$

En d'autres termes, une des surfaces (11) et toutes les surfaces infiniment voisines de la famille passent par les points (12) : le lieu de ces points (points caractéristiques) est dit l'enveloppe des surfaces de la famille : ce lieu est une surface, dont l'équation s'obtient en éliminant λ et μ entre les trois équations (12).

246. – Théorème. – Chaque enveloppée touche l'enveloppe aux points caractéristiques correspondants.

On le démontrerait par une méthode semblable à celle du N° 242.

III. – Longueur d'un arc de courbe.

---

247. – Soit un arc de courbe gauche, limité à deux points, a_0,

(x_0, y_0, z_0) et $A (X, Y, Z)$. Marquons sur cet arc des points intermédiaires, $a_1, a_2, \dots a_n, a_{n+1}, \dots a_p$: je dis que le périmètre de la ligne polygonale dont les sommets sont $a_0, a_1, a_2, \dots A$ tend vers une limite quand le nombre des côtés de la ligne augmente indéfiniment, chacun d'eux tendant vers zéro.

En effet, le côté $a_n a_{n+1}$ a pour longueur :

$$a_n a_{n+1} = \sqrt{(x_{n+1}-x_n)^2 + (y_{n+1}-y_n)^2 + (z_{n+1}-z_n)^2}$$

Or, les coordonnées x, y, z d'un point de la courbe sont fonctions d'un paramètre, lequel peut être supposé x :

$$y = \varphi(x) \ ; \quad z = \psi(x)$$

et on a :

$$y_{n+1} - y_n = (x_{n+1} - x_n)\,\varphi'(\xi_n) ; \quad z_{n+1} - z_n = (x_{n+1} - x_n)\,\psi'(\xi'_n),$$

ξ_n et ξ'_n étant intermédiaires entre x_n et x_{n+1}. Par suite :

$$a_n a_{n+1} = (x_{n+1} - x_n)\sqrt{1 + \varphi'^2(\xi_n) + \psi'^2(\xi'_n)}$$

Si ξ'_n était égal à ξ_n, la somme $\Sigma(a_n a_{n+1})$ (qui est le périmètre) aurait pour limite, par définition, l'intégrale définie

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{X} \sqrt{1 + \varphi'^2(x) + \psi'^2(x)}\, dx \ ;$$

on peut établir rigoureusement que telle est en effet la limite, quels que soient ξ_n et ξ'_n.

Pour le voir considérons, d'une manière plus générale, la fonction composée

$$f\left[\varphi(x), \psi(x)\right],$$

où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions continues de x entre x_0 et X, ayant respectivement φ_0 et φ_1, ψ_0 et ψ_1, pour minimum et maximum dans cet intervalle. Supposons de plus que la fonction $f(\lambda, \mu)$ de deux variables indépendantes λ et μ, soit continue dans le rectangle limité par les droites $\lambda = \varphi_0$, $\lambda = \varphi_1$; $\mu = \psi_0$, $\mu = \psi_1$: en gardant les notations ci-dessus, je dis que la somme :

$$\Sigma(x_{n+1} - x_n)\, f\left[\varphi(\xi_n), \psi(\xi'_n)\right] ; \text{ ou pour abréger : } \Sigma(x_{n+1} - x_n)\left[\xi_n, \xi'_n\right]$$

a pour limite $\int_{x_0}^{X} f\left[\varphi(x), \psi(x)\right] dx$. Considérons en effet la différence :

$$\delta_n = f\left[\varphi(\xi_n), \psi(\xi_n)\right] - f\left[\varphi(\xi_n), \psi(\xi'_n)\right];$$

je dis qu'on peut prendre les divisions $x_{n+1} - x_n$ assez petites pour que son module soit inférieur à tout nombre donné ε : car $f(\lambda, \mu)$, étant continue, et par suite uniformément continue, dans le rectangle indiqué plus haut, a un module de continuité uniforme, $\eta(\varepsilon)$; donc mod δ_n sera $< \varepsilon$ dès que $\left|\psi(\xi_n) - \psi(\xi'_n)\right|$ sera $< \eta(\varepsilon)$: d'ailleurs $\psi(x)$, étant continue entre x_0 et X, a un module de continuité uniforme $\zeta(\varepsilon')$, pour tout nombre ε', en sorte que $\left|\psi(\xi_n) - \psi(\xi'_n)\right|$ sera $< \eta(\varepsilon)$ dès que mod$(\xi_n - \xi'_n)$ sera $< \zeta(\eta)$. Si donc toutes les divisions $x_{n+1} - x_n$ sont inférieures à $\zeta[\eta(\varepsilon)]$, toutes les différences δ_n seront $< \varepsilon$.

On a alors

$$\text{mod}\left[\Sigma(x_{n+1} - x_n)\left[\xi_n, \xi_n\right] - \Sigma(x_{n+1} - x_n)\left[\xi_n, \xi'_n\right]\right] = \text{mod}\left[\Sigma(x_{n+1} - x_n)\,\delta_n\right]$$

$$< \text{mod}\ \varepsilon\,\Sigma(x_{n+1} - x_n), \text{ ou } \varepsilon(X - x_0).$$

ce qui prouve que la somme $\Sigma(x_{n+1} - x_n)\left[\xi_n, \xi'_n\right]$ a même limite que la somme $\Sigma(x_{n+1} - x_n)\left[\xi_n, \xi_n\right]$, c. à. d. a pour limite $\int_{x}^{x_0} f\left[\varphi(x), \psi(x)\right] dx$.

c. q. f. d.

Il suffit maintenant d'appliquer ce théorème à la somme $\Sigma(x_{n+1} - x_n)\sqrt{1 + \varphi'^2(\xi_n) + \psi'^2(\xi_n)}$ pour établir la proposition qu'on avait en vue ; ainsi :

$$\lim \Sigma a_n a_{n+1} = \int_{x_0}^{X} \sqrt{1 + \varphi'^2(x + \psi'^2(x)}\, dx = \int_{x_0}^{X} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx$$

La limite ainsi déterminée se nomme la <u>longueur de l'arc</u> $x_0 X$.

248. — Si la courbe est définie par

$$x = \varphi(t); \qquad y = \psi(t); \qquad z = \chi(t),$$

on a :

$$dx = \varphi'(t)\, dt; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}; \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Portant ces valeurs dans l'expression de l'arc, celle-ci devient,

en vertu de la règle du changement de variable dans l'intégrale définie :

$$\int_{t_0}^{T} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\, dt \quad \text{ou :} \int_{t_0}^{T} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

t_0 et T étant les valeurs de t qui correspondent à l'origine et à l'extrémité de l'arc.

249. – Si S est l'arc compris entre les points d'arguments t_0 et t :

$$S = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt,$$

on a, en dérivant les deux membres par rapport à t (n° 170)

$$\frac{dS}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \; ;$$

d'où, pour la <u>différentielle de l'arc</u> :

$$dS = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},$$

c. à. d. que la valeur principale, dS, d'un arc infiniment petit est égale à sa corde, ce qui est évident si l'on admet que la notion d'arc est une notion première.

250. – Valeur de ds en coordonnées polaires et semi-polaires. – Dans le plan, on a :

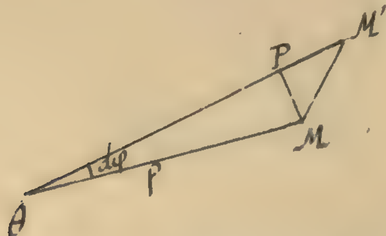
$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \quad \text{d'où :} \begin{cases} dx = d\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi\, d\varphi \\ dy = d\rho\sin\varphi + \rho\cos\varphi\, d\varphi \end{cases} ;$$

ce qui donne :

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2,$$

formule évidente géométriquement ; car :

$$dx^2+dy^2 = \overline{MM'}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PM'}^2$$



Or $MP = \rho\sin\overline{d\varphi}$, dont la valeur principale est $\rho\, d\varphi$; et

$$M'P = OM' - OP = \rho + d\rho - OP :$$

Mais OP, aux infiniment petits près du <u>second</u> ordre est égal à $OM = \rho$ (n° 3) ; il reste donc $d\rho$ pour valeur principale de $M'P$; d'où :

$$\overline{MM'}^2 = \rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2 .$$

Dans l'espace, en coordonnées polaires (N° 221)

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\psi & \qquad dx = \ldots\ldots \\ y = \rho \sin\theta \sin\psi \quad \text{d'où} & \qquad dy = \ldots\ldots \\ z = \rho \cos\theta & \qquad dz = \ldots\ldots \end{cases}$$

et

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta \, d\psi^2 .$$

En coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos\psi \\ y = r\sin\psi \\ z = z \end{cases} \qquad ds^2 = dr^2 + r^2 d\psi^2 + dz^2 .$$

Chapitre II.

Chapitre II.

Courbes planes.

251. – Osculation. – Soit un système de courbes dont l'équation contient $n+1$ paramètres : on dira qu'une de ces courbes est osculatrice en un point donné P à une courbe plane, C_1, si elle a, en ce point, avec C_1, un contact de l'ordre le plus élevé possible. Les conditions du contact d'ordre k en un point donné étant au nombre de $k+1$ (n° 231), on voit que la courbe osculatrice considérée aura, en général, avec C_1, un contact d'ordre n.

On peut dire aussi (n° 238) que la courbe osculatrice a avec C_1 $n+1$ points d'intersection confondus en P.

Par exemple, la droite osculatrice en un point ($n=1$) sera la tangente ; de même, un cercle dépendant de 3 paramètres, il y aura, en chaque point, P, d'une courbe, un cercle, dit osculateur, ayant avec la courbe un contact du second ordre en P, c. à. d. trois points d'intersection confondus en P ; il y aura une conique, dite osculatrice, ayant un contact du quatrième ordre, c. à. d. cinq points d'intersection confondus, etc.......

252. – Tangente. – Soit C_1 la courbe définie par :

$$(1) \qquad x = x(t) \; ; \qquad y = y(t) \; ;$$

la droite :

$$aX + bY + c = 0$$

aura un contact du premier ordre avec C_1, au point d'argument t, si l'on a (n° 231) :

$$F(t) = a\,x(t) + b\,y(t) + c = 0\,,$$
$$F'(t) = a\,x'(t) + b\,y'(t) \qquad = 0\,,$$

équations d'où l'on déduit les valeurs proportionnelles de a, b, c. L'équation de la tangente est ainsi :

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ x & y & 1 \\ x' & y' & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-x & Y-y & 0 \\ x & y & 1 \\ x' & y' & 0 \end{vmatrix}, \text{ c. à. d. :}$$

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'}\,,$$

comme on le savait a priori, car $\frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dx}$.

253. – Cercle osculateur. – Le cercle :

$$(X-\alpha)^2 + (Y-\beta)^2 - R^2 = 0$$

aura un contact du second ordre au point t, avec la courbe (1) si l'on a :

(2) $$F(t) = \left[x(t)-\alpha\right]^2 + \left[y(t)-\beta\right]^2 - R^2 = 0$$

(3) $$\tfrac{1}{2}\,F'(t) = (x-\alpha)\,x' + (y-\beta)\,y' \qquad = 0$$

(4) $$\tfrac{1}{2}\,F''(t) = (x-\alpha)\,x'' + (y-\beta)\,y'' + x'^2 + y'^2 = 0$$

Ces trois équations donnent le centre, α, β et le rayon, R, du cercle osculateur. Les deux dernières font connaître $x-\alpha$ et $y-\beta$; d'où :

(5) $$\alpha = x - \frac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}\,; \qquad \beta = y + \frac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}\,.$$

La première donne ensuite R^2 :

(6) $$R^2 = \frac{(x'^2+y'^2)^3}{(x'y''-y'x'')^2}\,; \quad \text{d'où} \quad \pm R = \frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-y'x''}$$

Si la courbe est donnée sous la forme $y = f(x)$, on posera $x = t$; $y = f(t)$; d'où $x' = 1$, $x'' = 0$; quant à y' et y'' ce seront les dérivées de y par rapport à x, déduites de l'équation de la courbe donnée. On a alors

(7) $$\pm R = \frac{\left[1 + y'^2_x\right]^{\frac{3}{2}}}{y''_x}$$

Le contact du cercle osculateur et de la courbe étant d'ordre pair, le cercle traverse la courbe au point de contact (N° 231).

254. – Développée. – La développée est le lieu des centres des cercles osculateurs aux divers points d'une courbe ; son équation (relation entre α et β) s'obtient en éliminant t entre les deux équations (5), ou, ce qui revient au même, entre les équations (3) et (4).

Or l'équation (3), en y regardant α et β comme les coordonnées courantes :

(3) $$(x-\alpha)x' + (y-\beta)y' = 0$$

est celle de la normale à la courbe proposée au point $x(t), y(t)$; le premier membre de l'équation (4) est la dérivée, par rapport au paramètre t, du premier membre de (3) ; donc, en éliminant t entre ces deux équations on obtient l'enveloppe des normales à la proposée. Ainsi :

Le lieu des centres des cercles osculateurs coïncide avec l'enveloppe des normales.

On peut dire aussi, d'après la définition de l'enveloppe, que le centre du cercle osculateur en un point est à l'intersection de la normale en ce point avec la normale infiniment voisine.

255. – Courbure. – On nomme angle de contingence l'angle, φ, de la tangente en un point, P, d'une courbe avec la tangente au point infiniment voisin, P' ; la limite du rapport $\left[\frac{\varphi}{\text{arc } PP'}\right]$ est dite la courbure au point P.

Pour l'évaluer, désignons par α l'angle de la tangente avec Ox ; on a :

$$\varphi = d\alpha \quad ; \qquad tg\,\alpha = \frac{y'}{x'}$$

d'où :

$$\alpha = \text{arc } tg\,\frac{y'}{x'}$$

$$d\alpha = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2 + y'^2}\,dt$$

D'ailleurs.

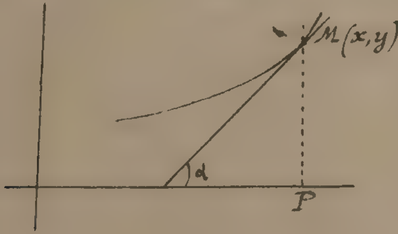
$$\text{arc } PP' = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (N° 249)$$

ce qui donne pour la courbure K :

$$K = \frac{d\alpha}{PP'} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

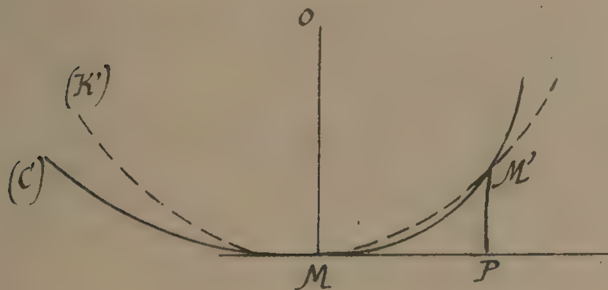
L'inverse de la courbure, $\frac{1}{K}$, se nomme rayon de courbure ; on voit que le rayon de courbure en un point est celui du cercle osculateur au même point. De là les noms de cercle de courbure donné à ce cercle, et de centre de courbure donné à son centre.

Remarque. – Si l'angle α croît (ou décroît) avec x, c. à. d. si $\frac{d\alpha}{dx}$ est positif (ou négatif) la courbe tourne sa concavité (ou sa convexité) vers les y positifs; comme $\frac{d\alpha}{dx}$ a le signe de $(x'y''-y'x'')\frac{dt}{dx}$, c. à. d. de $\frac{x'y''-y'x''}{x'}$, on voit que la courbe sera concave ou convexe vers les y positifs selon que $x'y''-y'x''$ aura ou non le même signe que x'.



Les points pour lesquels $x'y''-y'x''$ est nul sont dits d'inflexion: le rayon du cercle de courbure y est infini, c. à. d. que ce cercle se réduit à la tangente, qui a dès lors trois points d'intersection confondus avec la courbe et traverse celle-ci au point de contact.

256. – Cherchons, comme exemple d'infiniment petit, la valeur principale de la distance d'un point, M', d'une courbe C, à la tangente au point infiniment voisin, M.



Considérons à cet effet le cercle K' qui touche la courbe C en M et qui passe par M'; soit R' son rayon: on a dans ce cercle:

$$[\text{corde } MM']^2 = 2R'.M'P; \text{ d'où}$$

$$M'P = \frac{\overline{MM'}^2}{2R'}$$

Faisons tendre maintenant M' vers M: le cercle (K'), qui touche C en M et passe par M', aura à la limite, trois points d'intersection avec C confondus en M; il deviendra donc le cercle osculateur, et $\lim R' = R$. D'ailleurs la corde MM' a même valeur principale que l'arc $MM' = dS$; on a donc:

$$\text{valeur principale de } M'P = \frac{dS^2}{2R};$$

R étant le rayon du cercle osculateur en M.

Remarque. – Le centre et le rayon du cercle osculateur en un point x, y à une courbe $y = f(x)$ ne dépendent que de x, y, y'_x, y''_x: si donc deux courbes ont en un point un contact du second ordre, elles ont même cercle de courbure en ce point, puisque x, y, y' et y'' sont (N° 232) les mêmes pour les deux courbes.[1]

(1) Voir cette note page suivante.

256bis. Rayon de courbure en coordonnées polaires. — On pose

$$x = \rho \cos \omega , \quad y = \rho \sin \omega ;$$

on demande d'exprimer

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

en fonction de ρ, ω, et des dérivées ρ'_ω et ρ''_ω de ρ par rapport à ω.

C'est un problème de changement de variables, traité au Nº 39. On a trouvé :

$$y' = \frac{\rho' \sin \omega + \rho \cos \omega}{\rho' \cos \omega - \rho \sin \omega} ; \qquad y'' = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho' \cos \omega - \rho \sin \omega)^3} ;$$

portons ces valeurs dans l'expression de R, nous obtenons :

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$$

257. — On peut définir une courbe plane par une relation

$$K = f(s)$$

entre la courbure K en un point P et l'arc, s, compté à partir d'un point fixe jusqu'en P ; ces deux quantités dépendant d'une même variable, t, sont en effet fonctions l'un de l'autre.

Ce mode de définition n'introduit aucun élément étranger à la courbe, comme le sont les axes de coordonnées ; deux courbes égales, mais différemment placées ont la même équation.

Voici comment on peut trouver l'équation cartésienne d'une courbe définie par

$$K = f(s) .$$

Soit toujours α l'angle de la tangente avec Ox ; on a $K = \frac{d\alpha}{ds}$; d'où

---

(1) Plus généralement, si une courbe plane $y = f(x)$ a un contact d'ordre n en un point (x, y) avec deux courbes planes $Y = \varphi_1(x)$, $Y = \varphi_2(x)$, ces deux dernières ont aussi entre elles, au même point un contact d'ordre n. Cela résulte, soit de la définition du contact, soit de ce que les équations (Nº 232) :

$$y = Y_1 ; \quad y' = Y'_1 ; \ldots\ldots\ldots\ldots y^n = Y_1^n$$
$$y = Y_2 ; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y^n = Y_2^n$$

entraînent

$$Y_1 = Y_2 ; \quad Y'_1 = Y'_2 ; \ldots\ldots\ldots\ldots Y_1^n = Y_2^n$$

Ainsi, deux courbes qui ont entre elles, en un point, un contact de quatrième ordre, ont même conique osculatrice en ce point.

$$d\alpha = f(s)\,ds$$

et

$$\alpha - \alpha_0 = \int f(s)\,ds$$

α_0 étant la constante d'intégration : résolvant cett équation par rapport à s, on en tirera

(8) $$s = F(\alpha - \alpha_0)\,;\quad \frac{ds}{d\alpha} = F'(\alpha - \alpha_0).$$

On a d'ailleurs :

$$\frac{dy}{dx} = tg\,\alpha\,;\quad \text{c. à. d.}\quad \frac{dy}{\sin\alpha} = \frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{1} = ds$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} dx = ds\cos\alpha \\ dy = ds\sin\alpha \end{cases}$$

et par suite, d'après (8) :

$$dx = F'(\alpha - \alpha_0)\cos\alpha\,d\alpha$$
$$dy = F'(\alpha - \alpha_0)\sin\alpha\,d\alpha$$

d'où

$$\begin{cases} x - x_0 = \int F'(\alpha - \alpha_0)\cos\alpha\,d\alpha \\ y - y_0 = \int F'(\alpha - \alpha_0)\sin\alpha\,d\alpha \end{cases}$$

x_0 et y_0 étant des constantes arbitraires.

Les coordonnées x et y sont ainsi exprimées en fonction d'un paramètre, α, ce qui résout le problème.

On voit qu'il y a une infinité de courbes répondant à la question, puisqu'il y a, dans les expressions de x et y, trois paramètres arbitraires, α_0, x_0 et y_0 : toutes ces courbes sont identiques entre elles, c. à. d. ne sont que des positions d'une même courbe qu'on déplacerait dans le plan d'une manière quelconque.

En effet, faisons, sous les signes $\int$, le changement de variable

$$\alpha = \alpha_0 \pm t\,;$$

on a

$$x = x_0 + \int F'(t)\cos(\alpha_0 + t)\,dt = x_0 + \cos\alpha_0 \int F'(t)\cos t\,dt - \sin\alpha_0 \int F'(t)\sin t\,dt$$

$$y = y_0 + \int F'(t)\sin(\alpha_0 + t)\,dt = x_0 + \sin\alpha_0 \int F'(t)\cos t\,dt + \cos\alpha_0 \int F'(t)\sin t\,dt,$$

formules de la même forme que celles de la transformation des coordonnées en axes rectangulaires, et qui montrent que la courbe considérée n'est autre chose que la courbe

$$x = \int F'(t)\cos t\, dt,$$

$$y = \int F'(t)\sin t\, dt,$$

qu'on fait tourner de l'angle α_0 autour de l'origine, et qu'on transporte ensuite parallèlement à elle-même, de x_0 dans le sens de ox, et de y_0 dans le sens de oy. D'après cela, on pourra se dispenser, dans les calculs, d'introduire les constantes d'intégration α_0, x_0 et y_0.

Exemple. – Courbe dont la courbure est constante. – On a

$$K = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{a}$$

d'où

$ds = a\, d\alpha$; ce qui donne immédiatement :
$dx = a \cos\alpha\, d\alpha$; $\quad dy = a \sin\alpha\, d\alpha$

Par suite :

$$x = \int a \cos\alpha\, d\alpha = a \sin\alpha$$

$$y = \int a \sin\alpha\, d\alpha = -a\cos\alpha.$$

La courbe cherchée a donc pour équation (en éliminant α entre les deux dernières relations) :

$$x^2 + y^2 = a^2$$

C'est un cercle de rayon a. Le cercle est donc la seule courbe plane de courbure constante.

Applications.

---

258. – Rappelons les formules :

(S) $$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$$

(R) $$R = \pm \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''}$$

(II) $$\begin{cases} \alpha = x - y' \dfrac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''} \\ \beta = y + x' \dfrac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''} \end{cases}$$

Parabole. — $y^2 = 2px$

Prenons y pour variable indépendante ; $y = t$; $y' = 1$; $y'' = 0$.
On aura

$$x = \frac{y^2}{2p} \; ; \qquad x' = \frac{y}{p} \; ; \quad x'' = \frac{1}{p}$$

et il viendra, pour les éléments du cercle osculateur :

$$R = \frac{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$$

$$\alpha = \frac{y^2}{2p} + \frac{y^2+p^2}{p} = p + \frac{3}{2}\,\frac{y^2}{p}$$

$$\beta = y - y\,\frac{y^2+p^2}{p^2} = -\,\frac{y^3}{p^2}$$

La développée s'obtient en éliminant y entre les deux dernières équations :

$$(\alpha - p)^3 = \frac{27}{8}\,p\,\beta^2$$

L'arc est donné par l'intégrale :

$$s = \int \sqrt{1+x'^2}\,dy = \frac{1}{p}\int \sqrt{y^2+p^2}\,dy$$

Elle est d'un type intégrable (N° 133) ; le plus simple est de la réduire en appliquant la méthode du N° 160 (Voir aussi N° 178).

On a :

$$I = \int dy\,\sqrt{y^2+p^2} = \int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^2+p^2}} + p^2 \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+p^2}}$$

Or :

$$\left(y\sqrt{y^2+p^2}\right)' = \sqrt{y^2+p^2} + \frac{y^2}{\sqrt{y^2+p^2}} = \frac{2y^2+p^2}{\sqrt{y^2+p^2}}$$

d'où :

$$2\int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^2+p^2}} = y\,\sqrt{y^2+p^2} - p^2 \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+p^2}}$$

De sorte que l'intégrale à calculer, I, devient :

$$I = \frac{1}{2}\,y\,\sqrt{y^2+p^2} + \frac{1}{2}\,p^2 \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+p^2}}$$

et l'arc s :

$$s = \frac{1}{p}\,I = \frac{y}{2p}\sqrt{y^2+p^2} + \frac{1}{2}\,p\,\log\left(y + \sqrt{y^2+p^2}\right) + \text{const.}$$

Si l'arc est compté à partir du sommet, $s=0$ pour $y=0$; la constante est donc égale à $-\frac{1}{2}p\log p$; et finalement :

$$s=\frac{y}{2p}\sqrt{y^2+p^2}+\frac{1}{2}p\log\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}$$

259. – Ellipse. – L'ellipse est définie par

$$\begin{cases} x=a\cos t\,; \\ y=b\sin t\,; \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x'=-a\sin t \\ y'=b\cos t \end{cases} \quad \begin{cases} x''=-a\cos t \\ y''=-b\sin t \end{cases}$$

On a alors :

$$R=\frac{\left[a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t\right]^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

Si N est la normale limitée à son pied d'une part et à Ox d'autre part, on voit aisément que

$$R=\frac{N^3}{\left(\frac{b^4}{a^2}\right)}$$

Pour la développée :

$$\alpha=a\cos t-b\cos t\,\frac{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}{ab}=\frac{c^2}{a}\cos^3 t$$

$$\beta=b\sin t-a\sin t\,.\,\frac{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}{ab}=-\frac{c^2}{b}\sin^3 t$$

d'où l'équation de la développée :

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}$$

L'arc est donné par :

$$s=\int\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\int\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$$

ou

$$s=\int\sqrt{a^2-c^2\cos^2 t}\,dt\,.$$

C'est une intégrale elliptique, car si on prend $\cos t$ pour variable, en posant

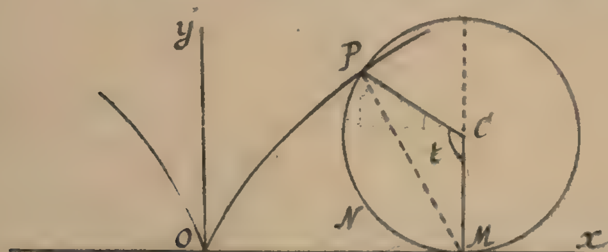
$$\cos t=u\,;\quad \text{d'où} \quad \begin{cases} t=\arccos u \\ dt=\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} \end{cases}$$

On a :

$$s = \int \frac{\sqrt{a^2-c^2u^2}}{\sqrt{1-u^2}}\, du = \int \frac{(a^2-c^2u^2)\,du}{\sqrt{(1-u^2)(a^2-c^2u^2)}}$$

On ne peut donc exprimer l'arc d'ellipse à l'aide des fonctions élémentaires.

260. – Cycloïde. – C'est la courbe décrite par un point d'un cercle, de rayon a, qui roule, sans glisser, sur une droite.



Supposons que cette droite soit l'axe des x, et que l'origine, O, soit la position du point décrivant, P, au moment où celui-ci se trouve sur l'axe des x : d'après les conditions du mouvement, on aura, à chaque instant,

$$\text{arc } MNP = OM$$

Si donc t est l'angle MCP, on aura, pour les coordonnées de P, en projetant le contour $OMCPO$ sur Ox et sur Oy :

$$x = OM - CP \sin t = a(t - \sin t)$$
$$y = CM - CP \cos t = a(1 - \cos t)$$

On en conclut, par un calcul facile :

$$R = 2\sqrt{2}\, a(1-\cos t)^{\frac{1}{2}} = 4a \sin\frac{t}{2}$$

Le rayon de courbure est donc égal à $2.MP$; on vérifie d'ailleurs immédiatement que la normale en P à la cycloïde passe par M, c. à. d. est la droite PM : le centre de courbure est donc le symétrique de P par rapport au point de contact correspondant, M, du cercle avec Ox.

On trouve pour la <u>développée</u> :

$$\alpha = a(t + \sin t)$$
$$\beta = -a(1 - \cos t)$$

Si l'on pose $t = u + \pi$, on peut écrire :

$$\alpha - a\pi = a(u - \sin u)$$
$$\beta + 2a = a(1 - \cos u).$$

c. à. d. que le lieu de α, β n'est autre chose que la cycloïde primitive, déplacée de $a\pi$ dans le sens de Ox, et de $-2a$ dans le sens de Oy.

Les formules ci-dessus donnent aussi :

$$\alpha + x = 2at ; \quad \beta + y = 0,$$

c. à. d. que le milieu du segment PQ (Q étant le centre de courbure (α, β) est le point $(at, 0)$ c. à. d. le point M, comme on l'a déjà observé.



L'<u>arc</u> OP de cycloïde est donné par :

$$s = \int_0^t \sqrt{2a^2(1-\cos t)}\, dt = \int_0^t 2a \sin\frac{t}{2}\, dt = \left[-4a\cos\frac{t}{2}\right]_0^t$$

c. à. d.

$$s = 4a\left(1 - \cos\frac{t}{2}\right)$$

La longueur de la boucle OTA s'obtient en faisant $t = 2\pi$; c'est donc $8a$; c. à. d. huit fois le rayon du cercle générateur.

L'<u>aire</u> ombrée comprise entre la cycloïde, Ox et l'ordonnée de P est

$$\mathcal{A} = \int y\, dx = a^2 \int_0^t (1-\cos t)^2\, dt = a^2\left[t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^t$$

c. à. d.

$$\mathcal{A} = a^2\left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]$$

L'aire de la boucle OTA est $(t = 2\pi)$ égale à $3\pi a^2$, c. à. d. à trois fois l'aire du cercle générateur.

Chapitre III.

Courbes gauches.

261. – Osculation. — Une surface, appartenant à une famille dont l'équation contient $n+1$ paramètres, pourra avoir en un point donné, avec une courbe gauche, un contact d'ordre n, puisque les conditions du contact d'ordre K, entre une courbe et une surface sont au nombre de $K+1$. Elle sera dite osculatrice à la courbe au point considéré.

De même, si une courbe gauche appartient à une famille dépendant de $2(n+1)$ paramètres, elle pourra avoir, en un point donné, avec une courbe gauche donnée, un contact d'ordre n, puisque (Nº 234) les conditions du contact d'ordre K entre deux courbes gauches, sont au nombre de $2(K+1)$. On dira encore, en ce cas qu'il y a osculation au point considéré.

Par exemple un plan, dépendant de 3 paramètres, pourra avoir, en un point donné, avec une courbe gauche, un contact du second ordre (plan osculateur). Un cercle, dépendant de six paramètres, pourra aussi avoir, en un point donné, un contact du second ordre (cercle osculateur).

262. – Tangente. – C'est la droite osculatrice en un point.

Considérons la courbe :

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t);$$

la droite

$$X = aZ + p \; ; \qquad Y = bZ + q$$

aura avec elle au point t, un contact du premier ordre si l'on a (N° 234)

$$\begin{cases} x(t) = az(t) + p\,; & y(t) = bz(t) + q \\ x' = az' & y' = bz' \end{cases}$$

d'où l'on tire les valeurs de a, b, p, q. La droite est alors :

$$X = \frac{x'}{z'} Z + x - \frac{x'}{z'} z \; ; \qquad Y = \ldots\ldots\ldots$$

ce qui s'écrit :

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'} = \frac{Z - z}{z'}$$

263. – Plan osculateur. – Le plan

(1) $$AX + BY + CZ + D = 0$$

aura, au point t, un contact du second ordre avec la courbe si l'on a (N° 233) :

(2) $$Ax(t) + By(t) + Cz(t) + D = 0$$

(3) $$Ax' + By' + Cz' = 0$$

(4) $$Ax'' + By'' + Cz'' = 0$$

L'équation du plan osculateur est donc, en tirant D de (2) :

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0,$$

A, B, C étant déterminés (proportionnellement) par (3) et (4) ; – si l'on

veut, on peut prendre (et c'est ce que nous supposerons toujours) :

$$(5) \qquad A = y'z'' - z'y'' \; ; \quad B = z'x'' - x'z'' \; ; \quad C = x'y'' - y'x''.$$

On peut écrire aussi l'équation du plan osculateur sous la forme :

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$$

Les équations de la tangente et celle du plan osculateur restent les mêmes quels que soient les angles des axes de coordonnées.

264. – Enveloppe des plans osculateurs. – Les plans osculateurs aux divers points d'une courbe gauche dépendent d'un paramètre, t ; leur enveloppe est donc une surface développable, Δ.

Je dis que les caractéristiques de Δ sont les tangentes de la courbe gauche proposée, et que l'arête de rebroussement de Δ est cette courbe elle-même : il suffit d'établir la seconde partie, car on sait que les caractéristiques sont ici des droites tangentes à l'arête de rebroussement (N° 244).

Le plan mobile étant

$$(7) \qquad f(t) = A\,(X-x) + B\,(Y-y) + C\,(Z-z) = 0,$$

l'arête de rebroussement s'obtient (N° 241) en éliminant t entre cette équation et les équations $f'_t = 0$; $f''_t = 0$. Ici :

$$(8) \qquad f'(t) = A'(X-x) + B'(Y-y) + C'(Z-z) - (Ax' + By' + Cz') = 0$$

car $Ax' + By' + Cz'$ est nul d'après (3).

$$(9) \qquad f''(t) = A''(X-x) + B''(Y-y) + C''(Z-z) - (A'x' + B'y' + C'z') = 0$$

Je dis que $A'x' + B'y' + C'z' = 0$. En effet, de l'identité

$$Ax' + By' + Cz' = 0$$

On déduit, en dérivant :

$$(Ax''+By''+Cz'')+(A'x'+B'y'+C'z')=0$$

et la première parenthèse étant nulle d'après (4), la seconde l'est aussi.

Alors les 3 équations (7), (8), (9) qui définissent un point X, Y, Z de l'arête, en fonction du paramètre t, sont linéaires et homogènes en $X-x$, $Y-y$, $Z-z$; on a donc :

$$X=x, \quad Y=y, \quad Z=z,$$

ce qui prouve bien que l'arête de rebroussement coïncide avec la courbe proposée.[1]

Donc enfin, comme on l'a annoncé au N° 244, le lieu des tangentes d'une courbe gauche quelconque est une développable, enveloppe des plans osculateurs de la courbe.

---

[1] Ce raisonnement suppose que le déterminant des 3 équations (7), (8) et (9) n'est pas nul identiquement. Admettons, pour simplifier, que la variable indépendante soit x, de sorte que $t=x$. Le déterminant des équations (7), (8) et (9) est :

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y'z''-z'y'' & -z'' & y'' \\ y'z'''-z'y''' & -z''' & y''' \\ y'z^{IV}-z'y^{IV}+y''z'''-z''y''' & -z^{IV} & y^{IV} \end{vmatrix}$$

puisque $x'=1$; $x''=x'''=0$. S'il est nul, on a dès lors, en ajoutant à la première colonne la seconde et la troisième, multipliées respectivement par y' et z' :

$$0=\begin{vmatrix} 0 & z'' & y'' \\ 0 & z''' & y''' \\ y''z'''-z''y''' & z^{IV} & y^{IV} \end{vmatrix} = (y''z'''-z''y''')^2$$

Donc :

$$\frac{y'''}{y''}=\frac{z'''}{z''} ;$$

et en remontant aux primitives :

$$\log y''=\log z''+\log a ; \quad \text{c.à.d.} \quad y''=az''$$

Remontons encore aux primitives :

$$y'=az'+b ;$$
$$y=az+bx+c,$$

d'où il résulte que la courbe est plane. En ce cas, tous les plans osculateurs se confondent avec le plan de la courbe, et il n'y a lieu de chercher ni leur enveloppe, ni l'arête de rebroussement de celle-ci.

La conclusion est que le théorème énoncé dans le texte ne s'applique qu'aux courbes gauches, et qu'il n'a d'ailleurs de sens que pour les courbes gauches.

265. — **Cercle osculateur.** — C'est celui qui a un contact du second ordre (N° 261) avec la courbe en un point donné, t.

Un cercle de l'espace peut être défini par les équations

$$(S)\qquad (X-\alpha)^2+(Y-\beta^2)+(Z-\gamma)^2-R^2=0$$

$$(P)\qquad m(X-\alpha)+n(Y-\beta)+p(Z-\gamma)=0$$

α, β, γ est le centre du cercle, R son rayon : il y a bien six paramètres, α, β, γ, R et les rapports $\frac{m}{p}$, $\frac{n}{p}$.

Il y aura contact du second ordre avec la courbe au point t (x, y, z) si l'on a (N° 234)

$$(10)\qquad \begin{cases} (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2 \\ (x-\alpha)x'+(y-\beta)y'+(z-\gamma)z'=0 \\ (x-\alpha)x''+(y-\beta)y''+(z-\gamma)z''+x'^2+y'^2+z'^2=0 \end{cases}$$

$$(11)\qquad \begin{cases} m(x-\alpha)+n(y-\beta)+p(z-\gamma)=0 \\ mx' \quad +ny' \quad +pz' \quad =0 \\ mx'' \quad +ny'' \quad +pz'' \quad =0 \end{cases}$$

L'élimination de m, n, p entre les trois équations (11) donne

$$\begin{vmatrix} x-\alpha & y-\beta & z-\gamma \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{ou:}$$

$$(12) \qquad A(x-\alpha)+B(y-\beta)+C(z-\gamma)=0,$$

c. à. d. que le centre α, β, γ du cercle est dans le plan osculateur au point x, y, z. Il en résulte que le cercle lui-même est dans ce plan, car son plan contient évidemment la tangente à la courbe au point considéré, droite du plan osculateur.

L'équation (12) et les deux dernières équations (10) déterminent α, β, γ, ou mieux $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$, et la première équation (10) donne ensuite R^2. On a ainsi :

$$x-\alpha = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & B & C \\ 0 & y' & z' \\ x'^2+y'^2+z'^2 & y'' & z'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ A & B & C \end{vmatrix}} = \frac{(x'^2+y'^2+z'^2)(Cy'-Bz')}{A^2+B^2+C^2}$$

et de même $y-\beta$, $z-\gamma$.

Enfin :

$$R^2 = \frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}\left[(Cy'-Bz')^2+(Az'-Cx')^2+(Bx'-Ay')^2\right]$$

$$R^2 = \frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}\left[(A^2+B^2+C^2)(x'^2+y'^2+z'^2)-(Ax'+By'+Cz')^2\right]$$

c'est-à-dire

$$R = \frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{1}{2}}}$$

266. – Remarque I. – La seconde équation (10), où α, β, γ sont les coordonnées courantes, est celle du plan normal à la courbe au point t ; la troisième équation (10) a pour premier membre la dérivée,

par rapport à t, du premier membre de la précédente : ces deux équations représentent donc la droite caractéristique de l'enveloppe des plans normaux. Cette droite est dite <u>axe du plan osculateur</u>, ou <u>axe de courbure</u> : elle est perpendiculaire au plan osculateur, comme on le voit de suite.

Le centre du cercle osculateur est donc à l'intersection du plan osculateur et de l'axe de courbure.

Remarque II. - Deux courbes gauches qui ont entre elles un contact du second ordre en un point ont même cercle osculateur, en ce point.

Plus généralement, si une courbe gauche $y=f(x)$; $z=g(x)$, a, en un point (x,y,z) un contact d'ordre n avec deux courbes gauches :

$$Y_1 = f_1(x) \,;\quad Z_1 = g_1(x),$$

et $Y_2 = f_2(x)$; $Z_2 = g_2(x)$, ces deux dernières ont elles-mêmes, au même point, un contact d'ordre n. On a en effet (n° 235) :

$$y = Y_1 \,;\quad y' = Y_1' \,; \cdots\cdots y^n = Y_1^n$$
$$z = Z_1 \,; \cdots\cdots\cdots\cdots z^n = Z_1^n$$

et

$$y = Y_2 \,; \cdots\cdots\cdots\cdots y^n = Y_2^n$$
$$z = Z_2 \,; \cdots\cdots\cdots\cdots z^n = Z_2^n$$

d'où l'on conclut

$$Y_1 = Y_2 \,;\quad Y_1' = Y_2' \,; \cdots\cdots Y_1^n = Y_2^n$$
$$Z_1 = Z_2 \,; \cdots\cdots\cdots\cdots Z_1^n = Z_2^n \,;$$

ce qui exprime qu'il y a contact d'ordre n entre les deux dernières courbes (n° 235).

Expression de divers infiniment petits relatifs à une courbe gauche.

267. - Nous désignerons par :

p un point t (x,y,z) de la courbe gauche ;
T la tangente } en ce point
P le plan osculateur } en ce point
p_1 le point infiniment voisin de la courbe, correspondant à $t+dt$ $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$
T_1 la tangente } en ce point.
P_1 le plan osculateur } en ce point.

La distance $pp_1 = \sqrt{\overline{\Delta x}^2 + \overline{\Delta y}^2 + \overline{\Delta z}^2}$ a pour valeur principale

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt = ds \ldots\ldots \text{(élément d'arc)}$$

268. – Angle de T et de T_1. – On sait que l'angle φ de deux directions (a, b, c) et (a_1, b_1, c_1) est donné par :

$$\sin^2\varphi = \frac{(bc_1 - cb_1)^2 + (ca_1 - ac_1)^2 + (ab_1 - ba_1)^2}{(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)}$$

Or pour la tangente T, a, b, c sont x', y', z' ; pour la tangente T_1, a_1, b_1, c_1 sont $x' + \Delta x'$, $y' + \Delta y'$, $z' + \Delta z'$; on a ainsi :

$$\sin^2\varphi = \frac{(y'\Delta z' - z'\Delta y')^2 + (z'\Delta x' - x'\Delta z')^2 + (x'\Delta y' - y'\Delta x')^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)\left[(x'+\Delta x')^2 + (y'+\Delta y')^2 + (z'+\Delta z')^2\right]}$$

Or les valeurs principales de $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$ sont $x''dt$, $y''dt$, $z''dt$; d'ailleurs, au dénominateur (qui est fini) on pourra négliger $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$; la valeur principale de $\sin^2\varphi$, ou de φ^2, est donc :

$$\varphi^2 = \frac{(y'z'' - z'y'')^2 + \ldots\ldots}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}\, dt^2 = \frac{A^2+B^2+C^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}\, dt^2$$

et enfin :

$$\varphi = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{(x'^2+y'^2+z'^2)}\, dt$$

269. – Courbure. – C'est, par définition, la limite du rapport de l'angle φ, de deux tangentes voisines, à l'arc compris entre leurs points de contact, c. à. d. $\frac{\varphi}{ds}$. On a donc, pour la courbure, K :

$$K = \frac{\varphi}{ds} = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R}$$

R étant le rayon du cercle osculateur. Le cercle osculateur, son centre et son rayon se nomment, à cause de cela, cercle, centre et rayon de courbure.

270. – Angle de P et de P_1. – Les coefficients des plans P et P_1 sont respectivement A, B, C et $A+\Delta A$, $B+\Delta B$, $C+\Delta C$; l'angle, ψ, de ces plans est donc donné par la formule :

$$\sin^2\psi = \frac{(B\,\Delta C - C\,\Delta B)^2 + (C\,\Delta A - A\,\Delta C)^2 + (A\,\Delta B - B\,\Delta A)^2}{(A^2+B^2+C^2)\left[(A+\Delta A)^2 + \ldots\ldots\right]}$$

Or les valeurs principales de ΔA, ΔB, ΔC sont

$$A'\,dt = (y'z''' - z'y''')\,dt$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et on trouve aisément :

valeur principale de $B\,\Delta C - C\,\Delta B = Dx'\,dt$

id $C\,\Delta A - A\,\Delta C = Dy'\,dt$

id $A\,\Delta B - B\,\Delta A = Dz'\,dt$,

D étant le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

Il vient alors, pour valeur principale de $\sin^2\psi$, ou ψ^2 :

$$\psi^2 = \frac{D^2(x'^2+y'^2+z'^2)}{(A^2+B^2+C^2)^2}\,dt^2$$

d'où

$$\psi = \frac{D}{A^2+B^2+C^2}\,ds\ .$$

271. – Torsion. – Le rapport $\frac{\psi}{ds}$ se nomme la torsion de la courbe gauche au point t ; on la désigne par τ.

$$\tau = \frac{D}{A^2+B^2+C^2}$$

Remarque. – Pour une courbe plane, le plan osculateur coïncide toujours avec celui de la courbe, donc $\psi = 0$ et par suite la <u>torsion</u>

est nulle.

Réciproquement, si la torsion est nulle, c. à. d. si $D=0$, la courbe est plane. Car, en prenant x pour variable indépendante, c. à. d en faisant $x'=1$, $x''=x'''=0$, la condition $D=0$ se réduit à $y''z'''-z'''y''=0$, d'où l'on déduit comme dans la note du N° 264 que la courbe est plane.

272. – Distance de p_1 à T.

On la trouve géométriquement, par le raisonnement fait pour les courbes planes, qui s'applique sans modification.

On trouve ainsi :

$$\delta = \frac{ds^2}{2R} = \frac{1}{2} K\, ds^2$$

L'analyse conduirait, par une voie plus longue, au même résultat.

273. – Distance de p_1 à P. – Elle est donnée par la formule :

$$d = \frac{A(x+\Delta x)+B(y+\Delta y)+C(z+\Delta z)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Remplaçons Δx, Δy, Δz par leurs valeurs

$$\Delta x = x'dt + \frac{1}{2}x''dt^2 + \frac{1}{6}x'''dt^3 + \dots \text{ etc.} \dots$$

nous voyons qu'au numérateur les termes en dt et dt^2 disparaissent à cause des relations $Ax'+By'+Cz' = Ax''+By''+Cz''=0$, il reste, pour la valeur principale de d :

$$d = \frac{Ax'''+By'''+Cz'''}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\frac{dt^3}{6} = \frac{D}{6}\ \frac{dt^3}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = K\tau\ \frac{ds^3}{6}$$

Elle est du troisième ordre en ds, puisque le contact de P et de la courbe est du second ordre.

274. – Différence entre un arc infiniment petit et sa corde. – Supposons que les coordonnées x, y, z d'un point d'une courbe soient exprimées en fonction de l'arc, s, compté à partir d'un point fixe.

On a

$$s=t\ ; \quad ds=dt$$

et la relation :

$$ds = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$$

donne l'identité :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ d'où en dérivant :}$$

(A) $$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0$$

$$x'x''' + y'y''' + z'z''' + x''^2 + y''^2 + z''^2 = 0$$

On aura alors, pour la courbure :

$$K = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{(y'z'' - z'y'')^2 + \ldots\ldots}$$

$$= \sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2}$$

c. à. d. (B)

$$K = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

Cela posé, il s'agit d'évaluer la différence entre l'arc ds et la corde qui joint les points x, y, z et $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$; c. à. d. la différence :

$$ds - \sqrt{\overline{\Delta x}^2 + \overline{\Delta y}^2 + \overline{\Delta z}^2}$$

Or on a :

$$\Delta x = x'\,ds + x''\frac{ds^2}{2} + x'''\frac{ds^3}{6} + \ldots\ldots$$

$$\Delta y = y'\,ds + \ldots\ldots$$

$$\Delta z = z'\,ds + \ldots\ldots$$

d'où

$$\overline{\Delta x}^2 + \overline{\Delta y}^2 + \overline{\Delta z}^2 = ds^2(x'^2 + y'^2 + z'^2) + ds^3(x'x'' + y'y'' + z'z'')$$
$$+ ds^4\left[\frac{1}{4}(x''^2 + y''^2 + z''^2) + \frac{1}{3}(x'x''' + y'y''' + z'z''')\right] + \ldots\ldots$$

et, en tenant compte de (A) et (B) :

$$\overline{\Delta x}^2 + \overline{\Delta y}^2 + \overline{\Delta z}^2 = ds^2\left[1 - \frac{1}{12}K^2 ds^2 + \ldots\ldots\right]$$

La différence à évaluer est donc :

$$ds - ds\sqrt{1 - \frac{1}{12}K^2 ds^2 + \ldots\ldots} = ds\left[1 - \left(1 - \frac{1}{12}K^2 ds^2 + \ldots\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

et par la formule du binôme :

$$= ds\left[1 - 1 + \frac{1}{24}K^2 ds^2 + \ldots\ldots\right]$$

La valeur principale de la différence entre l'arc et la corde est donc

$$\frac{1}{24} K^2 ds^3$$

elle est du troisième ordre par rapport à l'arc.

275. – Nous avons supposé jusqu'ici que x, y et z, sur la courbe gauche, sont exprimés en fonction d'un paramètre t : si la courbe est donnée sous la forme :

$$f(x, y, z) = 0 ; \qquad g(x, y, z) = 0,$$

on supposera $t = x$; d'où $x' = 1$, $x'' = 0$. Quant à y', z', y'' et z'', ce seront les dérivées première et seconde de y et z par rapport à x ; on les calculera en dérivant les équations de la courbe par rapport à x. Ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} f'_x + y' f'_y + z' f'_z = 0 \\ g'_x + y' g'_y + z' g'_z = 0 \end{array}\right\} \text{d'où } y' \text{ et } z' ;$$

dérivons encore une fois :

$$f''_{x^2} + 2y' f''_{xy} + 2z' f''_{xz} + y'^2 f''_{y^2} + 2y'z' f''_{yz} + z'^2 f''_{z^2} + y'' f'_y + z'' f'_z = 0$$

$$g''_{x^2} + 2y' g''_{xy} + \cdots\cdots\cdots = 0$$

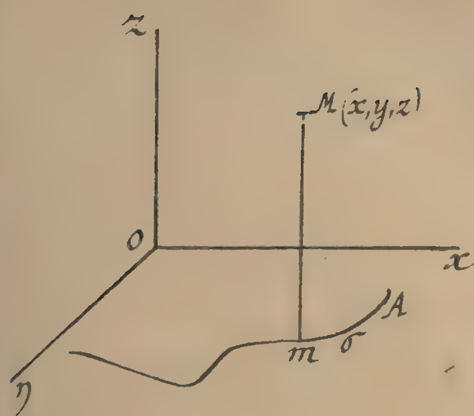
d'où on tirera y'' et z'', puisque y' et z' sont déjà connus.

Il suffira alors de porter ces valeurs de x', x'' ; y' y'' ; z', z'', dans les formules générales pour obtenir la tangente, le plan osculateur, la courbure, etc... – de la courbe gauche proposée.

276. – Exemples. – Appliquons les formules générales à quelques courbes.

1°. Hélice. – On nomme hélice la courbe, tracée sur un cylindre quelconque, et décrite par un point M qui se meut de manière que sa distance Mm, à une section droite, soit proportionnelle à l'arc de section droite, Am, comptée à partir d'une origine quelconque A.

Prenons pour plan des xy celui de la section droite ; soient x, y, z les coordonnées de M, et σ l'arc Am. On a, par hypothèse :



$$z = a\sigma$$

D'ailleurs x et y, coordonnées du point m de la section droite, sont des fonctions connues de l'arc σ, en sorte qu'on a, pour définir l'hélice :

$$x = \varphi(\sigma) ; \quad y = \psi(\sigma) ; \quad z = a\sigma$$

Observons de plus que σ étant l'arc de la courbe plane $x = \varphi(\sigma)$, $y = \psi(\sigma)$, on a :

$$d\sigma^2 = \left[\varphi'^2(\sigma) + \psi'^2(\sigma)\right] d\sigma^2, \quad \text{c. à. d.}$$

$$\varphi'^2(\sigma) + \psi'^2(\sigma) = 1 \text{ ; ce qu'on peut écrire } x'^2 + y'^2 = 1 .$$

Tangente. — Ses paramètres directeurs sont x', y' et a $[x' = \varphi'(\sigma) ; y' = \psi'(\sigma)]$ son angle, θ, avec Oz est défini par :

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} ;$$

il est donc constant, c. à. d que l'hélice coupe les génératrices du cylindre sous un angle constant.

Inversement une courbe tracée sur un cylindre et qui coupe les génératrices sous un angle constant est une hélice. En effet, toute courbe tracée sur le cylindre peut être définie par :

$$x = \varphi(\sigma) ; \quad y = \psi(\sigma) ; \quad z = \chi(\sigma),$$

σ étant toujours l'arc de section droite entre le point A et le point m, projection du point x, y, z : si elle coupe les génératrices sous un angle constant, θ_0, on a :

$$\cos\theta_0 = \frac{\chi'(\sigma)}{\sqrt{\varphi'^2(\sigma) + \psi'^2(\sigma) + \chi'^2(\sigma)}}$$

d'où, puisque $\varphi'^2 + \psi'^2 = 1$:

$$\chi'(\sigma) = \frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0} ; \text{ et : } \chi(\sigma) = \frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}(\sigma + h)$$

h étant une constante arbitraire. La courbe est donc une hélice pour laquelle $a = \frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}$, l'arc de section droite étant comptée à partir d'un point fixe B, tel que arc $AB = h$..

Plan osculateur. – Calculons A, B, C :

$$A = y'z' - z'y'' = -ay''$$
$$B = z'x'' - x'z'' = ax''$$
$$C = x'y'' - y'x''$$

$x', x'', \dots$ désignant $\varphi'(\sigma), \varphi''(\sigma), \dots$ Le plan osculateur est donc :

$$-ay''(X-x) + ax''(Y-y) + (x'y''-y'x'')(Z-z) = 0.$$

Il est normal au cylindre au point M : car la normale en M au cylindre, parallèle à la normale en m à la section droite, a pour paramètres directeurs $y', -x', 0$; la condition de parallélisme de cette droite et du plan osculateur est :

$$-ay''y' - ax''x' = 0 \quad ; \quad \text{ou} \quad x'x'' + y'y'' = 0,$$

ce qui est vérifié, puisque $x'^2 + y'^2 = 1$, d'où $x'x'' + y'y'' = 0$.

Courbure. – On a

$$K = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Or

$$C^2 = (x'y''-y'x'')^2 = (x'^2+y'^2)(x''^2+y''^2) - (x'x''+y'y'')^2$$
$$= x''^2 + y''^2$$

et par suite :

$$A^2+B^2+C^2 = (x''^2+y''^2)(1+a^2)$$

Donc :

$$K = \sqrt{x''^2+y''^2}\,\frac{\sqrt{1+a^2}}{(1+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{x''^2+y''^2}}{1+a^2}.$$

D'ailleurs la courbure, K_1, de la section droite en m s'obtient en faisant dans cette formule $a = 0$; donc

$$K = \frac{K_1}{1+a^2},$$

d'où un théorème facile à énoncer.

Torsion. – On a :

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & a \\ x'' & y'' & 0 \\ x''' & y''' & 0 \end{vmatrix}}{A^2+B^2+C^2} = \frac{a}{1+a^2} \, \frac{x''y'''-x'''y''}{x''^2+y''^2}$$

on peut écrire, en vertu de $x'x''+y'y''=0$:

$$x''y'''-x'''y'' = \frac{x''}{y'}\left[x'x'''+y'y'''\right]$$

Or l'identité $x'x''+y'y''=0$ donne par dérivation :

$$x'x'''+y'y''' = -(x''^2+y''^2)$$

d'où :

$$\tau = \frac{-a}{1+a^2} \cdot \frac{x''}{y'}$$

Or : $\frac{-x''}{y'} = \frac{+y''}{x'} = \sqrt{x''^2+y''^2}$; et enfin :

$$\tau = \frac{a}{1+a^2}\sqrt{x''^2+y''^2} ;$$

c.à.d.

$$\tau = aK$$

La courbure et la torsion en un même point sont donc dans un rapport constant.

Arc. – La différentielle, ds, de l'arc d'hélice est donnée par la formule :

$$ds = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\, d\sigma = d\sigma\sqrt{1+a^2}.$$

d'où

$$s = \sqrt{1+\alpha^2}\,(\sigma - \sigma_0)$$

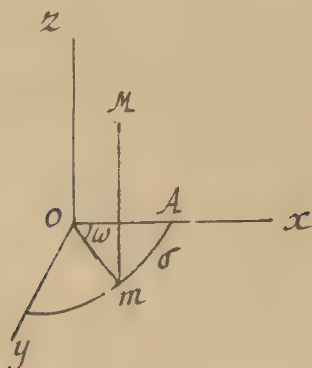
L'arc compris entre deux points de l'hélice est donc proportionnel à sa projection sur la section droite : ce fait était évident a priori, en raison de la propriété de la tangente.

2° Hélice circulaire. — C'est une hélice quelconque tracée sur un cylindre de révolution. La section droite est un cercle de rayon R, et on a, en supposant que le point A soit sur Ox :

$$x = R\cos\left(\frac{\sigma}{R}\right)\ ; \quad y = R\sin\left(\frac{\sigma}{R}\right)\ ; \quad z = \alpha\sigma\ ,$$

car

$$\text{angle } \omega = \frac{\sigma}{R}\,.$$



Pour l'hélice circulaire, la courbure et la torsion sont constantes, car K_1, courbure de la section droite, est la constante $\frac{1}{R}$. On peut écrire aussi, pour définir l'hélice :

$$x = R\cos\omega\ ; \quad y = R\sin\omega\ ; \quad z = m\omega,$$

ω étant le paramètre variable, au lieu de σ.

Chapitre IV

Chapitre IV.

Longueurs et aires sur les surfaces.

Plan tangent.

277. – Soit une surface représentée paramétriquement par les équations :

(1) $$x = x(u,v)\,; \quad y = y(u,v)\,; \quad z = z(u,v)\,;$$

le plan tangent au point (u,v) est celui qui a un contact du premier ordre avec la surface en ce point.

Si le plan est

$$AX + BY + CZ + D = 0,$$

les conditions du contact du premier ordre sont (N° 236) :

$$A x(u,v) + B y(u,v) + C z(u,v) + D = 0$$

(C) $$A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial y}{\partial u} + C\frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

$$A\frac{\partial x}{\partial v} + B\frac{\partial y}{\partial v} + C\frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

d'où l'on déduit les valeurs proportionnelles de A, B, C, D ; l'équation du plan tangent est évidemment :

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x & y & z & 1 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = 0 ; \text{ où } \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$$

Elle est la même, que les axes de coordonnées soient ou non rectangulaires. Nous l'écrirons souvent :

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0,$$

en posant

$$A = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} ; \quad B = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} ; \quad C = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

Si la surface est donnée sous la forme $z = f(x,y)$, on supposera $u = x$, $v = y$; d'où $A = \frac{\partial z}{\partial x} = p$; $B = q$; $C = -1$.

277bis. — Distance d'un point d'une surface au plan tangent en un point infiniment voisin. — Soient u, v et $u+du$, $v+dv$ les arguments de deux points voisins sur une surface, de coordonnées x, y, z et $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$; la distance du second au plan tangent en (u,v) est :

$$(\text{II}) \qquad \delta = \frac{A\,\Delta x + B\,\Delta y + C\,\Delta z}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Or

$$\Delta x = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}dv^2\right] + \cdots\cdots$$

$\Delta y = \ldots\ldots\ldots\ldots$ (N° 96)

$\Delta z = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Portons ces valeurs dans l'expression de δ : au numérateur, les termes en du et dv disparaissent, car leurs coefficients

$A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial y}{\partial u} + C\frac{\partial z}{\partial u}$, et $A\frac{\partial x}{\partial v} + \ldots\ldots$ sont nuls (équations (C)) ; il reste alors, en se bornant à la valeur principale :

$$\text{valeur principale de } \delta = \frac{1}{2}\,\frac{\left[A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+B\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+C\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right]du^2+2\left[A\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+\dots\right]du\,dv+\left[A\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\dots\right]dv^2}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

On voit que δ est du second ordre, ce qu'on savait a priori, puisque le plan tangent a un contact du premier ordre avec la surface.

Nous poserons pour abréger :

$$\left[A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+B\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+C\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right]\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = R$$

$$\left[A\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+B\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}+C\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\right]\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = S$$

$$\left[A\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+B\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+C\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right]\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = T$$

d'où [1] $2\delta = R\,du^2 + 2S\,du\,dv + T\,dv^2$

Dans certaines questions, on n'aura besoin que des <u>valeurs proportionnelles</u> de R, S, T :

$$\frac{A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+B\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+C\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}}{R} = \frac{A\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+\dots\dots}{S} = \frac{A\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\dots\dots}{T}$$

Il est à observer que si les axes de coordonnées sont obliques, δ est donnée par une formule analogue à (II), <u>où le numérateur reste le même</u>, le dénominateur seul ayant seul varié et restant indépendant de $\Delta x, \Delta y, \Delta z$; il en résulte immédiatement que la valeur principale de δ est toujours de la forme

$$Ru^2 + 2S\,du\,dv + T\,dv^2 ;$$

R, S, T n'ayant plus tout à fait, à cause du dénominateur, la même expression que ci-dessus, mais <u>leurs valeurs proportionnelles étant toujours</u> $A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\dots$; $A\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+\dots$; $A\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\dots$

---

[1] Si on choisit un signe pour le radical $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, δ est positif ou négatif, d'après la formule (II), selon que le point $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, ... est d'un côté ou de l'autre du plan tangent au point x, y, z. En réalité, δ est la <u>cote</u> du point $x+\Delta x$, ... par rapport à ce plan tangent.

Elément d'arc sur une surface.

278. — Une courbe tracée sur la surface (1) est définie par une relation entre u et v ; $v = \varphi(u)$. La direction de sa tangente au point u, v est déterminée par la valeur du rapport $\frac{dv}{du}$ $(= \varphi'(u))$ déduite de l'équation de la courbe. En effet, en différentiant la relation (1) on a :

$$(1\ bis) \qquad dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv ; \quad dy = \ldots\ldots\ldots ; \; dz = \ldots\ldots\ldots ;$$

ce qui donne les valeurs proportionnelles de dx, dy, dz, c.à.d. la direction de la tangente, quand on connaît le rapport $\frac{dv}{du}$.

On peut donc dire qu'en un point (u, v) une direction tangente à la surface est définie par le rapport $\frac{dv}{du}$, et réciproquement : cette direction est celle de la droite qui joint le point u, v au point $u + du$, $v + dv$.

En un même point, deux directions correspondant à des valeurs différentes de $\frac{dv}{du}$ sont différentes, et ne peuvent coïncider que si les valeurs de $\frac{dv}{du}$ coïncident :

Cela résulte de ce que, par les équations (1 bis), les rapports $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ sont des quotients de fonctions linéaires en $\frac{dv}{du}$.

279. — Le carré de la distance de deux points infiniment voisins de la surface, correspondant aux valeurs u, v et $u + du$, $v + dv$, est :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left[\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v}\right]^2 + \ldots\ldots$$

c.à.d.

$$(2) \qquad ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2,$$

étant posé :

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

Cette valeur de ds^2 est aussi la valeur principale du carré d'un arc

de courbe infiniment petit quelconque, tracé sur la surface, et allant du point u, v au point $u+du$, $v+dv$.

Longueur d'un arc tracé sur la surface. — Soit, sur la surface, la courbe

$$v=\varphi(u)\,;$$

son élément d'arc, ds sera:

$$ds=\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2},$$

où l'on remplace v par $\varphi(u)$ et dv par $\varphi'(u)\,du$. Il vient ainsi une expression de la forme

$$ds=F(u)\,du\,,$$

et pour l'arc s:

$$s=\int_{u_0}^{u}F(u)\,du\,.$$

280. — Si la surface est donnée sous la forme

$$z=f(x,y),$$

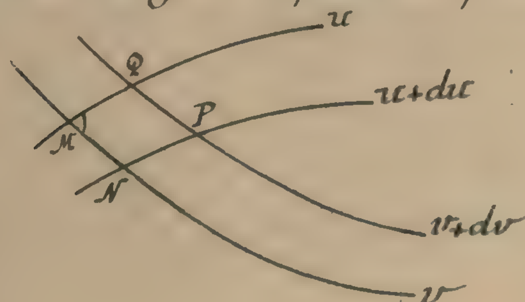
on n'aura qu'à supposer $u=x$, $v=y$; alors:

$$E=1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2; \qquad F=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\,; \qquad G=1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

et pour ds^2, en remplaçant $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ par p et q (notation connue):

$$ds^2=(1+p^2)\,dx^2+2pq\,dx\,dy+(1+q^2)\,dy^2\,.$$

281. — Remarques. — Les courbes tracées sur la surface (1) et qui sont définies par $u=$ const. ou $v=$ const. sont dites lignes coordonnées, par analogie avec les courbes $x=$ const et $y=$const. du plan. On désignera par courbe u_0 la courbe $u=u_0$; on dira également courbe u pour la courbe le long de laquelle le premier paramètre a la valeur constante u.



Ceci posé, considérons sur la surface les courbes u et v, qui se croisent en M; puis les courbes $u+du$ et $v+dv$, qui se croisent en P.
On a, d'après (2):

$$\overline{MN}^2=E(u,v)\,du^2$$

puisque $dv=0$ le long de la ligne MN.
De même :

$$\overline{QP}^2 = E(u, v+dv)\,du^2$$
$$= \left[E(u,v) + E'_v\,dv + \dots\right] du^2$$

d'où :

$$QP = \sqrt{E(u,v)}\,du \left[1 + \frac{E'_v}{E}\,dv + \dots\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{E(u,v)}\,du \left[1 + \frac{1}{2}\,\frac{E'_v}{E}\,dv + \dots\right]$$

ce qui montre que

$$QP = MN = \sqrt{E}\;du$$

en négligeant les infiniment petits du second ordre en du, dv. De même $MQ = NP$, c. à. d. que la figure $MNPQ$ peut être considérée comme un <u>parallélogramme</u> aux infiniment petits près du second ordre.

L'angle NMQ des deux courbes u et v, au point M, s'évalue aisément : si x, y, z et $x+dx, \dots$ sont les coordonnées de M et de Q, on a :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\,; \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial v}\,dv\,; \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial v}\,dv,$$

puisque $du=0$ sur la courbe u. Les paramètres directeurs de la tangente à la courbe u sont donc $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$; pour la courbe v, ce sont de même $\frac{\partial x}{\partial u}, \dots$; de sorte que :

$$(4) \qquad \cos(u,v) = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}\;\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \dots}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}\,.$$

en désignant par (u,v) l'angle des deux courbes u et v.

Telle est la relation qui donne l'angle des deux courbes coordonnées qui se croisent en un point quelconque u, v, de la surface : on voit que si toutes les courbes u croisent toutes les courbes v à angle droit, on aura $F=0$; et réciproquement, si $F=0$, les deux systèmes de lignes coordonnées sont orthogonaux.

282. – Exemples. – 1° Surfaces de révolution. – Une surface de révolution autour de Oz a pour équation $z = f(\sqrt{x^2+y^2})$; on peut donc la représenter paramétriquement par

$$x = r\cos\omega\,; \qquad y = r\sin\omega\,; \qquad z = f(r)\,;$$

r et ω sont les coordonnées polaires de la projection du point x, y, z

sur le plan des $x\,y$; la méridienne, dans le plan zox, est $z = f(x)$.

On a

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 + f'^2(r)\, dr^2$$

ou

$$ds^2 = dr^2 \left[1 + f'^2(r)\right] + r^2 d\omega^2 \ldots\ldots \text{c. à. d.} \quad \begin{cases} E = 1 + f'^2(r) \\ F = 0 \\ G = r^2 \end{cases}$$

Le terme en $dr\, d\omega$ manque : les courbes $r = \text{const}$ (parallèles) et les courbes $\omega = \text{const.}$ (méridiens) se coupent donc à angle droit.

2° Sphère. – En coordonnées polaires de l'espace (N° 221), une sphère de centre O est définie par $\rho = R$; c. à. d. qu'on a, sur la sphère :

$$x = R \sin\theta \cos\psi \; ; \quad y = R \sin\theta \sin\psi \; ; \quad z = R \cos\theta \; ;$$

d'où (N° 250)

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta\, d\psi^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{c. à. d. que} \quad \begin{cases} E = R^2 \\ F = 0 \\ G = R^2 \sin^2\theta \end{cases}$$

3° Héliçoïdes. – Un héliçoïde est la surface engendrée par une courbe du plan des zx, $z = f(x)$, qui tourne autour de Oz, en se déplaçant parallèlement à Oz d'une longueur proportionnelle à l'angle dont elle tourne. On peut donc représenter paramétriquement l'héliçoïde par les mêmes équations que la surface de révolution, en ajoutant seulement à z un terme $a\omega$, proportionnel à l'angle de rotation. Donc :

$$x = r \cos\omega \; ; \qquad y = r \sin\omega \; ; \qquad z = f(r) + a\omega$$

On en conclut

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 + \left[f'(r)\, dr + a\, d\omega\right]^2$$

$$= dr^2 \underbrace{\left[1 + f'^2\right]}_{E} + 2\, dr\, d\omega . \underbrace{a f'(r)}_{F} + d\omega^2 \underbrace{\left[a^2 + r^2\right]}_{G}$$

<u>L'héliçoïde réglé droit</u>, ou surface de vis à filet carré, s'obtient en prenant pour courbe génératrice dans le plan zox, une droite normale à Oz, $z = h$. On a donc :

$$x = r \cos\omega \; ; \qquad y = r \sin\omega \; ; \qquad z = h + a\omega \; ;$$

ou en transportant les axes parallèlement à eux mêmes au point $x = 0$, $y = 0$, $z = h$:

$$X = r\cos\omega;\qquad Y = r\sin\omega;\qquad Z = a\omega.$$

d'où :

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dr^2 + (r^2 + a^2)\,d\omega^2.$$

Le terme $dr\,d\omega$ manque ; donc les courbes $\omega = \text{const}$, qui sont les génératrices rectilignes, et les courbes $r = \text{const}$, qui sont des hélices circulaires, sont orthogonales.

Expression de l'élément d'aire.

283. – L'aire du parallélogramme $MNPQ$ (N° 281), compris entre les courbes u, $u + du$; v, $v + dv$, est égale à :

$$d\sigma = MN.\,MQ.\,\sin(u,v) = \sqrt{EG}\,du\,dv\,\sin(u,v)$$

Or on a trouvé :

$$\cos(u,v) = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

d'où :

$$\sin(u,v) = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}$$

et pour l'élément d'aire sur la surface :

$$(5)\qquad d\sigma = du\,dv\,\sqrt{EG - F^2}$$

L'aire d'une région finie de la surface est donc

$$\iint du\,dv\,\sqrt{EG - F^2},$$

le champ étant l'ensemble des valeurs de u, v qui correspondent aux points de la région.

Par exemple, l'aire comprise entre les quatre courbes $u = u_0$, $u = U_0$ et $v = v_0$, $v = V_0$, est

$$\int_{u_0}^{U_0} du \int_{v_0}^{V_0} dv\,\sqrt{EG - F^2}.$$

284. – La formule (5) peut se mettre sous une autre forme. En

effet, si A, B, C sont les coefficients du plan tangent (N° 277) :

$$A = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$$

. . . .

On a identiquement par la formule de Lagrange :

$$EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2 ;$$

d'où

$$d\sigma = du\,dv\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} .$$

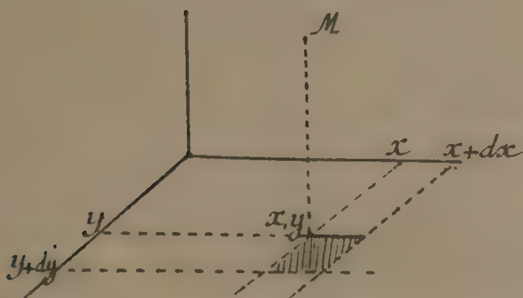
Si la surface est donnée sous la forme $z = f(x, y)$, on a :

$$A = q \; ; \quad B = q \; ; \quad C = -1 \; ;$$

d'où

(6) $$d\sigma = dx\,dy\sqrt{1 + p^2 + q^2} .$$

Cette formule peut s'établir directement. Soient en effet x, y, z les coordonnées d'un point M de la surface ; figurons, sur le plan des xy, les droites $X = x$, $X = x + dx$; $Y = y$, $Y = y + dy$: elles comprennent le petit rectangle ombré, d'aire $dx\,dy$.



Soit $d\sigma$ l'aire de la portion de surface, au voisinage de M, qui se projette à l'intérieur du rectangle : cette portion de surface peut être assimilée à une portion du plan tangent en M, de sorte qu'on a :

$$dx\,dy = d\sigma \cos \nu$$

ν étant l'angle du plan tangent en M avec le plan des xy. Comme $\cos \nu = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$, on a bien

$$d\sigma = dx\,dy\sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

d'où

$$\sigma = \iint_R dx\,dy\sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

R étant la région du plan des xy à l'intérieur de laquelle se projette

l'aire, σ, à évaluer sur la surface.

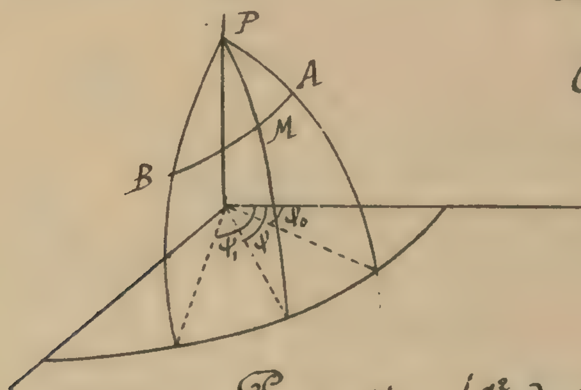
Applications.

285. — Considérons sur la sphère la courbe (loxodromie) définie par la relation :

$$tg\,\frac{\theta}{2} = \lambda e^{a\psi},$$

où λ et a sont des constantes.

Cherchons en premier lieu la longueur d'un arc quelconque AB de cette courbe. Soient θ_0 et ψ_0, θ_1 et ψ_1 les coordonnées de A et B sur la sphère.



On a :

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2)$$

Or sur la courbe proposée :

$$\frac{1}{2}\,\frac{d\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \lambda a e^{a\psi} d\psi = a\,tg\,\frac{\theta}{2}\,d\psi$$

d'où

$$d\psi = \frac{d\theta}{2a\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{d\theta}{a\sin\theta}$$

Par suite, ds^2 devient :

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 \left[1 + \frac{1}{a^2}\right]$$

$$s = R\,\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta = \frac{R}{a}\sqrt{a^2+1}\,(\theta_1 - \theta_0)$$

Or $R\theta_1$ est l'arc de méridien PB ; de même $R\theta_0$ est l'arc PA ; donc :

$$\text{arc } AB = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\left[\text{arc } PB - \text{arc } PA\right]$$

Cherchons en second lieu, la valeur de l'aire sphérique PBA, comprise entre l'arc AB et les deux méridiens ψ_0 et ψ_1. On a, pour l'élément d'aire sur la sphère

$$d\sigma = d\theta . d\psi \sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi \ldots\ldots (\text{N}^\circ 282,\ 2^\circ)$$

Donc :

$$\sigma = R^2 \iint \sin\theta\, d\theta\, d\psi = R^2 \int d\psi \int \sin\theta\, d\theta .$$

Les limites de l'intégrale en θ sont les valeurs de θ qui correspondent, sur le contour du champ, à la valeur ψ de l'autre coordonnée, c. à d. les θ des points M et P où le méridien ψ coupe ce contour. La limite inférieure est donc 0 (point P); la limite supérieure (point M) est la valeur, θ', que fournit, en fonction de ψ', l'équation de la courbe, c. à d.

$$\operatorname{tg}\frac{\theta'}{2} = \lambda e^{a\psi}$$

$$\theta' = 2 \operatorname{arc\,tg} \lambda e^{a\psi}$$

Ainsi :

$$\sigma = R^2 \int_{\psi_0}^{\psi_1} d\psi \int_0^{\theta'} \sin\theta \, d\theta = R^2 \int_{\psi_0}^{\psi_1} d\psi \left[1 - \cos\theta'\right]$$

c'est-à-dire :

$$\sigma = R^2 \int_{\psi_0'}^{\psi_1} d\psi \left[1 - \frac{1-\lambda^2 e^{2a\psi}}{1+\lambda^2 e^{2a\psi'}}\right] = \frac{R^2}{a} \int_{\psi_0} \frac{2a\lambda^2 e^{2a\psi}}{1+\lambda^2 e^{2a\psi}} \, d\psi ;$$

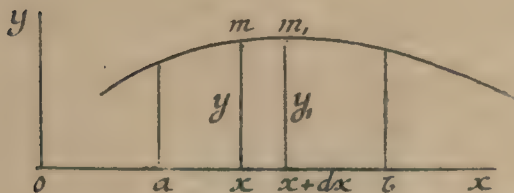
et finalement, puisque sous le signe $\int$, le numérateur est la dérivée du dénominateur :

$$\sigma = \frac{R^2}{a} \log \frac{1+\lambda^2 e^{2a\psi_1}}{1+\lambda^2 e^{2a\psi_0}} = \frac{R^2}{a} \log \frac{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\theta_1}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\theta_0}{2}} = 2\frac{R^2}{a} \log \frac{\cos\frac{\theta_0}{2}}{\cos\frac{\theta_1}{2}} .$$

286. — Dans certains cas particuliers, on peut décomposer l'aire cherchée en éléments infiniment petits, en nombre simplement infini, et pour chacun desquels l'aire (ou plutôt sa valeur principale) est connue : l'aire totale s'évalue alors par une intégrale simple : Voici des exemples.

1° Surfaces de révolution. — Soit une courbe

$$y = f(x)$$



qui engendre, en tournant autour de Ox, une surface de révolution : on demande l'aire comprise sur cette surface entre deux plans $x = a$, $x = b$, perpendiculaires à l'axe.

On remarque à cet effet que l'aire décrite par l'élément mm_1, compris entre les abcisses x et $x+dx$, est assimilable à celle d'un tronc de cône, et a pour expression :

$$2\pi . mm_1 \times \frac{y+y_1}{2} = \pi\, dx \sqrt{1+f'^2(x)} \left[f(x)+f(x+dx) \right] ;$$

la valeur principale est

$$d\sigma = 2\pi f(x) \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx ;$$

l'aire cherchée est donc

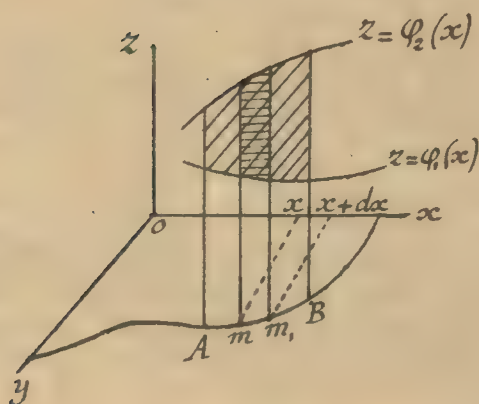
$$\sigma = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx .$$

Par exemple, pour le paraboloïde de révolution, la méridienne est $y^2 = 2px$; donc $f(x) = \sqrt{2px}$, $f'(x) = \sqrt{2p}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}$, et :

$$\sigma = 2\pi \int_a^b \sqrt{2px}\sqrt{1+\frac{p}{2x}}\, dx = 2\pi \int_a^b \sqrt{p(2x+p)}\, dx = \left\{ \frac{2\pi}{3}\sqrt{p}\left[2x+p\right]^{\frac{3}{2}} \right\}_a^b .$$

2° Cylindres. – Soit le cylindre

$$y = f(x),$$



de génératrices parallèles à Oz : On demande l'aire (ombrée) comprise entre deux génératrices A et B, et deux courbes, définies respectivement par l'équation du cylindre et les équations

$$z = \varphi_1(x), \quad z = \varphi_2(x)$$

L'aire (doublement ombrée) comprise entre les deux courbes et les deux génératrices m et m_1, d'abcisses x et $x+dx$, a évidemment pour valeur principale :

$$m\, m_1 \times \left[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\right] = dx \sqrt{1+f'^2(x)} \left[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\right] ;$$

d'où pour l'aire cherchée :

$$\sigma = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)} \left[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\right] dx .$$

Une méthode analogue s'applique aux cônes.

Chapitre V.

Courbure des surfaces.

I. – Courbure des lignes tracées sur une surface.

287. – Indicatrice. – Soit la surface

$$z = f(x, y),$$

que nous supposerons passer par l'origine. Prenons pour plan des xy le plan tangent en ce point ; la cote, z, développée par la formule de Maclaurin aura une expression de la forme :

$$z = \frac{1}{2}\left(M_1 x^2 + 2P_1 xy + N_1 y^2\right) + \cdots\cdots$$

les termes non écrits étant d'ordre > 2 en x, y. Les termes du premier degré doivent manquer au second membre, puisque le plan tangent à l'origine est $z = 0$.

En disposant convenablement de la direction des axes des x et des y, (supposés rectangulaires) on peut, <u>sans introduire d'imaginaires</u>, faire disparaître le terme en xy, et il reste

(1) $$z = \frac{1}{2}\left(Mx^2 + Ny^2\right) + \cdots\cdots$$

Si on coupe la surface par un plan, $z = h$, voisin du plan des xy, la section, <u>pour des valeurs très petites de x et y</u>, sera sensiblement représentée par l'équation

(2) $$h = \frac{1}{2}\left(Mx^2 + Ny^2\right)$$

elle sera donc semblable à la conique du plan des xy, dont les axes sont Ox et Oy :

$$1 = \left(Mx^2 + Ny^2\right),$$

conique qu'on désigne par le nom d'indicatrice.

Si M et N sont de même signe, l'indicatrice est elliptique; alors les courbes (2) sont réelles lorsque h est du signe de M et de N, imaginaires dans le cas contraire: en d'autres termes, les plans parallèles au plan tangent coupent la surface, au voisinage du point de contact, en des points réels ou non, selon qu'ils sont situés de l'un ou de l'autre côté du plan tangent.

Si M et N sont de signes contraires, l'indicatrice est hyperbolique; les courbes (2) sont toujours réelles, c.à.d. que les plans parallèles au plan tangent coupent toujours la surface en des points réels, au voisinage du point de contact.

En d'autres termes, quand l'indicatrice est elliptique, la surface, au voisinage du point de contact, est située d'un même côté de son plan tangent (exemple: ellipsoïde); quand l'indicatrice est hyperbolique, la surface traverse son plan tangent (exemple: hyperboloïde à une nappe).

Enfin si M ou $N = 0$, l'indicatrice est dite parabolique, et le point O est dit point parabolique.

Etudions maintenant la courbure, au point O, des diverses lignes qu'on peut tracer sur la surface à partir de ce point; les trois théorèmes suivants donnent la solution complète de la question.

288. – Théorème I. – Soit λ une ligne quelconque tracée sur la surface et passant par O: son plan osculateur en O coupe la surface suivant une courbe plane, ϖ, qui a, au point O, même rayon de courbure que la ligne proposée.

Car soient, sur λ, deux points quelconques, O_1 et O_2, infiniment voisins de O: le plan OO_1O_2 rencontre la surface suivant une courbe, ϖ', qui coupe λ aux trois points O, O_1, O_2. Donc, à la limite, lorsque O_1 et O_2 se confondent avec O, le plan osculateur en O à la ligne λ, (qui est la limite du plan OO_1O_2) rencontre la surface suivant une courbe, ϖ, qui a avec λ trois points d'intersection confondus en O. Les courbes λ et ϖ ont donc en O un contact du second ordre (N° 238), et par suite (N° 266, Rem. II) elles ont même rayon de courbure en ce point. C.q.f.d.

Le théorème I ramène la question à l'étude de la courbure, au point O, des sections planes menées par ce point.

289. – A cet effet, considérons les sphères qui touchent la surface[1] au point O : elles sont en nombre simplement infini, et ont pour équation générale :

$$x^2+y^2+z^2-2\rho z=0\,; \tag{3}$$

ρ est le rayon de la sphère, affecté d'un signe ; c'est en effet la cote du centre de la sphère, quantité positive si le centre est au dessus du plan des xy, négative s'il est au-dessous.

Chacune des sphères (3) coupe la surface suivant une courbe qui a un point double en O et dont la projection sur le plan des xy, obtenue en éliminant z entre (1) et (3), est :

$$0 = x^2+y^2-\rho\left(Mx^2+Ny^2+\cdots\right)+\frac{1}{4}\left(Mx^2+Ny^2+\cdots\right)^2$$

Les deux tangentes à l'origine, qui sont aussi les deux tangentes au point O de la courbe de l'espace, ont pour équation :

$$x^2\left(1-M\rho\right)+y^2\left(1-N\rho\right)=0\,. \tag{4}$$

elles ne sont réelles que si $1-M\rho$ et $1-N\rho$ sont de signes contraires ; mais inversement si l'on se donne une de ces tangentes, il y a toujours une et une seule sphère réelle correspondante ; car l'équation (4) fournit pour ρ une valeur réelle quand on se fixe arbitrairement la direction réelle, $\frac{y}{x}$, de la tangente.

Cela posé je dis que :

Lemme. – Tout plan mené par une des deux droites qui touchent en O la ligne λ d'intersection de la surface avec une sphère tangente, S, coupe la surface et la sphère suivant deux courbes qui ont même courbure au point O.[2]

Soit en effet O_1 un point infiniment voisin de O, sur une des branches de la ligne λ : un plan quelconque P' mené par O et O_1 rencontre

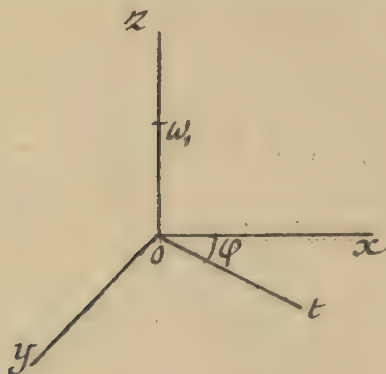
---

[1] Il n'y a pas, en général, de sphère ayant avec la surface, au point O, un contact du second ordre : car les conditions d'un tel contact sont (N°. 236) au nombre de $\frac{3.4}{2}=6$, tandis qu'une sphère ne dépend que de 4 paramètres.

[2] Ce théorème est général : Si deux surfaces ont en O un contact d'ordre n, leur ligne d'intersection a, en ce point, un point multiple d'ordre $n+1$; tout plan mené par une des $(n+1)$ tangentes correspondantes coupe les deux surfaces suivant deux courbes qui ont entre elles, en O, un contact d'ordre $n+1$.

respectivement la surface et la sphère S suivant une courbe, ϖ, et suivant un cercle, γ', qui se touchent en 0 et se coupent en 0_1. A la limite, quand 0_1 se confond avec 0, le plan P' devient un plan quelconque P, mené par la tangente en 0 à une des branches de la ligne λ ; il coupe la surface et la sphère suivant une courbe, ϖ, et suivant un cercle, γ, qui ont trois points d'intersection confondus en 0. En d'autres termes, γ est le cercle de courbure de la courbe ϖ, au point 0. C. q. f. d.

290. – Cela posé, soit, dans le plan des xy, une droite, $0t$, faisant avec $0x$ l'angle φ ; la sphère, S_1, qui touche la surface proposée en 0, et qui la coupe suivant une ligne λ admettant $0t$ pour une de ses tangentes au point 0, a un rayon, ρ, donné par l'équation (4), où on fait $\frac{y}{x} = tg\,\varphi$:



$$(5) \qquad \rho = \frac{1}{M\cos^2\varphi + N\sin^2\varphi}$$

En vertu du Lemme, le cercle de courbure en 0 d'une section quelconque, menée par $0t$, est le cercle commun à la sphère S_1 et au plan de la section : son centre est donc la projection, sur ce plan du centre ω_1 de la sphère, lequel (toujours d'après le Lemme) est le centre de courbure de la section normale $z0t$. Donc :

Théorème II (Meusnier). – Le centre de courbure, au point 0, d'une section plane quelconque passant par 0, est la projection du centre de courbure de la section normale, menée par la même tangente.

Enfin, le rayon de courbure de la section normale $z0t$ est égal à $0\omega_1$, ou ρ, rayon de la sphère S_1, c. à. d., d'après (5) :

$$\rho = \frac{1}{M\cos^2\varphi + N\sin^2\varphi}$$

Or le carré du demi diamètre, dirigé suivant $0t$, de l'indicatrice $Mx^2 + Ny^2 = 1$ est précisément $1 : (M\cos^2\varphi + N\sin^2\varphi)$; donc :

Théorème III. (Euler). – Le rayon de courbure, en 0, d'une section normale est égal au carré du demi-diamètre de l'indicatrice dirigé

suivant la trace de la section sur le plan tangent en 0.

291. – Rayons de courbure principaux. – En vertu de ce dernier théorème, le rayon de courbure d'une section normale est maximum ou minimum quand la trace de la section est un des axes de l'indicatrice, c. à. d. quand $\varphi = 0$ ou $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Les deux valeurs correspondantes du rayon de courbure, à savoir

$\rho_1 = \frac{1}{M}$; $\rho_2 = \frac{1}{N}$ se nomment rayons de courbure principaux de la surface au point 0.[1] Ils sont de même signe ou de signes contraires selon que l'indicatrice est elliptique ou hyperbolique.

Si l'indicatrice est parabolique, (c. à. d. en un point parabolique) M ou N est nul ; un des rayons de courbure principaux est donc infini, et réciproquement.

Les deux sphères tangentes à la surface en 0 et dont les rayons sont ρ_1 et ρ_2 jouissent d'une propriété importante : chacune d'elles coupe la surface suivant une ligne dont les deux tangentes au point double, 0, sont confondues. Car pour $\rho = \frac{1}{M}$ ou $\frac{1}{N}$, l'équation (4) de ces deux tangentes :

$$(4) \qquad x^2(1 - M\rho) + y^2(1 - N\rho) = 0$$

se réduit à un carré, y^2 ou x^2. Ce sont évidemment les seules valeurs de ρ jouissant de cette propriété.

De plus, il importe de remarquer que, pour la sphère de rayon ρ_1, les deux tangentes confondues coïncident avec l'axe $y = 0$ de l'indicatrice ; pour la sphère de rayon ρ_2, elles coïncident avec l'autre axe.

Définitions. – On nomme :

Directions principales au point 0 celles (toujours réelles) des axes de l'indicatrice.

Directions asymptotiques celles des asymptotes (réelles ou imaginaires) de l'indicatrice. Leur équation est $Mx^2 + Ny^2 = 0$ dans le plan des xy ; elles sont également inclinées sur les directions principales.

[1] D'après cela, la formule d'Euler qui donne le rayon de courbure ρ d'une section normale s'écrit : $\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\varphi}{\rho_1} - \frac{\sin^2\varphi}{\rho_2}$.

On peut dire aussi que ce sont les directions des deux tangentes menées en O à la section de la surface par son plan tangent $(0 = \frac{1}{2}(Mx^2 + Ny^2 + \dots))$

Plans principaux les deux plans normaux à la surface menée par les axes de l'indicatrice.

Remarque. — On démontrerait aisément la proposition suivante, connue par le Cours de Géométrie, et dont il ne sera fait usage ici qu'incidemment :

Pour que la normale à la surface en un point O_1, infiniment voisin de O, rencontre la normale en O, il faut et il suffit que la direction OO_1 ait pour limite une direction principale en O.

De plus :

Si P_1 est le point limite où la normale en O_1 rencontre la normale en O, la longueur OP_1 est celle d'un des rayons de courbure principaux de la surface au point O.

II. — Recherche des directions et des courbures principales.

---

292. — Comment déterminer directement, sans changement de plans de coordonnées, les directions et les courbures principales d'une surface en un point ?

Supposons la surface représentée paramétriquement par les équations :

(1) $$x = x(u,v) \quad ; \quad y = y(u,v) \quad ; \quad z = z(u,v)$$

et soient u, v les paramètres d'un point donné, M, de coordonnées x, y, z : une sphère de rayon ρ,[1] tangente en M à la surface, coupe celle-ci suivant une ligne qui a deux tangentes au point M ; nous formerons l'équation en $\frac{dv}{du}$ qui donne les directions de ces tangentes (N° 278) et en écrivant qu'elle a ses deux racines égales, nous obtiendrons une équation en ρ, qui

[1] ainsi qu'on l'a dit au N° 289, ρ est une quantité susceptible de signe : c'est la cote du centre de la sphère par rapport au plan tangent en M ; elle change de signe quand ce centre passe d'un côté à l'autre du plan tangent.

fournira les rayons de courbure principaux (N° 291). Quant aux directions principales, elles correspondront aux racines égales de l'équation en $\frac{dv}{du}$ (N° 291).

Soit donc M' un point $(u+du,\ v+dv)$ voisin de M, sur une des deux branches de la courbe commune à la surface et à la sphère considérée : en écrivant que ce point est sur la sphère, nous obtiendrons une relation entre du et dv, que nous donnera les valeurs de $\frac{dv}{du}$ correspondant aux directions des tangentes aux deux branches, c. à. d. l'équation que nous cherchons.

Pour écrire que M' est sur la sphère, exprimons que sa puissance par rapport à la sphère est nulle.

Si δ est la cote du point M' par rapport au plan tangent à la sphère (et à la surface) en M, et ρ est le rayon de la sphère, ou mieux la cote du centre par rapport à ce même plan, la puissance de M' est égale à [1]

$$\overline{MM'}^2 - 2\rho.\delta\ ;$$

on aura donc

(7) $$\text{valeur ppale de } \left[\overline{MM'}^2 - 2\rho.\delta\right] = 0.$$

Or MM'^2 a pour valeur principale l'élément ds^2 de la surface :

(8) $$\overline{MM'}^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2\ ;$$

d'ailleurs on a trouvé (N° 277bis)

(9) $$\text{valeur principale de } 2\delta = R\,du^2 + 2S\,du\,dv + T\,dv^2\ ;$$

E, F, G, R, S, T étant des fonctions connues de u, v, dont les expressions ont été données aux N°s 279 et 277bis. On a donc, entre du et dv la relation :

(10) $$(E-\rho R)\,du^2 + 2(F-\rho S)\,du\,dv + (G-\rho T)\,dv^2 = 0.$$

Telle est l'équation qui donne les deux valeurs de $\frac{dv}{du}$, qui correspondent aux directions des deux tangentes menées au point u, v à la courbe, suivant laquelle la surface proposée (1) est coupée par une sphère de rayon ρ, la touchant en ce point. Elle conduit immédiatement à la solution du problème. [2]

---

[1] Car la puissance d'un point M' par rapport à la sphère
$$X^2+Y^2+Z^2-2\rho Z=0,$$
tangente à l'origine au plan des xy, est égale à $x^2+y^2+z^2-2\rho z$, c. à. d. à $\overline{M'O}^2 - 2\rho.\delta$, δ étant la cote du point M' par rapport au plan tangent en O.

[2] On voit que pour former l'équation (10), il suffira, quel que soit le système de coordonnées employées, quels que soient les angles des axes cartésiens, etc.... de connaître :

1° l'expression du ds^2 sur la surface proposée : $E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$;

2° l'expression de la valeur principale de la distance du point $u+du$, $v+dv$ au plan tangent en u, v : $\frac{1}{2}\left[R\,du^2+2S\,du\,dv+T\,dv^2\right]$; cette méthode ingénieuse est due à Moutard.

293. – Rayons de courbure principaux. – On les obtient en écrivant que l'équation (10) a ses racines égales en $\frac{du}{dv}$, ce qui donne :

(11) $$(F-\rho S)^2-(E-\rho R)(G-\rho T)=0 ;$$

d'où deux valeurs de ρ, qui sont celles de rayons de courbure principaux cherchés.

Directions principales. – Quand l'équation (10) a une racine double en $\frac{du}{dv}$, cette valeur de $\frac{du}{dv}$ correspond à une direction principale. Elle satisfait aux deux équations qu'on obtient en dérivant (10) par rapport à du et à dv, ce qui donne :

$$(E-\rho R)\,du+(F-\rho S)\,dv=0$$

$$(F-\rho S)\,du+(G-\rho T)\,dv=0 ;$$

et en éliminant ρ :

(12) $$\frac{E\,du+F\,dv}{F\,du+G\,dv}=\frac{R\,du+S\,dv}{S\,du+T\,dv} ; \text{ c. à. d : } \begin{vmatrix} E & F & G \\ R & S & T \\ dv^2 & -du\,dv & du^2 \end{vmatrix}=0$$

Telle est l'équation qui donne les deux valeurs de $\frac{du}{dv}$ qui correspondent aux directions principales ; on peut y remplacer R, S, T par leurs valeurs proportionnelles (N° 277[bis]). De même il suffirait de connaître les valeurs proportionnelles de E, F, G.

Directions asymptotiques. – Elles sont fournies par l'équation (10), dans laquelle on suppose que la sphère tangente en M se réduit au plan tangent (N° 291) c. à. d. où l'on fait ρ infini, (ou $\frac{1}{\rho}=0$) :

(13) $$R\,du^2+2S\,du\,dv+T\,dv^2=0$$

Ici encore on peut substituer à R, S, T leurs valeurs proportionnelles.

Points paraboliques. – Ce sont les points où un des rayons de courbure principaux est infini (car en ces points M ou $N=0$ (N° 287)) ; l'équation (11) en ρ aura donc une racine infinie, c. à. d. que :

(14) $$S^2-RT=0 .$$

C'est là une relation entre u et v, qui définit, sur la surface, une ligne, dite ligne parabolique, dont tous les points sont paraboliques.

Ombilics. — On nomme <u>ombilic</u> tout point où l'indicatrice est un cercle : les directions principales (axes de l'indicatrice) sont alors déterminées, c. à. d. que, dans l'équation (12), les coefficients de du^2, $du\,dv$, dv^2 sont nuls, ce qui donne :

$$\frac{E}{R} = \frac{F}{S} = \frac{G}{T}.$$

On a ainsi deux équations entre u et v, qui déterminent sur la surface, un nombre limité de points, lesquels sont les ombilics.

294. — Si la surface est donnée sous la forme $z = f(x,y)$, on peut supposer pour appliquer les formules ci-dessus, $u = x$; $v = y$; d'où

$$A = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{\partial z}{\partial x} = -p$$

$$B = \text{—————————} = -q$$

$$C = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 1$$

De même, on trouve :

$$\sqrt{1+p^2+q^2}\;R = A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r \qquad E = 1+p^2$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}\;S = A\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + B\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} + C\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = s \quad \text{et on a trouvé (N° 280)} \quad F = pq$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}\;T = \text{—————————} = t \qquad G = 1+q^2$$

L'équation (11) aux <u>rayons de courbure principaux</u>, devient ainsi :

$$(11\,bis)\qquad \left[pq - \frac{\rho s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right]^2 - \left[1+p^2 - \frac{\rho r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right]\left[1+q^2 - \frac{\rho t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right] = 0$$

L'équation (12), aux <u>directions principales</u>, devient :

$$(12\,bis)\qquad \begin{vmatrix} 1+p^2 & pq & 1+q^2 \\ r & s & t \\ dy^2 & -dx\,dy & dx^2 \end{vmatrix} = 0$$

L'équation (13) aux directions asymptotiques devient :

(13 bis) $$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0$$

Les points paraboliques sont donnés par :

(14 bis) $$s^2 - rt = 0\,;$$

et les ombilics par

(15 bis) $$\frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t}$$

III. – Lignes de courbure ; lignes asymptotiques.

295. – Lignes de courbure. – On nomme lignes de courbure sur une surface les lignes qui, en chacun de leurs points, sont tangentes à une des directions principales en ce point.

Les directions principales de la surface (1) au point u, v sont définies par l'équation (12), qui est de la forme :

(12) $$a\,du^2 + 2b\,du\,dv + c\,dv^2 = 0\,,$$

a, b, c étant des fonctions de u et de v : une ligne $v = \varphi(u)$, tracée sur la surface, sera donc une ligne de courbure si la valeur $\frac{dv}{du} = \varphi'(u)$, qui correspond à la direction de sa tangente (N° 278) vérifie l'équation (12), en tous les points de la ligne, c. à. d. si l'on a, quelque soit u :

$$a\left[u, \varphi(u)\right] + 2b\left[u, \varphi(u)\right]\varphi'(u) + c\left[u, \varphi(u)\right]\varphi'^2(u) = 0$$

Le problème est donc ramené à trouver une fonction $\varphi(u)$, vérifiant cette relation, qui est une équation différentielle du premier ordre (N° 43).

La recherche de la fonction $\varphi(u)$, c. à. d. des lignes de courbure, revient donc à l'intégration de l'équation différentielle (où nous récrivons v à la place de $\varphi(u)$:

$$a(u,v) + 2b(u,v)\frac{dv}{du} + c(u,v)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0\,,$$

c. à. d. d'après (12) :

$$\begin{vmatrix} E & F & G \\ R & S & T \\ \left(\frac{dv}{du}\right)^2 & -\frac{dv}{du} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

où E, F, G, R, S, T sont des fonctions données de u, v.

On établira, dans le cours de Seconde année, que la solution générale, v, d'une équation différentielle du premier ordre, renferme une constante arbitraire ; c. à. d. que :

$$v = \varphi(u, C).$$

La fonction v étant trouvée par un procédé d'intégration quelconque, les lignes de courbure s'obtiendront en remplaçant v par sa valeur en u, dans les équations qui définissent paramétriquement la surface (1); une quelconque de ces lignes sera donc donnée paramétriquement par :

$$x = x\left[u, \varphi(u, C)\right]; \quad y = \ldots\ldots\ldots ; \quad z = \ldots\ldots\ldots$$

En faisant varier C, on aura ainsi une infinité (simple) de lignes de courbure.

Comme il y a en chaque point deux directions principales, il est clair qu'il y aura deux lignes de courbure passant par tout point de la surface. En d'autres termes, les lignes de courbure forment deux séries ; les courbes d'une série coupent à angle droit toutes les courbes de l'autre, puisque les directions principales en un point sont rectangulaires.

296.- Lignes asymptotiques.- On nomme asymptotiques les lignes tracées sur une surface et qui touchent, en chacun de leurs points, une des directions asymptotiques en ce point. On les trouvera, en vertu du raisonnement fait pour les lignes de courbure, en intégrant l'équation différentielle :

$$R + 2S\frac{dv}{du} + T\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0 ;$$

ou R, S, T sont des fonctions données de u et v.

Il y a évidemment deux lignes asymptotiques passant par chaque point de la surface, c. à. d. que ces lignes forment deux séries.

Remarque. – D'après cela, on obtient l'équation différentielle des asymptotiques en annulant la quantité δ, valeur principale de la distance du point $(u+du, v+dv)$ de la surface au plan tangent en (u, v) : or nous avons vu (N° 277 bis) que δ garde, à un facteur près, la même forme quels que soient les angles des axes ; donc, en coordonnées cartésiennes, rectangulaires ou obliques, l'équation différentielle des lignes asymptotiques est toujours :

$$0 = du^2\left[A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right] + 2\,du\,dv\left[A\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \ldots\right] + dv^2\left[A\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \ldots\right]$$

Exemples.

298. – 1° Héliçoïdes. – Un héliçoïde d'axe Oz est défini paramétriquement (N° 282) par

(16) $\qquad x = r\cos\omega\,; \qquad y = r\sin\omega\,; \qquad z = f(r) + a\omega$

r et ω étant les paramètres désignés plus haut par u et v. On en conclut

$$A = \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \omega} - \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \omega} = -\,r f'(r)\cos\omega + a\sin\omega$$

$$B = \ldots\ldots\ldots\ldots = -\,r f'(r)\sin\omega - a\cos\omega$$

$$C = \ldots\ldots\ldots\ldots = r$$

D'ailleurs on a (N° 282) : $E = 1 + f'^2(r)$; $F = af'(r)$; $G = r^2 + a^2$. De plus :

$$R\sqrt{A^2+B^2+C^2} = A\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = r f''(r)$$

$$S\sqrt{A^2+B^2+C^2} = A\frac{\partial^2 x}{\partial r\,\partial\omega} + \ldots\ldots\ldots\ldots = -a$$

$$T\sqrt{A^2+B^2+C^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots = r^2 f'(r)$$

On a donc pour équation différentielle des lignes asymptotiques :

(17) $\qquad r f''(r)\,dr^2 - 2a\,dr\,d\omega + r^2 f'(r)\,d\omega^2 = 0\,;$

d'où on tire

$$\frac{dr}{d\omega} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - r^3 f'(r) f''(r)}}{r f''(r)}.$$

On peut réunir dans un membre les termes en r, dans l'autre membre, les termes en ω, en écrivant (<u>séparation des variables</u>):

$$dr\left[\frac{rf''(r)}{a\pm\sqrt{a^2-r^3f'(r)f''(r)}}\right]=d\omega$$

d'où en intégrant les deux membres :

$$\int\frac{rf''(r)\,dr}{a\pm\sqrt{a^3-r^3f'(r)f''(r)}}=\omega+\text{const.}$$

On trouvera donc l'équation des asymptotiques en effectuant une quadrature; le signe $\pm$ donnera les deux séries de ces lignes. Par exemple, pour <u>l'héliçoïde réglé droit</u>, $f(r)=0$ (N° 282); donc les asymptotiques sont données par l'équation (17), où $f=f'=f''=0$. Il reste :

$$dr\,d\omega=0\,;$$

d'où les 2 solutions

$r=$ const; ce qui donne des hélices circulaires ;
$\omega=$ const; ce qui donne les génératrices rectilignes. } (N° 282).

Les <u>lignes de courbure</u> de l'héliçoïde général (16) sont données par l'équation

$$\begin{vmatrix} 1+f'^2(r) & af'(r) & r^2+a^2 \\ rf''(r) & -a & r^2f(r) \\ d\omega^2 & -dr\,d\omega & dr^2 \end{vmatrix}=0$$

Elle est de la forme :

$$M\,dr^2+2N\,dr\,d\omega+P\,d\omega^2=0\,,$$

M, N, P étant fonctions de r <u>seul</u>. On en tirera donc pour $\frac{dr}{d\omega}$ deux valeurs, $\frac{dr}{d\omega}=\varphi_1(r)$; $\frac{dr}{d\omega}=\varphi_2(r)$; d'où les 2 solutions :

$$\frac{dr}{\varphi_1(r)}=d\omega\quad;\qquad\frac{dr}{\varphi_2(r)}=d\omega$$

et les lignes de courbure des 2 séries seront données par les équations :

$$\int\frac{dr}{\varphi_1(r)}=\omega+\text{const}\;;\qquad\int\frac{dr}{\varphi_2(r)}=\omega+\text{const}\,.$$

On a ainsi des relations entre r et ω, qui, à cause de la signification

géométrique de r et de ω, représentent les équations des projections des lignes de courbure sur le plan des xy, en coordonnées polaires.

Pour l'hélicoïde réglé droit, l'équation des lignes de courbure est, en faisant $f = f' = f'' = 0$:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a^2+r^2 \\ 0 & -a & 0 \\ d\omega^2 & -dr\,d\omega & dr^2 \end{vmatrix} \quad \text{ou :} \quad dr^2 = (r^2+a^2)\,d\omega^2 ;$$

ce qui s'écrit, en séparant les variables :

$$\frac{dr}{\sqrt{r^2+a^2}} = \pm\, d\omega ,$$

et en intégrant :

$$\log\left(r + \sqrt{r^2+a^2}\right) = \pm\,\omega + \log C ;$$

$$r + \sqrt{r^2+a^2} = C e^{\pm\omega}$$

d'où, par un calcul facile :

$$2r = C e^{\pm\omega} - \frac{a^2}{C}\, e^{\mp\omega}$$

2° Surfaces de révolution. — Il suffit de faire $a = 0$ dans les formules précédentes, pour qu'elles s'appliquent à la surface de révolution autour de Oz :

$$x = r\cos\omega ; \qquad y = r\sin\omega ; \qquad z = f(r).$$

L'équation différentielle des lignes de courbure est donc :

$$\begin{vmatrix} 1+f'^2(r) & 0 & r^2 \\ r f''(r) & 0 & r^2 f'(r) \\ d\omega^2 & -dr\,d\omega & dr^2 \end{vmatrix} = 0 ; \text{ou } r^2 dr\,d\omega\left[f'(r)(1+f'^2(r)) - r f''(r)\right] = 0$$

En général le coefficient de $dr\,d\omega$ n'est pas nul ; l'équation différentielle se réduit donc à $dr\,d\omega = 0$; ce qui donne, pour les lignes de courbure, les méridiens ($\omega = \text{const}$) et les parallèles ($r = \text{const.}$) résultat géométriquement évident.

Si le coefficient de $dr\,dw$ était nul, l'équation différentielle des lignes de courbure serait indéterminée, c.à.d. que toutes les directions seraient principales autour d'un point quelconque : une ligne quelconque tracée sur la surface serait alors ligne de courbure. En ce cas la fonction $f(r)$ vérifie l'équation :

$$f'(r)\left(1+f'^2(r)\right) = r f''(r); \quad \text{qui s'écrit :}$$

$$\frac{f'-rf''}{f'^2} = -f';$$

le premier membre est la dérivée de $\frac{r}{f'(r)}$; le second, celle de $-f(r)$; donc :

$$\frac{r}{f'} = -f + C; \qquad \text{ou} \qquad r = -ff' + Cf'$$

et en remontant encore aux primitives :

$$r^2 = -f^2 + 2Cf + C'$$

ce qui donne $f(r)$. La méridienne dans le plan zox, étant $z = f(x)$, aura donc pour équation :

$$x^2 + z^2 - 2Cz - C' = 0 \;;$$

c'est un cercle ayant son centre sur Oz. La surface est alors une sphère.

Il est évident a priori que les lignes de courbure de la sphère sont indéterminées, car toutes les normales concourent au centre, de sorte que toutes les directions autour d'un point sont des directions principales (N° 291, Remarque).

Les lignes de courbure du plan sont également indéterminées

3° Surfaces réglées. _ Une droite située sur une surface est nécessairement une ligne asymptotique de cette surface : car le plan tangent en un quelconque M des points de la droite contient celle-ci, qui est dès lors une des tangentes, en M, à la courbe d'intersection du plan et de la surface.

Donc, sur une surface réglée, une des deux séries de lignes asymptotiques est formée par les génératrices rectilignes.

Sur les quadriques, les deux systèmes de génératrices rectilignes donnent les deux séries d'asymptotiques.

4° Surfaces développables. _ Sur une surface développable, tous les points sont paraboliques, car l'équation (14 bis) : $rt - s^2 = 0$, qui donne ces points (N° 294), est vérifiée en tous les points de la surface (N° 56) :

il en résulte qu'en chaque point les deux directions asymptotiques coïncident, c. à. d. qu'il n'y a qu'une série de lignes asymptotiques. La surface étant réglée, ces lignes sont les génératrices rectilignes.

Les génératrices rectilignes forment également une des séries de lignes de courbure. Car les directions asymptotiques en un point d'une surface sont également inclinées sur les directions principales, et par suite si elles coïncident entre elles, elles coïncident aussi avec une des directions principales : donc en tout point d'une surface développable, une des directions principales est celle de l'asymptotique qui passe par ce point, c. à. d. celle de la génératrice.

Les lignes de courbure du second système sont les trajectoires orthogonales des génératrices.

5°. Paraboloïde équilatère. – Soit la surface

$$z = \frac{xy}{a} ;$$

Les lignes de courbure se déterminent aisément. On a :

$$p = \frac{y}{a} ; \qquad r = 0 \qquad s = \frac{1}{a} ;$$
$$q = \frac{x}{a} ; \qquad t = 0$$

l'équation différentielle (12 bis) des lignes de courbure est donc :

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{y^2}{a^2} & \frac{xy}{a^2} & 1 + \frac{x^2}{a^2} \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ dy^2 & -dx\,dy & dx^2 \end{vmatrix} = 0 ; \text{ ou : } dx^2(y^2+a^2) = dy^2(x^2+a^2)$$

On peut séparer les variables :

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{dy}{\sqrt{y^2+a^2}} ;$$

d'où en intégrant :

$$\log\left[x + \sqrt{x^2+a^2}\right] = \pm \log\left[y + \sqrt{y^2+a^2}\right] + C ; \qquad \text{c. à. d}$$

1ère Solution :

$$x + \sqrt{x^2+a^2} = C\left(y + \sqrt{y^2+a^2}\right)$$

2e Solution :

$$x + \sqrt{x^2+a^2} = \frac{C}{y + \sqrt{y^2+a^2}}$$

On a ainsi les relations qui lient x et y le long des lignes de courbure de chaque système, c. à d. les équations de projections de ces lignes sur le plan des xy. Ces lignes sont algébriques.

Les lignes de courbure des quadriques générales seront déterminées dans le cours de seconde année; elles sont également algébriques.

299. _ Surfaces minima. _ On nomme ainsi celles qui ont pour indicatrice, en chacun de leurs points une hyperbole équilatère: On a alors $M = -N$, et les rayons de courbure principaux, $\rho_1 = \frac{1}{M}$, $\rho_2 = \frac{1}{N}$ (N° 291) sont égaux et de signes contraires. Une surface sera donc minima si l'équation (11) du N° 293, aux rayons de courbure principaux, manque du terme en ρ, c. à d. si l'on a :

$$(\mu) \qquad 2FS - ET - GR = 0,$$

quels que soient les deux paramètres u et v. Ainsi pour l'héliçoïde réglé droit, R et T sont nuls, F l'est également : car, dans les valeurs de R, T, F données au N° 298 pour l'héliçoïde général, on doit faire $f(r) = 0$. <u>L'héliçoïde réglé droit est donc une surface minima</u>.

Si la surface est donnée sous la forme $z = f(x,y)$, l'équation (μ) devient, en remplaçant $E, \ldots R, \ldots$ par leurs valeurs (N° 294):

$$(\mu') \qquad (1+p^2)t - 2pqs + r(1+q^2) = 0 .$$

Le problème de trouver toutes les surfaces minima revient à trouver toutes les fonctions z, de x et y, dont les dérivées partielles premières et secondes vérifient cette équation : il faut donc, en d'autres termes, intégrer l'équation différentielle (μ') : Monge l'a fait le premier, et de nombreux résultats ont été obtenus depuis sur les surfaces minima.

300. _ Exemple. _ Cherchons à déterminer les <u>surfaces minima de révolution</u>. Pour la surface de révolution

$$x = r\cos\omega ; \qquad y = r\sin\omega ; \qquad z = f(r) :$$

les valeurs de E, F, G sont $1+f'^2(r)$; 0; r^2; les valeurs proportionnelles de R, S, T sont $rf''(r)$, 0, $r^2 f'(r)$ (N° 298, 1° et 2°). Donc, si la surface est minima on a :

$$\left[1+f'^2(r)\right] r^2 f'(r) + r^3 f''(r) = 0,$$

équation différentielle d'où il faut tirer la fonction inconnue, $f(r)$.

On peut écrire, en séparant les variables f et r :

$$\frac{f''}{f'(1+f'^2)} = -\frac{1}{r}$$

ou, en décomposant $\frac{1}{f'(1+f'^2)}$ en fractions simples :

$$\frac{f''}{f'} - \frac{f''f'}{1+f'^2} = -\frac{1}{r}$$

et en remontant aux primitives :

$$\log f' - \frac{1}{2}\log(1+f'^2) = -\log r + \log C$$

c. à . d.

$$\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} = \frac{C}{r}$$

On en tire :

$$f'^2 = \frac{C^2}{r^2-C^2}\ ;\ \text{ ou } f' = \frac{C}{\sqrt{r^2-C^2}}$$

et en intégrant encore une fois :

$$f = C\log\left[r+\sqrt{r^2-C^2}\right]+C'$$

La méridienne, dans le plan zox, c. à . d. la courbe $z=f(x)$, est donc :

$$z = C\log\left(x+\sqrt{x^2-C^2}\right)+C'$$

La valeur de la constante C' n'influe pas sous la forme de la surface de révolution : car changer C' revient à déplacer la méridienne parallèlement à Oz, axe de la surface. On peut donc supposer $C'=-C\log C$, ce qui donne pour la méridienne :

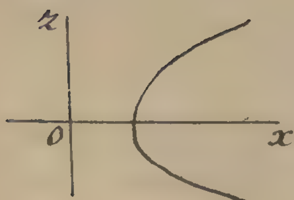
$$z = C\log\frac{x+\sqrt{x^2-C^2}}{C},\ \text{ ou :}$$

$$x+\sqrt{x^2-C^2} = Ce^{\frac{z}{c}} \text{ . . . . on en déduit :}$$

$$\cancel{x^2}-C^2 = C^2e^{\frac{2z}{c}} - 2Cxe^{\frac{z}{c}} + \cancel{x^2}$$

d'où

$$x = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{z}{c}}+e^{-\frac{z}{c}}\right)$$



Cette courbe se nomme <u>chaînette</u> ; l'axe des z est dit <u>base</u> de la chaînette. Ainsi <u>la seule surface minima de révolution est engendrée par une chaînette, tournant autour de sa base</u>.

Chapitre VI.

Représentation des surfaces les unes sur les autres.

301. – Définitions et objet du chapitre. – On dit qu'une surface S est représentée sur une surface S_1 lorsqu'on a établi entre leurs points une correspondance, telle qu'à un point de l'une des surfaces correspondent un ou plusieurs points de l'autre : à une courbe tracée sur S correspond ainsi une courbe tracée sur S_1, et réciproquement.

Il est clair qu'on peut représenter S sur S_1 d'une infinité de manières ; par exemple, en faisant correspondre les points des deux surfaces situés sur une même parallèle à Oz, etc.... : parmi les représentations d'une surface sur une autre, les suivantes sont particulièrement intéressantes.

1° La représentation peut conserver les longueurs, c. à. d. que la longueur d'un arc quelconque tracé sur S est égale à celle de l'arc correspondant de S_1 : on dit alors que les deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre.

2° La représentation peut conserver les angles, c. à. d. que l'angle de deux courbes tracées sur S est égal à l'angle des deux courbes correspondantes de S_1 : on dit alors que la représentation est conforme. Lorsque S_1 est un plan, c'est le problème des cartes géographiques.

On va étudier successivement ces deux modes de représentation.

I. - Surfaces applicables l'une sur l'autre.

---

302. - Soient S et S_1 deux surfaces définies respectivement par les équations :

$$(S) \qquad x = x(u,v) \;; \quad y = y(u,v) \;; \quad z = z(u,v)$$

$$(S_1) \qquad x_1 = x_1(u',v') \;; \quad y_1 = y_1(u',v') \;; \quad z_1 = z_1(u',v')$$

Établir entre leurs points une correspondance, c'est faire correspondre à un système de valeurs de u, v un système de valeurs de u', v' ; c'est donc poser :

$$(1) \qquad u' = f(u,v) \;; \qquad v' = g(u,v),$$

f et g étant des fonctions quelconques.

Cela posé, sur la surface (S), le carré de l'élément d'arc a pour expression (N° 292) :

$$(2) \qquad ds^2 = E(u,v)\,du^2 + 2F(u,v)\,du\,dv + G(u,v)\,dv^2 \;;$$

et sur S_1 :

$$(3) \qquad ds_1^2 = E_1(u',v')\,du'^2 + 2F_1(u',v')\,du'\,dv' + G_1(u',v')\,du'^2$$

Pour que les deux surfaces soient applicables l'une sur l'autre, il est <u>nécessaire</u> que les arcs infiniment petits correspondants soient égaux ; or le carré de l'élément dS_1, qui correspond, sur S_1, à l'élément dS pris sur S s'obtient en remplaçant, dans (3), u' et v' par leurs valeurs (1) en fonction de u et v, ce qui donne :

$$ds_1^2 = E_1(f,g)\left[\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv\right]^2 + 2F_1(f,g)\left[\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv\right]\left[\frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial v}dv\right] + \dots$$

ou, en ordonnant par rapport à du et dv :

$$ds_1^2 = \mathcal{E}\,du^2 + 2\mathcal{F}\,du\,dv + \mathcal{G}\,dv^2,$$

étant posé, pour simplifier :

$$\mathcal{E} = E_1(f,g)\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]^2 + 2F_1(f,g)\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u} + G_1(f,g)\left[\frac{\partial g}{\partial u}\right]^2$$

(4) $$\mathcal{F} = E_1(f,g)\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} + 2F_1(f,g)\left[\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}\right] + G_1(f,g)\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\mathcal{G} = E_1(f,g)\left[\frac{\partial f}{\partial v}\right]^2 + 2F_1(f,g)\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v} + G_1(f,g)\left[\frac{\partial g}{\partial v}\right]^2$$

Pour que $ds_1^2 = ds^2$, quelle que soit la position de l'arc ds, il faut que

$$E(u,v)\,du^2 + 2F(u,v)\,du\,dv + G(u,v)\,dv^2 = \mathcal{E}du^2 + 2\mathcal{F}du\,dv + \mathcal{G}dv^2;$$

quels que soient du, dv, u, v; c. à. d. qu'on ait identiquement (quels que soient u et v):

(5) $$E = \mathcal{E}; \qquad F = \mathcal{F}; \qquad G = \mathcal{G}$$

Ces conditions, nécessaires pour que S_1 soit applicable sur S, sont suffisantes : car si elles sont remplies, les arcs infiniment petits correspondants de deux courbes correspondantes étant égaux, il en sera de même des arcs finis.

Donc enfin, pour reconnaître si S_1 est applicable sur S, il faut avoir si l'on peut déterminer les deux fonctions inconnues, $f(u,v)$ et $g(u,v)$, qui définissent la correspondance, de manière que les relations (5) soient satisfaites. Or E, F, G sont des fonctions connues de u et v; $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sont, d'après (4), des fonctions de forme connue de f, g, et de leurs dérivées partielles du premier ordre en u, v: les relations (5) sont donc trois équations différentielles, aux dérivées partielles, par rapport aux deux fonctions cherchées f et g. On a donc une équation de plus qu'il n'y a d'inconnues, c. à. d. que le problème est généralement impossible, ou que deux surfaces prises au hasard ne sont pas applicables l'une sur l'autre.

Remarque. — Si S et S_1 sont applicables l'une sur l'autre, on aura, d'après cela, pour les définir paramétriquement :

(S) $\quad x = x(u,v); \quad y = y(u,v); \quad z = z(u,v)$

(S_1) $\quad x_1 = x_1(f,g) = X(u,v); \quad y_1 = Y(u,v); \quad z_1 = Z(u,v);$

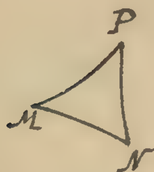
au point (u,v) de S correspondra, sur S_1, le point de mêmes arguments, u et v, et cette correspondance sera telle qu'on ait :

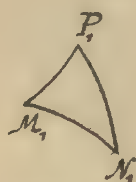
$$dS^2 = E(u,v)\,du^2 + 2F(u,v)\,du\,dv + G(u,v)\,dv^2 ;$$
$$dS_1^2 = E(u,v)\,du^2 + 2F(u,v)\,du\,dv + G(u,v)\,dv^2 .$$

c. à. d. $\qquad ds^2 \equiv ds_1^2$, identiquement.

Réciproquement si $ds^2 \equiv ds_1^2$, les deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre, et de telle sorte qu'au point (u,v) sur S corresponde le point de mêmes arguments (u,v) sur S_1.

303. – Si S est applicable sur S_1, les arcs correspondants sont égaux : il en résulte que les angles sont aussi conservés, c. à. d. que l'angle de deux courbes de S est égal à celui des courbes correspondantes de S_1. Car soient M et M_1 les sommets des deux angles ; prenons sur chaque côté de l'angle M deux points, N et P, infiniment voisins de M, et joignons-les par un arc quelconque, NP. Soient N_1 et P_1 les points correspondants sur S_1, et N_1P_1 l'arc correspondant à NP. Les deux triangles MNP, $M_1N_1P_1$, qui sont rectilignes à la limite, ont leurs côtés égaux chacun à chacun, puisque ces côtés sont des arcs correspondants de S et de S_1 ; leurs angles sont donc aussi égaux.





C. q. f. d.

De même, l'aire d'une courbe de S est égale à l'aire de la courbe correspondante de S_1, car on peut décomposer les deux aires en triangles infiniment petits, rectilignes à la limite, et égaux chacun à chacun.

Exemples de surfaces applicables l'une sur l'autre.

304. – Théorème de Bour. – Tout héliçoïde est applicable sur une surface de révolution.

Soit l'héliçoïde :

$(S) \qquad x = r\cos\omega \ ; \qquad y = r\sin\omega \ ; \qquad z = f(r) + a\omega$

On a : $\qquad dS_1^2 = dr^2\left[1 + f'^2(r)\right] + 2af'(r)\,dr\,d\omega + (r^2 + a^2)\,d\omega^2$

Cherchons s'il existe une surface de révolution :

$$(S_1) \qquad x_1 = u\cos\theta\ ; \qquad y_1 = u\sin\theta\ ; \qquad z_1 = \varphi(u)$$

sur laquelle l'héliçoïde soit applicable. On a sur cette surface :

$$dS_1^2 = u^2 d\theta^2 + du^2\left[1+\varphi'^2(u)\right]$$

On peut écrire dS^2, en complétant le carré formé par les deux derniers termes :

$$dS^2 = (r^2+a^2)\left[d\omega + a\frac{f'(r)}{r^2+a^2}dr\right]^2 + dr^2\frac{a^2+r^2\left[1+f'^2(r)\right]}{r^2+a^2}$$

Etablissons maintenant entre les deux surfaces S et S_1 la correspondance définie par :

$$(6) \qquad \theta = \omega + a\int\frac{f'(r)}{r^2+a^2}dr\ ; \qquad u = \sqrt{r^2+a^2}\ \ldots \text{d'où} \begin{cases} r = \sqrt{u^2-a^2} \\ dr = \dfrac{u\,du}{\sqrt{u^2-a^2}} \end{cases}$$

On pourra écrire :

$$dS^2 = u^2 d\theta^2 + du^2\frac{a^2+(u^2-a^2)\left[1+f'^2(\sqrt{u^2-a^2})\right]}{u^2-a^2}$$

$$= u^2 d\theta^2 + du^2\,\frac{u^2+(u^2-a^2)\,f'^2(\sqrt{u^2-a^2})}{u^2-a^2}$$

On aura identiquement $dS_1^2 \equiv dS^2$ si l'on peut choisir la fonction inconnue, $\varphi'(u)$, de manière que :

$$1+\varphi'^2(u) = \frac{u^2+(u^2-a^2)f'^2(\sqrt{u^2-a^2})}{u^2-a^2}$$

ou :

$$\varphi'^2(u) = \frac{a^2+(u^2-a^2)\,f'^2(\sqrt{u^2-a^2})}{u^2-a^2}$$

Il suffit pour cela de prendre :

$$(7) \qquad \varphi(u) = \int\sqrt{\frac{a^2+(u^2-a^2)\,f'^2(\sqrt{u^2-a^2})}{u^2-a^2}}\,du$$

Le théorème est donc établi ; la surface de révolution est engendrée par la rotation, autour de OZ, de la courbe $z = \varphi(x)$ du plan des zx.

Cas particulier. – Héliçoïde réglé droit. – On a, pour cet héliçoïde $f(r)=0$. Donc il est applicable sur la surface de révolution autour de Oz, qui a pour méridienne dans le plan zox, la courbe $z=\varphi(x)$, la fonction $\varphi(x)$ étant définie par (7):

$$\varphi(x)=\int\sqrt{\frac{a^2}{x^2-a^2}}\,dx$$

Cette courbe est donc :

$$z=a\log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C' ;$$

c'est une chaînette, qui a pour base Oz. (N° 300). Donc :

Tout héliçoïde réglé droit est applicable sur une surface de révolution engendrée par une chaînette tournant autour de sa base.

Si l'on écrit les équations paramétriques des deux surfaces :

$$(S_1)\qquad x=r\cos\omega\ ;\qquad y=r\sin\omega\ ;\qquad z=a\omega$$

$$(S)\qquad x_1=u\cos\theta\ ;\qquad y_1=u\sin\theta\ ;\qquad z_1=a\log\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right),$$

les relations de correspondance (6) montrent qu'au point (ω,r) de l'héliçoïde correspond le point (θ,u) de la surface de révolution tel que :

$$\theta=\omega\ ;\qquad u=\sqrt{r^2+a^2}$$

Donc les génératrices rectilignes ($\omega=$ const) de l'héliçoïde s'appliquent sur les méridiens ($\theta=$ const) de la surface de révolution, et les hélices ($r=$ const) de l'héliçoïde s'appliquent sur les parallèles ($u=$ const).

Théorème de Gauss.

305. – Gauss a démontré le théorème suivant :

Si deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre, le produit des rayons de courbure principaux en deux points correspondants est le même pour les deux surfaces. (Cette condition n'est d'ailleurs pas suffisante pour que les deux surfaces soient applicables).

Pour établir cette proposition, Gauss, par un calcul assez long qui ne sera pas reproduit ici, établit l'identité suivante, où les notations habituelles sont conservées :

$$4(EG-F^2)(RT-S^2) = E\left[\frac{\partial E}{\partial u}\,\frac{\partial G}{\partial v} - 2\,\frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial G}{\partial v} + \overline{\frac{\partial G}{\partial u}}^2\right]$$

$$+ G\left[\frac{\partial G}{\partial u}\,\frac{\partial E}{\partial v} - 2\,\frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial E}{\partial u} + \overline{\frac{\partial E}{\partial v}}^2\right]$$

$$+ F\left[\frac{\partial E}{\partial u}\,\frac{\partial G}{\partial v} + \frac{\partial E}{\partial v}\,\frac{\partial G}{\partial u} - 2\,\frac{\partial E}{\partial v}\,\frac{\partial F}{\partial v} - 2\,\frac{\partial G}{\partial u}\,\frac{\partial F}{\partial u} + 4\,\frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial F}{\partial v}\right]$$

$$- 2\,(EG-F^2)\left[\frac{\partial^2 E}{\partial u^2} - 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 G}{\partial v^2}\right]$$

La vérification de cette identité n'offre aucune autre difficulté que la longueur des calculs : il faudrait remplacer E, F, G, R, S, T par leurs valeurs connues en fonction de $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \ldots\ldots \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \ldots$ et on verrait que tous les termes disparaissent.

Le produit des rayons de courbure principaux en un point de la surface

$$x = x(u,v) \qquad y = y(u,v) \qquad z = z(u,v)$$

est égal, d'après l'équation qui donne ces rayons de courbure, à

$$\rho_1\,\rho_2 = \frac{EG-F^2}{RT-S^2} \;:$$

Or, en vertu de l'identité de Gauss, $RT-S^2$ ne dépend que de E, F, G et de leurs dérivées partielles premières et secondes par rapport à u et v ; donc

$$\rho_1\,\rho_2 = \text{fonction rationnelle de}\left(E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots \frac{\partial^2 G}{\partial v^2}\right)$$

En d'autres termes si E, F, G sont les <u>mêmes</u> fonctions de u et v pour deux surfaces S et S_1, le produit $\rho_1\,\rho_2$, au point u, v de la surface S, sera le même que le produit $\rho_1'\rho_2'$ au point u, v de la surface S_1 : Or, si deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre, nous avons vu (N° 302 Remarque) qu'on pouvait les représenter paramétriquement :

(S) $$x = x(u,v)\,;\ \ldots\ldots$$

(S_1) $$x_1 = X(u,v)\,;\ \ldots\ldots$$

de telle sorte que E, F et G soient les <u>mêmes</u> fonctions de u, v pour les deux surfaces ; le théorème de Gauss est donc établi.

Surfaces applicables sur le plan.

306. – Le problème de déterminer toutes les surfaces applicables sur une surface donnée n'a encore reçu aucune solution générale ; on ne sait le traiter que dans des cas particuliers, par exemple si l'une des surfaces est un plan.

On va établir que

Les surfaces applicables sur le plan sont les surfaces développables.

307. – En effet, pour un plan, les deux rayons de courbure principaux en chaque point sont infinis ; leur produit est donc infini : par suite, d'après le théorème de Gauss, une surface applicable sur un plan aura, en chaque point, <u>un</u> rayon de courbure principal infini.

Si cette surface est $z = f(x, y)$, l'équation aux rayons de courbure principaux est :

$$\left(pq - \frac{\rho s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)^2 - \left(1+p^2 - \frac{\rho r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\left(1+q^2 - \frac{\rho t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) = 0 ;$$

et pour qu'<u>en chaque point</u> un de ces rayons soit infini, il faut et il suffit qu'on ait, <u>quels que soient x et y</u> :

$$rt - s^2 = 0 .$$

Je dis que cette relation montre que la surface est développable.

On peut l'écrire en effet :

$$\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

c. à. d. que le Jacobien de p et q, par rapport aux deux variables x et y, est nul ; et par suite p et q sont liés par une relation (n° 31) :

$$q = F(p)$$

Or le plan tangent à la surface $z=f(x,y)$, au point x, y, z, est :

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y)$$

ou

$$Z=pX+qY+(z-px-qy),$$

on aura démontré que la surface est l'enveloppe d'un plan mobile, dépendant d'un seul paramètre (c.à.d. est une développable), si l'on prouve que les coefficients du plan tangent, $p, q, z-px-qy$ sont fonctions de l'un d'eux, p. Or on a déjà $q=F(p)$; tout revient à établir que $z-px-qy$ est fonction de p, c.à.d. que le Jacobien

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(z-px-qy) & \frac{\partial}{\partial y}(z-px-qy) \\ \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \end{vmatrix}$$ est égal à zéro.

Or en tenant compte de $q=F(p)$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x}(z-px-qy)=p-p-x\frac{\partial p}{\partial x}-F'(p)y\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial x}\left[x+yF'(p)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(z-px-qy)=F(p)-x\frac{\partial p}{\partial y}-F(p)-F'(p)y\frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}\left[x+yF'(p)\right]$$

d'où résulte immédiatement que le Jacobien est nul. Ainsi :

Toute surface applicable sur le plan est développable.

308. *Réciproquement* : Toute développable est applicable sur le plan. — En effet, considérons la développable lieu des tangentes à une courbe gauche C; nous pouvons supposer que les coordonnées, x, y, z d'un point M de C sont données en fonction de l'arc $OM=\sigma$, de cette courbe, compté à partir d'un point O quelconque. On a alors, d'après le N° 274, et en désignant par K la courbure en M :

(6) $$x'^2+y'^2+z'^2=1,$$

(7) $$x'x''+y'y''+z'z''=0;$$

(8) $$x''^2+y''^2+z''^2=K^2,$$

$x', \dots x'', \dots$ étant les dérivées de x, y, z par rapport à σ.

Cela posé, soit $P\ (X,Y,Z)$ le point situé sur la tangente en M, à la distance l de ce point ; on a :

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'} = \frac{l}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

(x,y,z) M σ O l (X,Y,Z) P

d'où en tenant compte de (6) :

$$(9)\qquad \begin{cases} X = x + lx' \\ Y = y + ly' \\ Z = z + lz' \end{cases}$$

Ces trois équations définissent un point quelconque, X, Y, Z de la développable lieu des tangentes à la courbe C, en fonction des deux paramètres σ et l ; formons, sur cette surface, l'élément dS^2. On a :

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \left[(x' + l x'')\,d\sigma + x'\,dl\right]^2 + \cdots\cdots$$

et, en tenant compte de (6), (7), (8) :

$$(10)\qquad dS^2 = d\sigma^2\left[1 + l^2 K^2\right] + 2\,d\sigma\,dl + dl^2$$

K est d'ailleurs une fonction connue de σ, $K = \varphi(\sigma)$, puisque la courbe C est donnée.

Cette expression de dS^2 est indépendante de la torsion de la courbe ; si donc on considère une autre courbe, pour laquelle on ait aussi $K = \varphi(\sigma)$, et dont la torsion varie d'une manière quelconque avec l'arc, le dS^2 sur la développable formée par les tangentes à cette courbe aura également l'expression (10), c. à. d. que les deux développables seront applicables l'une sur l'autre. Or il y a une courbe plane pour laquelle $K = \varphi(\sigma)$ (N° 257) ; et comme la développable formée par ses tangentes n'est autre que son plan même, il en résulte bien que toute développable est applicable sur le plan.

II. – Représentations conformes ; cartes géographiques.

309. – Cherchons à représenter une surface S :

(S) $\quad x = x(u,v)\ ; \quad y = y(u,v)\ ; \quad z = z(u,v)$

sur une surface S_1 :

(S_1) $\quad x_1 = x_1(u',v')\ ;$ . . . .

<u>avec conservation des angles</u>.

Supposons que la correspondance entre les points des deux surfaces soit établie par les relations

$$(1) \qquad u' = f(u,v)\ ; \qquad v' = g(u,v)\ ;$$

on aura, sur la surface S, pour le carré, ds^2, d'un élément d'arc quelconque :

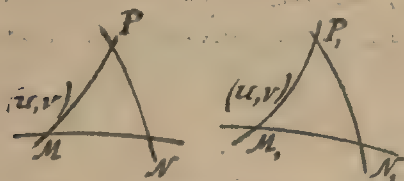
$$ds^2 = E(u,v)\,du^2 + 2F(u,v)\,du\,dv + G(u,v)\,dv^2\ ;$$

et pour le carré ds_1^2, de l'élément <u>correspondant</u> sur S_1 (N° 302) :

$$ds_1^2 = \mathcal{E}\,du^2 + 2\mathcal{F}\,du\,dv + \mathcal{G}\,dv^2\ ;$$

$\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ étant des fonctions, de forme connue, de $f, g, \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}$, et dont l'expression a été écrite au N° 302.

Si la représentation est conforme, c. à. d. si elle conserve les angles, deux triangles infiniment petits quelconques correspondants, l'un sur S, l'autre sur S_1, sont semblables, de sorte qu'on a



$$\frac{MN}{M_1N_1} = \frac{MP}{M_1P_1}$$

Laissons fixes les points M et M_1, ainsi que les points P et P_1 ; cette relation montre que le rapport $\frac{MN}{M_1N_1}$ de deux arcs correspondants <u>quelconques</u>, partant l'un de M, l'autre de M_1, est fixe, c. à. d. indépendant de la direction de MN : en d'autres termes, u et v étant donnés (c. à. d. M

et M_1 étant donnés,) le rapport

$$\frac{dS_1^2}{dS^2} = \frac{\mathcal{E}du^2 + 2\mathcal{F}du\,dv + \mathcal{G}dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

est indépendant du rapport $\frac{du}{dv}$, ce qui exige évidemment qu'on ait (quels que soient u et v) :

(2) $$\frac{\mathcal{E}}{E} = \frac{\mathcal{F}}{F} = \frac{\mathcal{G}}{G}$$

Réciproquement, si les relations (2) sont satisfaites, quels que soient u, v, la représentation (1) conserve les angles. En effet, les relations (2) expriment que le rapport de deux arcs infiniment petits correspondants, partant l'un d'un point M, l'autre du point correspondant M_1, est indépendant de la direction du premier arc autour du point M ; on a donc, autour de M :

$$\frac{MN}{M_1N_1} = \frac{MP}{M_1P_1} ;$$

de même autour de N :

$$\frac{NM}{N_1M_1} = \frac{NP}{N_1P_1} ,$$

ce qui prouve que les deux triangles MNP et $M_1N_1P_1$ sont semblables : leurs angles sont donc égaux.

On a donc finalement deux relations (2) entre les deux fonctions inconnues, f et g (et leurs dérivées), ce qui permettra de déterminer ces fonctions ; le problème est donc possible, c'est-à-dire qu'on peut toujours faire la représentation conforme d'une surface sur une autre.

310. – Supposons que S_1 soit un plan ; soient u' et v' les coordonnées cartésiennes rectangulaires du point de ce plan qui correspond au point u, v de S ; on aura

$$dS_1^2 = du'^2 + dv'^2$$

et la représentation conservera les angles si le rapport

$$\frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{du'^2 + dv'^2}$$

est une fonction de u et v, indépendante du rapport $\frac{du}{dv}$. Soit $\lambda(u,v)$ la valeur de ce rapport ; on a :

$$(3) \qquad E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \lambda\left[du'^2 + dv'^2\right]$$

Voici comment on peut déterminer des fonctions u', v', λ, de u et v, vérifiant identiquement cette relation.

Décomposons le trinôme $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ en deux facteurs, qui sont nécessairement imaginaires conjugués (car le trinôme représentant un élément d'arc ne peut s'annuler pour aucune valeur de $\frac{du}{dv}$) :

$$(4) \qquad E\,du^2 + \dots = (\alpha\,du + \beta\,dv)(\alpha_1\,du + \beta_1\,dv)$$

α et β étant des fonctions de u, v ; et α_1, β_1 étant imaginaires conjugués de α, β. Or on démontrera, dans le cours de seconde année, qu'étant donnée une expression

$$\alpha(u,v)\,du + \beta(u,v)\,dv,$$

on peut toujours trouver un facteur $\mu(u,v)$, tel que le produit

$$\mu(\alpha\,du + \beta\,dv)$$

soit la différentielle exacte d'une fonction $\varphi(u,v)$. On a ainsi :

$$(5) \qquad \begin{cases} \mu(\alpha\,du + \beta\,dv) = d\varphi \quad \dots\dots \text{ et de même :} \\ \mu_1(\alpha_1\,du + \beta_1\,dv) = d\varphi_1 \end{cases}$$

μ_1 et φ_1 étant imaginaires conjugués de μ et φ. L'équation (3), en tenant compte de (4) et (5), s'écrit alors :

$$d\varphi \cdot d\varphi_1 = \mu\mu_1\lambda\,(du'^2 + dv'^2)$$

et on y satisfera identiquement en posant :

$$\left.\begin{aligned} du' + i\,dv' &= d\varphi \\ du' - i\,dv' &= d\varphi_1 \\ \lambda &= \frac{1}{\mu\mu_1} \end{aligned}\right\} \text{ d'où : } \begin{cases} u' + iv' = \varphi \\ u' - iv' = \varphi_1 \end{cases}$$

On a ainsi une détermination $\left[u' = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1)\ ;\ v' = \frac{1}{2i}(\varphi - \varphi_1)\right]$ des fonctions

inconnues u' et v', c.à.d. une représentation conforme, ou <u>carte géographique</u> de la surface sur le plan ; au point (u, v) de la surface correspond, sur le plan, le point dont les coordonnées rectangulaires sont u' et v'.

311.- Il y a une infinité de manières de représenter ainsi une surface sur un plan.

Soient en effet une première carte, où le point M de la surface ait pour correspondant le point m du plan, et une seconde carte, où il ait pour correspondant le point m_1 ; l'angle de deux courbes partant de M sur la surface est égal à celui des couples de courbes correspondantes partant respectivement de m et m_1 sur le plan : il en résulte que la transformation plane, qui fait correspondre le point m_1 au point m, conserve les angles. En d'autres termes, étant donnée une carte de la surface sur le plan, on obtiendra toutes les autres cartes en faisant subir à la première toutes les transformations planes possibles qui n'altèrent pas les angles.

Le problème revient donc à déterminer toutes les transformations conformes du plan en lui-même.

Soient $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ les coordonnées, X et Y, du point qui, dans une de ces transformations, correspond au point x, y :

$$X = P(x,y) \quad ; \qquad Y = Q(x,y).$$

Pour que les angles soient conservés il faut et il suffit que le rapport

$$\frac{dX^2 + dY^2}{dx^2+dy^2} = \frac{\left[\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right]^2 + \left[\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right]^2}{dx^2+dy^2}$$

soit indépendant de $\frac{dy}{dx}$, ce qui donne :

$$(6) \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}\,\frac{\partial P}{\partial y} = -\,\frac{\partial Q}{\partial x}\,\frac{\partial Q}{\partial y}$$

On peut écrire :

$$\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{-\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)} = \pm\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2}} = \pm 1 \ldots\ldots \text{d'après (6)}$$

d'où, ε représentant ± 1 :

$$(7)\qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial Q}{\partial y} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\varepsilon \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Ces relations, si $\varepsilon = +1$, sont précisément celles qui expriment (N° 82) que $P+iQ$ est une fonction de $x+iy$; et si $\varepsilon = -1$, elles expriment que $P-iQ$ est fonction de $x+iy$.

Donc à toute fonction, $P+Qi$, d'une variable imaginaire $x+yi$, correspond une transformation plane

$$X = P(x,y)\ ; \qquad Y = Q(x,y)$$

qui conserve les angles ; et réciproquement si cette transformation conserve les angles, $P+Qi$ (ou $P-Qi$) est fonction de $x+yi$.

Par exemple, la transformation par rayon vecteurs réciproques, le pôle étant l'origine et la puissance étant K^2, est définie par :

$$X = K^2 \frac{x}{x^2+y^2}\ ; \qquad Y = K^2 \frac{y}{x^2+y^2}$$

On sait qu'elle conserve les angles (géométrie élémentaire) ; une des fonctions $X \pm iY$ doit donc être une fonction de $x+iy$. On a en effet :

$$X - iY = K^2 \frac{x-iy}{x^2+y^2} = K^2 \frac{1}{x+yi}$$

Exemples.

312. – Sphère. – Si la surface S est une sphère, on a (N° 296) :

$$x = \sin\theta \cos\psi\ ; \qquad y = \sin\theta \sin\psi\ ; \qquad z = \cos\theta$$

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2$$

en supposant le rayon égal à 1.

Pour faire la carte géographique de la sphère sur un plan, d'après la méthode du N° 310, décomposons $d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2$ en deux facteurs :

$$d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2 = \left[d\theta + i \sin\theta . d\psi\right]\left[d\theta - i \sin\theta\, d\psi\right]$$

Il faut maintenant trouver un facteur μ, tel que

$$\mu(d\theta + i \sin\theta d\psi)$$

soit la différentielle exacte d'une fonction $\varphi(\theta, \psi)$: on aperçoit de suite la solution $\mu = \frac{1}{\sin\theta}$; car :

$$\frac{1}{\sin\theta}\left[d\theta + i \sin\theta\, d\psi\right] = d\left[i\psi + \int \frac{d\theta}{\sin\theta}\right]$$

De même

$$\frac{1}{\sin\theta}\left[d\theta - i \sin\theta\, d\psi\right] = d\left[-i\psi + \int \frac{d\theta}{\sin\theta}\right]$$

et on aura une carte géographique en faisant correspondre au point θ, ψ de la sphère le point u', v' du plan tel que :

$$u' + i v' = i\psi + \int \frac{d\theta}{\sin\theta}$$

$$u' - i v' = -i\psi + \int \frac{d\theta}{\sin\theta}$$

c. à. d.

$$(8) \quad \begin{cases} u' = \int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (N^o\, 145) \\ v' = \psi \end{cases}$$

Dans cette représentation les méridiens ($\psi = \text{const}$) sont représentés par des parallèles à l'axe des u', et les parallèles ($\theta = \text{const}$) par des parallèles à l'axe des v' : c'est le système de cartes de Mercator.

Comme application, cherchons l'équation de la courbe (loxodromie) qui coupe tous les méridiens sous le même angle, α. Sur la carte, cette courbe a pour image une droite :

$$v' = u' \operatorname{tg} \alpha + h ;$$

donc, sur la sphère, son équation sera, en vertu de (8) :

$$\frac{\psi - h}{\operatorname{tg} \alpha} = \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

ou :

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = e^{-h \cot\alpha}\, e^{\psi \cot\alpha}$$

c. à. d.

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \lambda e^{a\psi}$$

λ étant une constante (N° 285).

313. — On peut déduire de ce qui précède, par la méthode du N° 311, tous les autres systèmes de cartes conservant les angles : il suffira de faire correspondre au point θ, ψ de la sphère le point X, Y du plan, tel que

$$X = P(u', v') \; ; \qquad Y = Q(u', v') \; ;$$

$P \pm iQ$ étant une fonction de $u' + v'i$, et u', v' étant remplacés par leurs valeurs (8).

Par exemple prenons

$$P + iQ = e^{u'+v'i} = e^{u'}\left[\cos v' + i \sin v'\right]$$

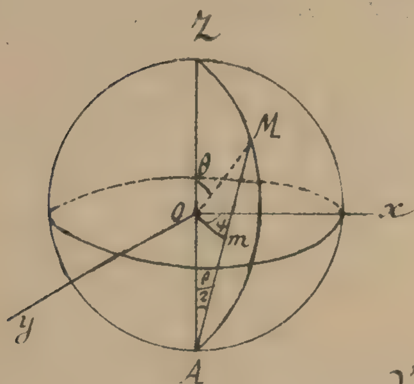
c. à. d.

$$P = e^{u'} \cos v' \; ; \qquad Q = e^{u'} \sin v' \; ;$$

au point (θ, ψ) de la sphère correspond, en remplaçant u', v' par leurs valeurs (8), le point du plan :

$$X = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \cos\psi \; ; \quad Y = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \sin\psi .$$

C'est la projection de Ptolémée, ou stéréographique, qui fait correspondre, à un point M de la sphère, le point m où la droite qui joint M à un des pôles (A), perce le plan de l'équateur.



On a en effet :

$$\widehat{mOx} = \psi$$

$$\widehat{MAO} = \frac{\theta}{2}$$

$$Om = OA.\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

d'où, pour les coordonnées X et Y de m :

$$X = Om.\cos\psi = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cos\psi \; ;$$

$$Y = Om \sin\psi = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sin\psi .$$

c. q. f. d.

314. — *Surfaces de révolution.* — On a trouvé (N° 282) pour le ds^2 de la surface de révolution décrite par la courbe $z = f(x)$, $y = 0$, tournant autour de OZ :

$$ds^2 = r^2 d\omega^2 + \left[1 + f'^2(r)\right] dr^2$$

Décomposons en facteurs :

$$r^2 d\omega^2 + (1 + f'^2(r)) dr^2 = \left[i r d\omega + \sqrt{1+f'^2}\, dr\right]\left[-i r d\omega + \sqrt{1+f'^2}\, dr\right]$$

Un facteur μ, tel que $\mu\,(i r d\omega + \sqrt{1+f'^2(r)}\, dr)$ soit une différentielle exacte est évidemment $\frac{1}{r}$; car

$$\frac{1}{r}\left[i r d\omega + \sqrt{1+f'^2(r)}\, dr\right] = d\left[i\omega + \int \frac{dr}{r}\sqrt{1+f'^2(r)}\right]$$

On aura donc une carte géographique en faisant correspondre au point (r, ω') de la surface le point u', v' du plan tel que :

$$u' + i v' = i\omega + \int \frac{dr}{r}\sqrt{1+f'^2(r)}$$

$$u' - i v' = -i\omega + \int \frac{dr}{r}\sqrt{1+f'^2(r)}$$

c. à. d.

$$u' = \int \frac{dr}{r}\sqrt{1+f'^2(r)} \qquad v' = \omega\,.$$

Les méridiens ($\omega' = \text{const}$) sont représentés par des droites parallèles à un des axes de coordonnées ; les parallèles ($r' = \text{const}$) par des droites parallèles à l'autre axe : c'est, pour une surface de révolution, la carte de Mercator.

Fin.

Table des matières.

Première Partie.

Calcul différentiel.

Chapitre I.

Dérivées et différentielles.

I. – Limites ; infiniment petits.

II. – Dérivées et différentielles des fonctions d'une variable.

III. – Dérivées et différentielles des fonctions de plusieurs variables.

IV. – Déterminants fonctionnels.

Chapitre II.

Changements de variables.

Chapitre III.

Formation des équations différentielles.

I. – Fonctions d'une seule variable.

II. – Fonctions de plusieurs variables.

Chapitre IV.

Séries.

I. – Définitions ; généralités.

II. – Séries dont les termes sont fonctions d'une variable.

III. — Fonctions exponentielle et circulaires.

Chapitre V.

Fonctions d'une variable imaginaire.

Chapitre VI.

Développements en série.

I. — Formule de Taylor.

II. — Procédés pour effectuer les développements en série.

Chapitre VII.

Maxima et minima.

Deuxième Partie.

Principes du calcul intégral.

Chapitre I.

Intégrales indéfinies.

I. – Procédés d'intégration.

Chapitre II.

Intégrales définies.

Chapitre III.

Intégrales multiples.

I. – Définition et Calcul.

II. – Changement de variables dans les Intégrales multiples.

III. – Extension de la notion d'Intégrale double et triple.

Troisième partie –

Troisième Partie.

Applications Géométriques.

Chapitre I.

Théorie du contact; enveloppes; axes.

I. – Théorie du contact.

II. – Théorie des enveloppes.

III. – Longueur d'un arc de courbe.

Chapitre II.

Courbes planes

Chapitre III.

Courbes gauches

Chapitre IV.

Longueurs et aires sur les surfaces.

Chapitre V.

Courbure des Surfaces.

I. - Courbure des lignes tracées sur une surface.

II. – Recherche des directions et des courbures principales.

III. – Lignes de courbure; lignes asymptotiques.

Chapitre VI.

Représentation des surfaces les unes sur les autres.

I. – Surfaces applicables.

II. – Représentations conformes.

Fin de Table des Matières.

Errata

Pages	Lignes	au lieu de :	Lire :
8	16 (en descendant)	"$dy_1 = f(x_1)\,dx_1$",	"$dy_1 = f'(x_1)\,dx_1$"
12	22 (id)	"$f'_y(x, y+\theta_1 k) = f'_y(x,y) + \varepsilon$",	"........ $+\varepsilon'$"
17	6 (id)	"$f'_x(x_1, y_1) - f'_y(x,y)$"	"$f'_y(x_1, y_1) - f'_y(x,y)$"
20	11 (en remontant)	$3\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy^2$	$3\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\,dx\,dy^2$
27	Dernière ligne	$\dfrac{\partial z}{\partial z}$	$\dfrac{\partial z}{\partial x}$
33	11 (en descendant)	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\;\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\;\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$	$2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\;\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\;\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$
36	N°. 41, 2e ligne	....	supprimer le mot "souvent"
37	1	$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial \xi} - \dfrac{\partial v}{\partial \eta}$	$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}$
43	Note au bas de la page	$(k+1)(k+2-2n) >$	$(k+1)(k+2-2n) > 0$
47	Equations 9°.	$[b'z + \beta]$ $[b'z - \beta']$	$[b'z + \beta']$ $[b'z + \beta']$
56	9 de la note au bas de la page	"plus grand entier"	"plus petit entier".
78	4 (en descendant)	"entre $x = a$ et $z = b$"	"entre $x = a$ et $x = b$"
93	7 (en descendant)	$\dfrac{k}{2} f''_{z^2}$	$\dfrac{k^2}{2} f''_{z^2}$
96	7 (id)	"$z(1 - A''r^2)$"	"$z(1 + A''r^2)$"
97	N° 116, 2e ligne	"conditions"	"les conditions"
100	9 (en descendant)	Supprimer les mots	"c'est d'ailleurs un minimum"
109	3 (id)	"$\dfrac{R(a+h)}{Q(a+h)} = \dfrac{1}{h^\alpha}\,\dfrac{\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots}{\mu_0 + \cdots}$"	$= \dfrac{1}{h^\alpha}\,\dfrac{\lambda_0 + \lambda_1 h + \cdots}{\mu_0 + \cdots}$
111	12 (id)	$\displaystyle\int \frac{rS + S}{(x-\lambda)^2 + \mu^2}\,dx =$	$\displaystyle\int \frac{rx + S}{(x-\lambda)^2 + \mu}\,dx =$
113	3 (id)	....	mettre le signe = entre I et $\displaystyle\int \frac{x^6}{(x^2-1)^3}\,dx$.

Pages	Lignes	Au lieu de :	Lire :
121	10 (en remontant)	après $\int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{ax^2+2bx+c}}$	écrire $= \frac{1}{\sqrt{a\lambda^2+2b\lambda+c}} \log[\quad]$
124	1 (en descendant)	.... $\int \frac{dx}{(x^3-x^2)^{\frac{1}{2}}}$	$\int \frac{dx}{(x^3-x^2)^{\frac{1}{3}}}$
"	15 (id)	.... $\frac{(x^3-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}$	$\frac{(x^3-x^2)^{\frac{1}{3}}}{x}$
125	5 (en remontant)	....	supprimer « c.q.f.d. »
126	4 (id)	....	ajouter à la fin « = 0 »
129	4 (en descendant)	...... $\int \frac{(1-t^3)}{t^3}\, dt$	$\int \frac{1-t^2}{t^3}\, dt$
134	16 (id)	.... $\sqrt{X} = \frac{1}{t^9}\sqrt{\frac{1}{2}(a_1-a_2+\frac{1}{t})\cdots}$	$\sqrt{X} = \frac{1}{t^9}\sqrt{\frac{1}{t}(a_1-a_2+\frac{1}{t})\cdots}$
147	7 (id)	.... $f(\xi_K)$	$f'(\xi_K)$
160	1	... « OM_1 d'angle polaire ω_0 »	« OM_0, ... »
183	5 (en remontant)	« $\varphi(-x)$ entre π et 0 »	« $\varphi(-x)$ entre $-\pi$ et 0 »
186	2 (en descendant)	$\int_a^b fx\, dx$	$\int_a^b f(x)\, dx$
"	3 (en remontant)	ajouter dans le crochet le terme	$+(y_n+4y'_n+y_{n+1})$
191	9 (en descendant)	..... « ce qui exprime »	« ce qu'on exprime »
192	3 (en remontant)	mettre le signe = entre	$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ et $\iint dx\,dy\{\ \}$
194	3 (en descendant)	.... « -0 »	« $=0$ »
208	2 (id)	.... $\left[\frac{\cos^4\omega}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$	$-\left[\frac{\cos^4\omega}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
222	14 (id)	.... $\frac{x_1-x}{\lambda} = \frac{y_1-y}{\mu} = \frac{z_1-z}{\gamma}$	$\frac{x_1-x}{\lambda} = \frac{y_1-y}{\mu} = \frac{z_1-z}{\nu}$
225	3 (id)	.... $F(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_1)$
231	11 (id)	Seconde colonne. Supprimer le dernier	$F'_{v_0} = 0$
"	12 (id)	$1+2+3+\ldots+n+1$	$1+2+3+\cdots+(n+1)$

Pages	Lignes	Au lieu de :	Lire :
241	7 (en descendant)	"en coordonnées polaires"	"en coordonnées semi-polaires"
244	N°. 255, 4e ligne	"la courbe au point P,"	"la courbure au point P"
247	7 (en remontant)	$\alpha = \alpha_0 = t$	$\alpha - \alpha_0 = t$
258	9 (en descendant)	Dans l'expression de $x-\alpha$ encadrer de deux lignes verticales le déterminant dénominateur.	
260	N°. 269, 2e ligne	"tangentes voisines"	"tangentes infiniment voisines"
262	ligne 3 (en descendt)	$y'' z''' - z''' y''$	$y'' z''' - z'' y'''$
"	N°. 273, 2e ligne	$d = \frac{A(x+\Delta x)+\cdots}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$	$d = \frac{A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
271	4 (en remontant)	$Ru^2 + 2S\,du\,dv + T dv^2$	$R du^2 + 2S\,du\,dv + T dv^2$
272	19 (en descendant)	$\left[\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v}\right]^2$	$\left[\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right]^2$
278	N°. 285, 2e Ligne	$tg \frac{\theta^2}{2} = \lambda e^{a\varphi}$	$tg \frac{\theta}{2} = \lambda e^{a\varphi}$
285	Dernière ligne de la note	$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\varphi}{\rho_1} - \frac{\sin^2\varphi}{\rho_2}$	$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\varphi}{\rho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho_2}$
289	3 (en descendant)	"déterminées"	"indéterminées"
296	. . . .	Tracer une ligne verticale à gauche du déterminant.	
301	15 (id)	"faut avoir"	"faut voir"
311	3 et 4 (en remont.)	$\begin{cases} u'+iv = \varphi \\ u'-iv = \varphi_1 \end{cases}$	$\begin{cases} u'+iv' = \varphi \\ u'-iv' = \varphi_1 \end{cases}$

École Polytechnique

2ème Division

1896-97

Octobre-Novembre-Décembre-Janvier.

Cours d'Analyse de M. Humbert

Première série d'Exercices proposés par le Professeur.

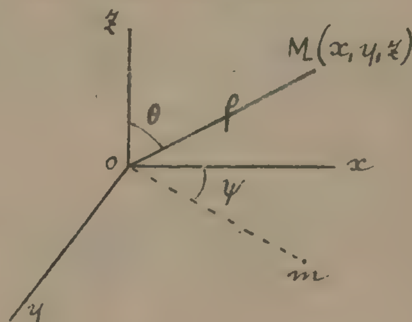
I.- Trouver l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées dont les génératrices sont parallèles au plan des xy.

Vérifier le résultat par la théorie des changements de variables.

II.- Trouver l'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution autour de la droite $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Interprétation géométrique.

III.- Soit $y = f(x)$; on demande d'exprimer les dérivées y', y'', ... de y par rapport à x en fonction des dérivées x', x'', ... de x par rapport à y.

IV.- Soit $z = f(x, y)$; on fait le changement de variables (coordonnées polaires dans l'espace) :



$$x = \rho \sin\theta \cos\psi$$
$$y = \rho \sin\theta \sin\psi$$
$$z = \rho \cos\theta \ ;$$

exprimer $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

en fonction de $\frac{\partial \rho}{\partial \theta}, \frac{\partial \rho}{\partial \psi}$,

et inversement.

Ces exercices sont facultatifs.

Les Élèves qui veulent les faire et les rédiger peuvent conserver l'anonyme : il suffit que les rédactions portent le N° de la salle où elles ont été faites, afin qu'après les avoir fait corriger et annoter par le Professeur et les Répétiteurs, on puisse les rendre aux Élèves.

Il en est rendu compte, et dans tous les cas, la solution en est donnée aux Élèves, soit à l'amphithéâtre à la fin d'une leçon ordinaire, soit en conférence.

Les rédactions doivent être remises au Cabinet de service par les Chefs de salle dans une chemise portant le N° de la salle, huit jours après la distribution des sujets.

V.– Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions

$$u = \varphi_1(x, y, z)\,; \qquad v = \varphi_2(x, y, z)$$

de trois variables indépendantes, x, y, z, soient liées par une relation.

Novembre.

Deuxième série d'Exercices proposés par le Professeur.

I.– Trouver, dans le plan d'un quadrilatère, le point dont la somme des distances aux quatre sommets est minimum.

II.– Développer, suivant les puissances croissantes de x, les quatre racines y de l'équation :

$$y^4 + y^3 - 7y\, x^2 + 6x^3 = 0$$

et les trois racines y de l'équation :

$$y^3 - x^2 y + x^4 = 0$$

en se bornant aux quatre premiers termes de chaque développement.

III.– Trouver les intégrales :

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}\,; \int \frac{dx}{x(x^4+1)}\,; \int \frac{dx}{x^4+1}\,; \int \frac{dx}{(x^2-1)^3}$$

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx\,; \int x^2\sqrt{1+x^2}\,dx\,; \int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x(x+1)}}\,; \int \sqrt{ax^2+2bx+c}\;dx$$

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,.dx\,; \int x \operatorname{arc\,tg} x\,.dx$$ (intégration par parties)

IV.– Montrer que

$$\int x^n \operatorname{arc\,tg} x \,.\, dx$$

peut se calculer si n est un nombre fractionnaire. Faire le calcul pour

$$n = -\frac{1}{2}.$$

V.– Calculer l'intégrale

$$\int \frac{dx}{y},$$

y étant l'ordonnée de la lemniscate

$$(x^2+y^2)^2 = a^2\,(x^2-y^2)\ ;$$

ou de la cissoïde

$$y^2\,(a-x) - x^3 = 0\ ;$$

ou de la strophoïde

$$y(x^2+y^2) - a\,(y^2-x^2) = 0$$

Novembre.

Troisième série d'Exercices proposés par le Professeur.

I.– Réduire les intégrales hyperelliptiques ou elliptiques suivantes.

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^4}}\ ;\ \int \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}\,dx\ ;\ \int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^5+1}}$$

II.– Trouver les intégrales indéfinies :

$$\int \sin^4 x \cos^2 x\,dx\ ;\ \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx\ ;$$

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}\ ;\ \int x\,e^x \cos x\,dx\,.$$

III.– Trouver l'aire comprise entre la cissoïde

$$x\,(x^2+y^2) - a\,y^2 = 0$$

et son asymptote, $x = a$.

IV.– Aire de la cardioïde $\rho = a\,(1+\cos\omega)$.

V.– Aire de l'ellipse :

$$A\,x^2 + 2\,B\,x\,y + C\,y^2 + 2\,D\,x + 2\,E\,y + F = 0 \qquad (B^2 - AC < 0),$$

par la formule

$$\int (y_2 - y_1)\,dx.$$

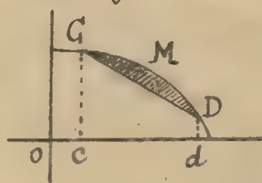
VI.– Pour quelles valeurs de n l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^n}\,dx$ est-elle finie et déterminée ?

Même question pour l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^n}\,dx$

Décembre.

Quatrième série d'Exercices proposés par le Professeur.

I.– Volume engendré par le segment d'ellipse CMD tournant autour du grand axe



$$\begin{cases} OC = c \\ Od = d \end{cases}$$

II.– Le volume engendré par une aire plane fermée tournant autour d'une droite du plan est égal au produit de cette aire par la circonférence que décrit son centre de gravité. (Théorème de Guldin).

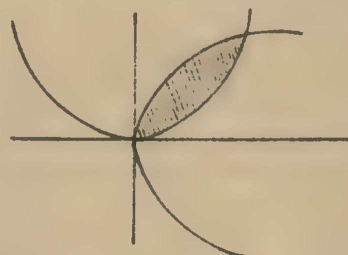
III.– Centre de gravité de l'aire comprise entre une hyperbole et deux droites parallèles à l'axe transverse.

IV.– Volume compris entre une sphère et un cylindre circulaire

droit dont l'axe ne passe pas par le centre. Examiner toutes les positions possibles du cylindre par rapport à la sphère.

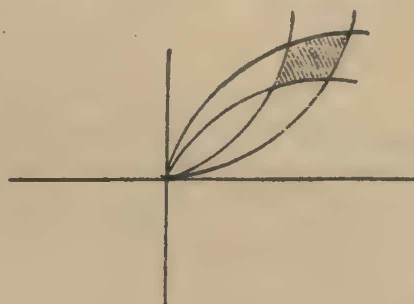
V.– Aire et centre de gravité de la portion de plan comprise entre les paraboles

$$y^2 = 2ax \quad ; \quad x^2 = 2by.$$



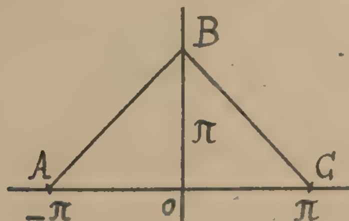
Même question pour la portion de plan comprise entre les quatre paraboles

$$y^2 = 2ax \qquad x^2 = 2by$$
$$y^2 = 2a_1x \qquad x^2 = 2b_1y$$



VI.– Moment d'inertie d'un cylindre de révolution par rapport à une droite normale à l'axe et rencontrant cet axe.

VII.– Développer, par la série de Fourier, la fonction qui, entre $-\pi$ et 0, est égale à $\pi + x$, et entre 0 et π, égale à $\pi - x$.



(La courbe de cette fonction est la ligne brisée ABC)

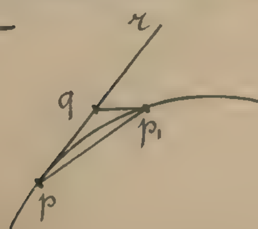
Janvier.

Cinquième série d'Exercices proposés par le Professeur.

I.– Trouver l'équation intrinsèque de la cycloïde.

Inversement, cette équation étant donnée, remonter à l'équation Cartésienne de la courbe correspondante.

II.–



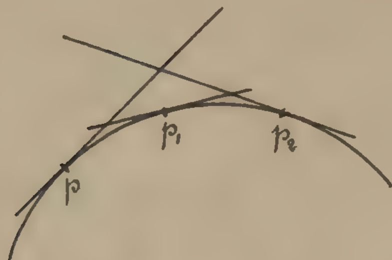
Soit $p\,p_1 = ds$ un arc infiniment petit d'une courbe plane ; on mène les tangentes en p et p_1 :
1° Chercher la valeur principale de l'angle de $p\,q$

et de la corde pp_1 : montrer qu'elle est égale à la moitié de l'angle p_1qr des deux tangentes.

2°. En déduire que les valeurs principales de pq et de p_1q sont égales entre elles et à $\frac{1}{2}ds$.

III.– Soient p, p_1 et p_2 trois points infiniment voisins sur une courbe plane : trouver la valeur limite du rayon du cercle circonscrit au triangle que forment les tangentes en ces trois points. (On s'appuiera sur la formule de trigonométrie

$$\frac{a}{\sin A} = 2R\Big)$$

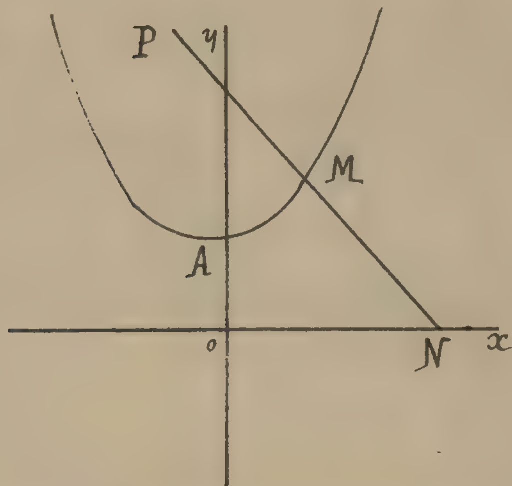


IV.– Trouver le centre et le rayon de la sphère qui a, en un point donné, avec une courbe gauche, un contact du troisième ordre (sphère osculatrice).

V.– Trouver le rayon de courbure de la chaînette

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

Montrer que le rayon MP, est égal à la normale MN.



VI.– Trouver la longueur de l'arc AM de chaînette. En déduire l'équation intrinsèque de la courbe, et inversement remonter de cette équation à celle de la courbe.

VII.– Trouver la développée de la chaînette.

École Polytechnique

1ère Division

1897 – 98.

Cours d'Analyse de Mr Humbert.

Le Cours d'Analyse de seconde année comprend trois parties :

1° Complément de la théorie des Intégrales définies ; fonctions Eulériennes ;

2° Théorie des fonctions d'une variable imaginaire ; fonctions elliptiques et applications ;

3° Équations différentielles.

Première Partie.

Chapitre I.

Fonctions représentées par une intégrale définie.

I. – Dérivation sous le signe $\int$.

1. – Soit $f(x, \alpha)$ une fonction de x, dépendant d'un

paramètre α ; l'intégrale

$$(1) \qquad I = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx,$$

où les limites a et b sont, soit des constantes absolues soit des fonctions de α, est une fonction du paramètre α. Lorsque l'intégration de $f(x,\alpha)$ par rapport à x est impossible à l'aide des fonctions élémentaires, on définit ainsi une fonction nouvelle, dont il est généralement impossible de donner d'autre expression que (1) : on va indiquer comment on peut former sa dérivée par rapport à α.

2. — Supposons d'abord les limites a et b indépendantes de α, et donnons à ce paramètre un accroissement h ; il vient, pour l'accroissement, ΔI, de l'intégrale :

$$\Delta I = \int_a^b \left\{ f(x,\alpha+h) - f(x,\alpha) \right\} dx,$$

et la dérivée de I par rapport à α est la limite, pour $h = 0$, de l'expression

$$\frac{\Delta I}{h} = \int_b^a \frac{f(x,\alpha+h) - f(x,\alpha)}{h}\,dx$$

Or la quantité sous le signe $\int$ a pour limite, quand h tend vers zéro, x et α restant fixes, la dérivée partielle $f'_\alpha(x,\alpha)$, c. à. d. que :

$$\frac{f(x,\alpha+h) - f(x,\alpha)}{h} = f'_\alpha(x,\alpha) + \varepsilon$$

ε étant une fonction de x, α et h, qui a zéro pour limite quand h tend vers zéro x et α demeurant constants.
D'après cela :

$$\frac{\Delta I}{h} = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx + \int_a^b \varepsilon\,dx$$

Dans les anciens traités de Calcul intégral, on se borne à faire observer que l'intégrale $\int^b \varepsilon\,dx$ tend vers zéro, puisque ε tend lui-même vers zéro (avec h), et il reste

$$\lim \frac{\Delta I}{h} = \frac{dI}{d\alpha} = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$$

d'où cette règle (Leibnitz).

Règle. — La dérivée de l'Intégrale $\int_a^b f(x,\alpha)\,dx$ par rapport au paramètre α, lorsque les limites a et b sont des constantes absolues, s'obtient en remplaçant, sous le signe $\int$, la fonction f par [dérivée par] rapport au paramètre.

3. — Mais le raisonnement ci-dessus est insuffisant : ε ne tend vers zéro avec h que si x (aussi bien que α) reste fixe, et dans l'intégrale $\int^b \varepsilon\,dx$, x varie de a à b. On n'a donc pas le droit d'affirmer a que cette intégrale ait pour limite zéro : on a rencontré déjà un cas analogue dans la question de l'intégration des séries (Cours de 1ère Année, N° 194, p. 177).

Pour que l'intégrale eût sûrement zéro pour limite il faudrait que pour toutes les valeurs de h de module suffisamment petit, pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, et pour $\alpha = \alpha_0$, la fonction $\varepsilon(x,\alpha,h)$ demeurât inférieure en valeur absolue à un nombre donné, ε', aussi petit qu'on voudrait ; l'intégrale $\int^b \varepsilon\,dx$ serait alors inférieure à $\varepsilon'(b-a)$, et aurait bien zéro pour limite(1) : La Règle serait alors applicable, et donnerait la dérivée de I pour $\alpha = \alpha_0$. Sans rechercher ici les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi, on indiquera un cas particulier, très étendu, où la règle s'appliquera en toute sécurité.

A. — Ce cas est celui où la fonction $f(x,\alpha+h)$ est telle qu'on peut lui appliquer la formule de Taylor réduite aux deux premiers termes ;

$$f(x,\alpha+h) - f(x,\alpha) = h\, f'_\alpha(x,\alpha) + \frac{h^2}{2}\, f''_{\alpha^2}(x,\alpha+\theta h).$$

Cela suppose :

1° que $f(x,\alpha)$ et $f'_\alpha(x,\alpha)$ sont des fonctions continues de la variable α, lorsque α varie entre deux limites α_1, α_2 ; et cela, quelle que soit la valeur fixe attribuée à x entre a et b ;

2° que f''_{α^2} est finie et déterminée quand α reste entre α_1 et α_2 et x entre a et b.

On a en ce cas :

$$(2)\qquad \frac{\Delta I}{h} = \int_a^b \frac{f(x,\alpha+h) - f(x,\alpha)}{h}\,dx = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx + \frac{h}{2}\int_a^b f''_{\alpha^2}(x,\alpha+\theta h)\,dx$$

---

(1) à condition encore qu'aucune des limites, a et b, ne soit infinie.

Or, si aucune des limites a, b n'est infinie, la dernière intégrale, au second membre, est finie; puisque, par hypothèse, f''_{α^2} ne devient infinie pour aucune des valeurs de α et x respectivement comprises entre α_1 et α_2, a et b: le produit de cette intégrale par $\frac{1}{2}h$ tend donc vers zéro avec h, et à la limite, on a bien

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$$

pour toutes les valeurs de α comprises entre α_1 et α_2 (1). C.q.f.d.

4. — Si les conditions A (ou des conditions analogues, telles que celles indiquées en note au N° 3) ne sont pas remplies, ou si l'intégrale donnée a une de ses limites infinie, on ne peut appliquer avec sécurité la règle de dérivation; une discussion spéciale peut devenir nécessaire dans chaque cas particulier.

La Remarque suivante simplifie cette discussion dans le cas des limites infinies, si l'on suppose remplies les conditions A.

On a en effet, en ce cas, a et b étant finis (2):

$$(3) \qquad \frac{\Delta I}{h} = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx + \frac{h}{2}\int_a^b f''_{\alpha^2}(x,\alpha+\theta h)\,dx;$$

Supposons que b tende vers l'infini; la limite du second membre, pour $h=0$, sera $\int_a^\infty f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$, c. à. d. que la règle sera applicable, si l'intégrale

$$\int_a^\infty f''_{\alpha^2}(x,\alpha+\theta h)\,dx$$

a une valeur finie. Nous indiquerons plus loin (N°s 12 et 15) des exemples de ce cas particulier.

Voici au contraire un exemple d'illégitimité de la règle de dérivation, dans le cas d'une limite infinie.

Soit l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

---

(1) On établirait sans difficulté que la règle de dérivation est encore applicable (a et b étant finis) si $f(x,\alpha)$ et $f'_\alpha(x,\alpha)$ sont des fonctions continues des deux variables, x et α, pour tous les systèmes de valeurs de ces variables comprises respectivement entre a et b, α_1 et α_2.

qui est finie et déterminée (cours de 1ère année, p. 167); c'est donc une constante absolue (qu'on démontre d'ailleurs être $\frac{\pi}{2}$). Faisons le changement de variable $x = \alpha y$; α étant une constante > 0. On a :

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha y}{y}\,dy$$

La dérivée du second membre par rapport à α doit être nulle, puisque cette intégrale a pour valeur une constante absolue; or en appliquant la règle, on trouverait, pour cette dérivée, $\int_0^\infty \cos \alpha y . dy$, expression évidemment indéterminée.

5. — Si les limites a et b de l'intégrale proposée (1) sont, non plus des constantes absolues, mais des fonctions du paramètre α, on trouve la dérivée en appliquant la règle de dérivation des fonctions composées. On a :

$$\frac{dI}{d\alpha} = \frac{dI}{db}\,\frac{db}{d\alpha} + \frac{dI}{da}\,\frac{da}{d\alpha} + \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$$

Or on sait (Cours de 1ère année, p. 151) que la dérivée, $\frac{dI}{db}$, de $\int_a^b f(x,\alpha)dx$ par rapport à la limite supérieure, b, est $f(b,\alpha)$; de même $\frac{dI}{da}$ est $-f(a,\alpha)$; donc :

$$\frac{dI}{d\alpha} = f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha} + \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx.$$

II. – Intégration sous le signe $\int$

---

6. – Reprenons l'intégrale :

$$I = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx,$$

dépendant d'un paramètre α, et dont les limites a et b sont indépendantes de α.

Proposons-nous de l'intégrer par rapport à α, entre deux limites constantes α_1 et α_2; c'est le problème inverse de celui

de la dérivation qu'on vient de traiter.

L'intégrale cherchée est :

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \left\{ \int_a^b f(x,\alpha)\, dx \right\};$$

ce n'est autre chose qu'une intégrale double (les variables de sommation étant x et α) prise dans le rectangle qui a pour côtés les droites

$$x = a, \qquad x = b; \quad \alpha = \alpha_1, \quad \alpha = \alpha_2;$$

on peut donc intervertir l'ordre des intégrations (Cours de 1ère Année, p. 191), à condition que la fonction $f(x,\alpha)$ soit continue dans le rectangle, supposé lui-même fini ; on a ainsi :

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int_a^b f(x,\alpha)\, dx = \int_a^b dx \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)\, d\alpha.$$

C'est la formule d'Intégration sous le signe $\int$, tout à fait semblable à celle de dérivation : au lieu de remplacer, sous le signe $\int_a^b$, la fonction $f(x,\alpha)$ par sa dérivée en α, on la remplace par son intégrale en α, entre les limites α_1 et α_2.

7. — Si les limites a et b dépendent de α, la formule ci-dessus n'est plus exacte.

On peut ramener ce cas au précédent par un changement de variable. Dans l'intégrale

$$\int_a^b f(x,\alpha)\, dx$$

posons

$$x = a + (b-a)y$$

d'où

$$dx = (b-a)\, dy;$$

l'intégrale devient

$$\int_0^1 (b-a)\, f(a+(b-a)y, \alpha)\, dy,$$

où les limites sont constantes. La formule du N° 6 est alors applicable.

Remarque. — Indiquons encore une autre méthode.

Soient

$$a = \varphi(\alpha), \quad b = \theta(\alpha)$$

les limites variables avec α, de l'intégrale considérée ; il s'agit de calculer ou de transformer l'expression :

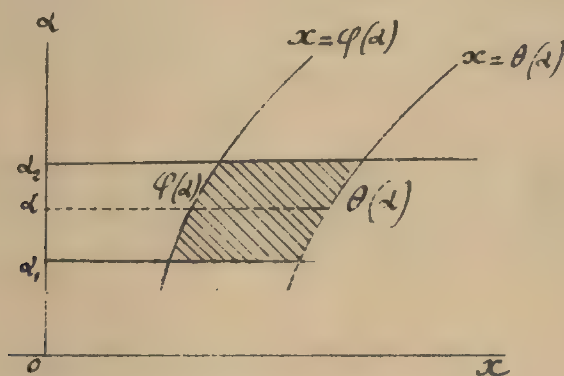
$$(4) \qquad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \left\{ \int_{\varphi(\alpha)}^{\theta(\alpha)} f(x,\alpha)\, dx \right\}$$

C'est là une intégrale double prise dans un champ facile à déterminer.

En effet, α étant constant, on voit que les limites de x sont $\varphi(\alpha)$ et $\theta(\alpha)$, les valeurs extrêmes de α sont ensuite α_1 et α_2 ; si donc nous figurons, dans le plan des $x\alpha$, les courbes $x=\varphi(\alpha)$, $x=\theta(\alpha)$, l'expression (4) n'est autre chose, d'après sa forme même, que l'intégrale double :

$$\iint f(x,\alpha)\, dx\, d\alpha$$

prise dans le champ (ombré), limité par les courbes précédentes et les deux parallèles à Ox, d'ordonnées α_1 et α_2.



Donc enfin, C étant ce champ, on a

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int_{\varphi(\alpha)}^{\theta(\alpha)} f(x,\alpha)\, dx = \iint_C f(x,\alpha)\, dx\, d\alpha ;$$

l'intégrale double du second membre pouvant ensuite être calculée par une méthode quelconque.

III. — Applications.

8. — Les applications des règles de dérivation et d'intégration sous le signe $\int$ sont nombreuses ; on donnera ici comme exemples 1° l'intégration des différentielles totales ; 2° le calcul de certaines intégrales définies ; 3° la solution d'un problème posé par Abel.

Intégration des différentielles totales.

9. — Il s'agit de résoudre le problème suivant.

Problème. — Etant donnée une expression de la forme $Xdx + Ydy + Zdz$, où X, Y, Z sont des fonctions de trois variables indépendantes, x, y, z, reconnaître s'il existe une fonction, u, de x, y, z, dont cette expression soit la différentielle totale, et trouver cette fonction u, si elle existe.

On a supposé, pour simplifier l'écriture, qu'il n'y avait que trois variables indépendantes ; mais l'énoncé du problème et les raisonnements qui vont suivre s'étendent sans difficulté au cas de n variables.

Si la fonction u existe, on aura, par définition :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X ; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Y ; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = Z$$

Dérivant la première de ces relations par rapport à x et la seconde par rapport à y, on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} ; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

D'où la relation de condition :

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

On trouverait de même :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial z} &= \frac{\partial Z}{\partial y} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} &= \frac{\partial X}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad (C)$$

Ainsi si la fonction u existe, les fonctions $X\,Y\,Z$ ne peuvent être arbitraires ; elles doivent satisfaire aux trois conditions (C), qui sont par suite nécessaires.

Inversement, je dis que ces conditions sont suffisantes, c'est-à-dire que si elles sont vérifiées, la fonction u existe : pour le démontrer, on va former cette fonction.

De la relation $\frac{\partial u}{\partial x} = X$, on déduit en intégrant les deux membres par rapport à x :

$$(5) \qquad u = \int_{x_0}^{x} X dx + u_1$$

x_0 étant une constante absolue, choisie à volonté, et u_1 une constante par rapport à x, c. à d. une fonction de y et de z. Celle est la forme la plus générale des fonctions u, de x, y, z, dont la dérivée, $\frac{\partial u}{\partial x}$, est X ; dans l'intégrale, y et z sont traitées comme des constantes.

Il faut maintenant déterminer u_1 de manière que $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial z}$ soient Y et Z ; exprimons d'abord que $\frac{\partial u}{\partial y} = Y$, et, à cet effet, dérivons les deux membres de (5) par rapport à y, en appliquant la règle de dérivation sous le signe $\int$. On aura :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Y = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial X}{\partial y} dx + \frac{\partial u_1}{\partial y}$$

Mais, par hypothèse (C)

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \text{ ; donc :}$$

$$Y = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Y}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u_1}{\partial y} = (Y)_{x_0}^{x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$$

Si on désigne par Y_0 ce que devient Y quand on y remplace x par x_0 ($Y_0 = Y(x_0, y, z)$) la relation précédente s'écrit :

$$Y = Y - Y_0 + \frac{\partial u_1}{\partial y}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = Y_0 ;$$

d'où, par une intégration par rapport à y :

$$u_1 = \int_{y_0}^{y} Y_0\, dy + u_2$$

y_0 étant une constante absolue, quelconque, u_2 une fonction de z, et z étant traité comme une constante dans l'intégrale.

On a ainsi pour u :

$$(6) \qquad u = \int_{x_0}^{x} X\, dx + \int_{y_0}^{y} Y_0\, dy + u_2$$

et il reste à déterminer u_2 de manière que $\frac{\partial u}{\partial z} = Z$. Pour cela, dérivons les deux membres de (6) par rapport à z ; il vient :

$$(7) \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = Z = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial X}{\partial z}\, dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Y_0}{\partial z}\, dy + \frac{\partial u_2}{\partial z}$$

Or on a, par hypothèse (C) :

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} ; \qquad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} ;$$

faisons $x = x_0$ dans la dernière relation et désignons par Z_0 ce que devient alors Z ($Z_0 = Z(x_0, y, z)$) ; cette relation s'écrit :

$$\frac{\partial Y_0}{\partial z} = \frac{\partial Z_0}{\partial y}$$

La relation (7) se met donc sous la forme :

$$Z = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Z}{\partial x}\, dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Z}{\partial y}\, dy + \frac{\partial u_2}{\partial z}$$

c'est-à-dire en désignant par Z_{00} ce que devient Z quand on y remplace x par x_0, y par y_0 [$Z_{00} = Z(x_0, y_0, z)$] :

$$Z = (Z - Z_0) + (Z_0 - Z_{00}) + \frac{\partial u_2}{\partial z}$$

ou, en réduisant

$$\frac{\partial u_2}{\partial z} = Z_{00}$$

ce qui donne :

$$u_2 = \int_{z_0}^{z} Z_{00}\, dz + C$$

z_0 et C étant des constantes absolues quelconques.

Donc enfin on obtient, pour u, l'expression :

$$u = \int_{x_0}^{x} X\,dx + \int_{y_0}^{y} Y_0\, dy + \int_{z_0}^{z} Z_{00}\, dz + \text{Const} ;$$

formule qui donne la solution du problème posé : c'est-à-dire en explicitant :

$$u = \int_{x_0}^{x} X(x,y,z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Y(x_0, y, z)\,dy + \int_{z_0}^{z} Z(x_0, y_0, z)\,dz + \text{const}$$

Dans cette formule, x_0, y_0, z_0 sont des constantes arbitraires ; y et z dans la première intégrale, z dans la seconde, sont traitées comme des constantes.

10. — Dans le cas de n variables indépendantes, les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'expression $X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \cdots + X_n\,dx_n$ soit la différentielle exacte d'une fonction u sont de même

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_K} = \frac{\partial X_K}{\partial x_i} \qquad (i, K = 1, 2, \ldots n ; \text{ et } i \gtrless K)$$

elles sont au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$; la fonction u existe alors et a pour expression

$$u = \int_{a_1}^{x_1} X_1(x_1, x_2, \ldots x_n)\,dx_1 + \int_{a_2}^{x_2} X_2(a_1, x_2, \ldots x_n)\,dx_2 + \cdots + \int_{a_n}^{x_n} X_n(a_1, a_2, \ldots x_n)\,dx_n ,$$

les a_i étant des constantes arbitraires.

11. — Dans le cas de deux variables, l'expression

$$X\,dx + Y\,dy$$

sera une différentielle exacte, du, si l'on a

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x},$$

et, en ce cas, u sera donné par la formule :

$$u = \int_{x_0}^{x} X(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Y(x_0, y)\,dy + \text{Const};$$

où l'on tâchera de choisir x_0 et y_0 de manière à simplifier les intégrations.

Exemple. — L'expression $\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$ est une différentielle exacte, comme on le vérifie de suite, et l'on a :

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \int_{y_0}^{y} \frac{x_0\,dy}{x_0^2+y^2} + \text{Const}.$$

La seconde intégrale disparaît si l'on prend $x_0 = 0$, et il reste

$$u = \int_0^x \frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \text{Const} = \text{arc tg}\,\frac{x}{y} + \text{Const}.$$

Calcul d'Intégrales définies.

12. — Soit à calculer l'intégrale[1]

$$I = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\,\frac{\sin x}{x}\,dx,$$

où α est positif. Elle ne peut s'obtenir directement, car la fonction

---

[1] Cette intégrale est finie et déterminée, car 1° la fonction à intégrer est continue entre $x=0$ et $x=\infty$; 2° en ce qui concerne la limite supérieure infinie, on peut écrire

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx,$$

la fonction $\varphi(x)$, c. à. d. $x\,e^{-\alpha x}\sin x$ ayant zéro pour limite pour x infini, puisque $\alpha > 0$. Donc.... (Cours de 1ère Année, N° 189).

primitive de $e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}$ (par rapport à x) est inconnue. Formons la dérivée de I par rapport à α : je dis que la règle de dérivation est applicable, et cela malgré la limite supérieure infinie. En effet, la fonction $e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}$ satisfait aux deux conditions (A) du N° 3, car, considérée comme fonction de α, elle est continue et déterminée, ainsi que toutes ses dérivées, pour les valeurs positives de α, quelle que soit la valeur fixe de x entre 0 et $+\infty$. Reste donc seulement la difficulté provenant de la limite supérieure infinie. Or l'intégrale :

$$\int_0^\infty f''_{\alpha^2}(x,\alpha+\theta h)\,dx\,; \quad \text{c. à. d.} \int_0^\infty x\,e^{-x(\alpha+\theta h)}\sin x\,dx$$

a une valeur finie, car on peut l'écrire :

$$\int_0^\infty \frac{\psi(x)}{x^2}\,dx,$$

la fonction $\psi(x)$ c. à. d. $x^3 \sin x\, e^{-x(\alpha+\theta h)}$ ayant zéro pour limite pour x infini, puisque $\alpha+\theta h$ est positif pour h assez petit (Cours de 1re année, N° 180, I ; voir aussi N° 189). Donc, en vertu de la Remarque du N° 4, on peut appliquer à I la règle de dérivation, ce qui donne

(1) $$\frac{dI}{d\alpha} = -\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx.$$

L'intégrale au second membre s'obtient explicitement ; intégrant en effet deux fois par parties on trouve :

$$\int_0^\infty \underbrace{e^{-\alpha x}}_{u}\underbrace{\sin x\,dx}_{dv} = -\left[e^{-\alpha x}\cos x\right]_0^\infty - \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos x\,dx$$

$$\int_0^\infty \underbrace{e^{-\alpha x}}_{u}\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} = \left[e^{-\alpha x}\sin x\right]_0^\infty + \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx$$

d'où l'on tire, en multipliant la seconde équation par $-\alpha$ et ajoutant

$$(1+\alpha^2)\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx = -\left[e^{-\alpha x}\cos x\right]_0^\infty - \alpha\left[e^{-\alpha x}\sin x\right]_0^\infty = 1$$

c'est-à-dire

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx = \frac{1}{1+\alpha^2}, \text{ et d'après (1)} \quad \frac{dI}{d\alpha} = -\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Remontons aux fonctions primitives :

$$I = - \text{Arc tg}\, \alpha + \text{Const}\,;$$

l'Arc tg étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Pour déterminer la constante, faisons $\alpha = +\infty$: I est évidemment nul, ce qui donne $+\frac{\pi}{2}$ pour la constante. Donc

$$I = \frac{\pi}{2} - \text{Arc tg}\, \alpha = \text{Arc tg} \frac{1}{\alpha}$$

Voici donc la formule finale[1] :

$$(1) \qquad \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, dx = \text{Arc tg} \frac{1}{\alpha} \qquad (\alpha > 0)$$

13 — Cette formule a été établie en supposant essentiellement α positif ; une analyse plus détaillée permettrait de voir qu'elle demeure vraie pour $\alpha = 0$. On a ainsi :

$$(2) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

utile formule, qui sert à établir la convergence de la série de Fourier.

14. — Calcul de l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$. — La fonction primitive de e^{-x^2} étant inconnue, on ne peut évaluer directement cette intégrale importante, qui se rencontre dans diverses questions d'Analyse et de Physique Mathématique. On peut la calculer en faisant usage de la règle d'intégration sous le signe $\int$. Dans l'intégrale

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2} dx\,,$$

posons $x = \alpha y$, α étant positif ; on a :

$$J = \int_0^\infty e^{-\alpha^2 y^2} \alpha\, dy\,.$$

Multiplions les deux membres par $e^{-\alpha^2} d\alpha$, et intégrons, par rapport à α, entre 0 et ∞ : J étant une constante absolue (indépendante de α), l'intégrale du premier membre sera

---

[1] De même en dérivant l'intégrale $I = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2\alpha x .\, dx$, et intégrant par parties, on trouverait

$$\frac{dI}{d\alpha} = -2I\alpha\,;$$

d'où l'on déduit $I = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\alpha^2}$ (Intégrale de Fourier).

$$J\int_0^\infty e^{-\alpha^2}d\alpha\,,\ \text{ou } J^2\,;$$

l'intégrale du second membre sera $\int_0^\infty e^{-\alpha^2}d\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha^2 y^2}\alpha\, dy$ ou, en intervertissant l'ordre des intégrations[1] :

$$\int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+y^2)}\alpha\, d\alpha\,;$$

Or l'intégrale en α se calcule de suite ; on a ainsi :

$$J^2 = \int_0^\infty dy\left[-\frac{e^{-\alpha^2(1+y^2)}}{2(1+y^2)}\right]_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\Big[\text{Arc tg}\, y\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{4}$$

Donc

$$(3) \qquad J = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$$

15. — De la formule (3) on peut en déduire une infinité d'autres par la règle de dérivation. Il suffit en effet de faire un changement de variable de manière à introduire un paramètre α, et de dériver les deux membres en α : c'est là un procédé général, application à toutes les intégrales définies dont on connaît la valeur. Posons, par exemple, dans (3) :

$$x = y\sqrt{\alpha}\,, \qquad \alpha \text{ étant } > 0\,;$$

nous obtenons :

$$\int_0^\infty e^{-\alpha y^2}dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\ \alpha^{-\frac{1}{2}} \qquad ;$$

dérivons maintenant les deux membres par rapport à α.

Je dis qu'on peut appliquer au premier membre la règle de dérivation sous le signe $\int$.

En effet, 1°) $e^{-\alpha y^2}$ est une fonction continue et déterminée de α, ainsi que ses dérivées, quelle que soit la valeur fixe de y ; 2°) l'intégrale

$$\int_0^\infty f''_{\alpha^2}(y,\alpha+\theta h)\,dy = \int_0^\infty y^4\, e^{-y^2(\alpha+\theta h)}dy$$

est finie et déterminée, α étant positif, comme le montre un

[1] Le champ d'intégration étant infini, cette interversion n'est pas nécessairement légitime ; on admettra qu'on a le droit de la faire.

raisonnement semblable à celui du N° 12, donc (N° 4) la Règle s'applique et donne :

$$\int_0^\infty y^2 e^{-\alpha y^2} dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2} \alpha^{-\frac{3}{2}},$$

et par une série de dérivations successives :

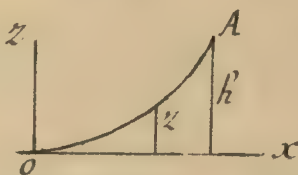
. . . .

$$\int_0^\infty y^{2n} e^{-\alpha y^2} dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot \frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2^n} \alpha^{-\frac{2n+1}{2}}$$

Problème d'Abel.

---

16. — Trouver la courbe suivant laquelle il faut laisser tomber un point matériel pesant pour qu'il parvienne en un point O (origine des coordonnées) au bout d'un temps qui soit une fonction donnée, $F(h)$, de la hauteur de chute, h.



En un point de la courbe, de hauteur z, le mobile est animé d'une vitesse égale à celle qu'il aurait s'il était tombé verticalement de la hauteur $h-z$, c'est-à-dire $\sqrt{2g(h-z)}$.

Soit $s = f(z)$ l'arc de la courbe, compté à partir de O ; on aura d'après cela :

$$-\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(h-z)}$$

ou :

$$dt = -\frac{f'(z)}{\sqrt{2g(h-z)}} dz$$

Le temps de chute, de A en O, sera :

$$T = -\int_h^0 \frac{f'(z)}{\sqrt{2g(h-z)}} dz = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{f'z}{\sqrt{h-z}} dz$$

L'équation du problème est donc :

$$(5) \qquad F(h) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{f(z)}{\sqrt{h-z}}\, dz,$$

l'inconnue étant la fonction $f(z)$ [1].

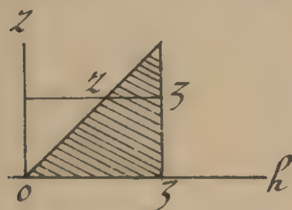
Voici l'ingénieuse solution d'Abel.

Multiplions les deux membres de (5) par $\frac{dh}{\sqrt{\zeta - h}}$, ζ étant une constante, et intégrons, par rapport à h, entre les limites 0 et ζ. Il vient :

$$(6) \qquad \int_0^\zeta \frac{F(h)\,dh}{\sqrt{\zeta-h}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\zeta \frac{dh}{\sqrt{\zeta - h}} \left\{ \int_0^h \frac{f(z)}{\sqrt{h-z}}\, dz \right\}$$

Loin de compliquer l'équation (5), comme il peut le paraître, cette nouvelle relation donne la solution immédiate du problème.

Le second membre de (6), en effet, est, par rapport aux variables de sommation h et z, une intégrale double, I, prise, dans le plan de ces variables, à l'intérieur d'un champ qu'on détermine aisément (Voir N° 7, Remarque) : la forme de l'intégrale montre que, h étant fixe, les limites de z sont 0 et h ; les valeurs extrêmes de h sont ensuite 0 et ζ. Le champ est donc le triangle formé par l'axe Oh, la bissectrice $z = h$, et la parallèle à Oz d'abscisse ζ (région ombrée).



Calculons maintenant l'intégrale double I en laissant d'abord z constant : les limites de h sont alors z et ζ, les valeurs extrêmes de z étant ensuite 0 et ζ. Donc :

$$I = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\zeta dz \int_z^\zeta \frac{f(z)\, dh}{\sqrt{h-z}\,\sqrt{\zeta-h}}$$

---

[1] Ce problème est un cas particulier du suivant : trouver une fonction $f(x,\alpha)$ assujettie ou non à certaines conditions de forme, telle que l'intégrale $\int_a^b f(x,\alpha)\,dx$ soit égale à une fonction donnée de α. Les limites a et b peuvent être des constantes ou des fonctions de α. C'est le problème inverse de celui du calcul des intégrales définies ; il n'a reçu aucune solution dans le cas général.

Dans l'intégrale par rapport à h, z est regardé comme constant, d'après la règle de calcul des intégrales doubles; par suite :

$$\int_z^{\zeta} \frac{f'(z)\,dh}{\sqrt{h-z}\sqrt{\zeta-h}} = f'(z)\int_z^{\zeta} \frac{dh}{\sqrt{h-z}\sqrt{\zeta-h}}$$

L'intégrale qui figure au second membre de cette dernière relation se calcule aisément en cherchant d'abord l'intégrale indéfinie; elle est égale à π [1] (Voir ce calcul en note). Elle est donc, c'est là le point fondamental, indépendante de z, et il reste :

$$I = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{\zeta} \pi f'(z)\,dz = \frac{\pi}{\sqrt{2g}}\left(f(\zeta) - f(0)\right)$$

Or $f(0)$ est nul, l'arc $f(z)$ étant compté à partir de l'origine; donc enfin, remplaçant I par cette valeur dans le second membre de (6) on a :

$$(7) \qquad \frac{\sqrt{2g}}{\pi}\int_0^{\zeta} \frac{F(h)}{\sqrt{\zeta-h}}\,dh = f(\zeta),$$

ce qui donne l'expression cherchée de la fonction inconnue $f(\zeta)$, sous forme d'une intégrale définie, dépendant du paramètre ζ.

Connaissant ainsi $f(z)$, c'est-à-dire l'expression de l'arc, s, de la courbe en fonction de l'ordonnée, z, on écrira, pour trouver l'équation de cette courbe en x et z :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = f'(z)\,dz\,;$$

d'où, en séparant les variables x et z :

$$dz\sqrt{f'^2(z) - 1} = dx\,,$$

---

(1) Dans l'intégrale $\int_z^{\zeta} \frac{dh}{\sqrt{(h-z)(\zeta-h)}}$, où z et ζ sont des constantes, posons, suivant la méthode du Cours de 1ère année (N° 134, 1°)

$\frac{h-z}{\zeta-h} = u^2$; . . . . . . ce qui donne $h = \frac{z+\zeta u^2}{1+u^2}$; $dh = \frac{\zeta - z}{(1+u^2)^2}\,2u\,du$

et par suite :

$$\int_z^{\zeta} \frac{dh}{\sqrt{(h-z)(\zeta-h)}} = \int_z^{\zeta} \frac{dh}{(\zeta-h)\sqrt{\frac{h-z}{\zeta-h}}} = \int_0^{\infty} \frac{2\,du}{1+u^2} = \left[2\,\mathrm{Arc\,tg}\,u\right]_0^{\infty} = \pi\,.$$

et en intégrant

(8) $$x = \int \sqrt{f'^2(z) - 1}\, dz + \text{Const.}$$

on déterminera la constante de manière que $z = 0$ pour $x = 0$; et on aura ainsi, par (8), l'équation cartésienne de la courbe cherchée.

17. – Courbe tautochrone. – Comme application, cherchons la courbe (dite tautochrone) pour laquelle le temps de chute est indépendant de la hauteur de chute h; il faut faire

$$F(h) = t_0,$$

ce qui donne dans (7)

$$f(\zeta) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \int_0^{\zeta} t_0 \frac{dh}{\sqrt{\zeta - h}} = 2\frac{\sqrt{2g}}{\pi} t_0 \sqrt{\zeta}$$

Donc l'arc, $s = f(z)$, est proportionnel à la racine carrée de l'ordonnée z; posons pour simplifier $s = \sqrt{8az}$; on a alors $f'(z) = \sqrt{\frac{2a}{z}}$, et l'équation (8) de la courbe est ici :

$$x = \int \sqrt{\frac{2a - z}{z}}\, dz + \text{Const.}$$

L'intégrale indéfinie au second membre s'obtiendrait aisément (cours de 1[ère] année, N° 130) par le changement de variable $\frac{2a-z}{z} = u^2$; il sera plus simple d'opérer autrement. Posons

$$z = a(1 - \cos t); \qquad dz = a \sin t\, dt;$$

il vient

$$x = a \int \sqrt{\frac{a(1+\cos t)}{a(1-\cos t)}}\, \sin t\, dt + \text{const.}$$

$$= a \int (1 + \cos t)\, dt + \text{const} = a(t + \sin t)$$

La constante est nulle, car pour $z = 0$, c. à. d. $t = 0$, x doit être nul. Les équations paramétriques de la courbe sont donc :

$$x = a(t + \sin t)$$
$$z = a(1 - \cos t)$$

C'est une cycloïde (symétrique par rapport à Ox de la développée de la cycloïde étudiée dans le cours de 1ère année, p. 260).

18. – Remarque finale. – La dérivation sous les signes $\iint$, $\iiint$ ....., se fait comme sous le signe $\int$, en vertu de la même démonstration. Ainsi :

$$\frac{d}{d\alpha}\iint_C f(x,y,\alpha)\,dx\,dy = \iint_C \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx\,dy\,,$$

le champ C étant supposé indépendant du paramètre α. Cette règle s'appliquera, par exemple, avec sécurité, entre les limites α_1 et α_2 de α, si $f(x,y,\alpha)$ et $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ sont des fonctions continues de α, et si $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$ est finie et déterminée, pour toutes les valeurs de α comprises entre α_1 et α_2, quelles que soient les valeurs fixes de x, y comprises dans le champ C supposé fini.

De même, si C ne dépend pas de α :

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \left\{ \iint_C f(x,y,\alpha)\,dx\,dy \right\} = \iint_C dx\,dy \left\{ \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,y,\alpha)\,d\alpha \right\}$$

Chapitre II.

Fonctions Eulériennes.

19. — Les fonctions Eulériennes sont un exemple intéressant de fonctions représentées par des intégrales définies ; elles jouent un rôle important en Analyse et en Physique.

On nomme fonction Eulérienne de seconde espèce et on désigne par $\Gamma(\alpha)$ la fonction de α :

(1) $$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx$$

L'intégrale n'a une valeur finie et déterminée (Cours de 1ère année, No 189) que si α est positif ; elle définit donc, dans ce cas, une fonction de α, laquelle est toujours positive, puisque tous les éléments de l'intégrale sont positifs.

Pour α nul, $\Gamma(\alpha)$ est infini. Voici, pour cette fonction, les

Propriétés principales.

20. — Théorème. — On a

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$$

En effet, en intégrant par parties

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty \underbrace{x^\alpha}_{u} \cdot \underbrace{e^{-x}\,dx}_{dv} = \Big[-e^{-x} x^\alpha\Big]_0^\infty + \alpha \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx$$

Le terme tout intégré s'annule aux deux limites, (puisque $\alpha > 0$) et la seconde intégrale est $\alpha\,\Gamma(\alpha)$. C. q. f. d.

Corollaire. — Si α est entier, on aura

$$\Gamma(\alpha+1) = 1.2.3 \ldots . \alpha .$$

En effet on a :

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha) = \alpha(\alpha-1)\,\Gamma(\alpha-1) = \ldots = \alpha(\alpha-1)\ldots 2.1.\,\Gamma(1)$$

Mais

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1 ,$$

ce qui établit le corollaire.

L'importance de la fonction Γ vient de cette relation avec les factorielles.

Le théorème précédent permet de calculer $\Gamma(\alpha)$, pour une valeur quelconque de α, lorsqu'on connaît la fonction pour toutes les valeurs de α comprises entre 0 et 1 ; nous verrons plus bas qu'il suffit même de connaître Γ pour les valeurs comprises entre 0 et $\frac{1}{2}$.

21 _ Produit de deux fonctions Γ. _ Dans l'intégrale

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx ,$$

posons $x = y^2$; elle devient :

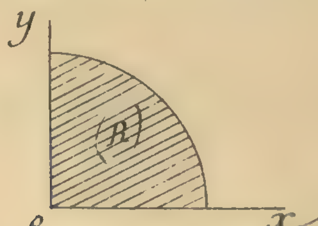
$$\Gamma(\alpha) = 2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2\alpha-1}dy \tag{2}$$

De même

$$\Gamma(\beta) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2\beta-1}dx ; \qquad d'où :$$

$$\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta) = 4\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2\alpha-1}dy\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2\beta-1}dx = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}y^{2\alpha-1}x^{2\beta-1}dx\,dy$$

Le dernier membre est une intégrale double étendue à tout l'angle indéfini xOy, considéré comme la limite d'une rectangle dont deux côtés sont Ox et Oy, et dont les deux autres s'éloignent à l'infini ; calculons-la d'une autre manière, en prenant pour champ un quart de cercle de centre O, dont nous ferons croître indéfiniment le rayon[1]. On a alors en passant aux coordonnées polaires, et posant



$$\begin{cases} x = \rho\cos\omega \\ y = \rho\sin\omega \end{cases}$$

[1] Ce mode d'opérer est justifié par ce fait que l'intégrale double n'a que des éléments positifs. Voir à ce sujet le cours de 1ère année, Nos 224 bis et 226.

$$4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}y^{2\alpha-1}x^{2\beta-1}dx\,dy = 4\iint_R e^{-\rho^2}\rho^{2\alpha+2\beta-2}[\cos\omega]^{2\beta-1}[\sin\omega]^{2\alpha-1}\rho\,d\rho\,d\omega$$

ce qui s'écrit, en séparant les termes en ρ et en ω :

$$\int_0^\infty 2e^{-\rho^2}\rho^{2\alpha+2\beta-1}d\rho \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^{2\alpha-1}\omega.\cos^{2\beta-1}\omega.\,d\omega$$

On a là le produit de deux intégrales simples, dont la première, d'après (2), est $\Gamma(\alpha+\beta)$; la seconde est une intégrale nouvelle, fonction de α et de β, qu'on désigne par le symbole $B(\alpha,\beta)$, et qu'on nomme intégrale Eulérienne de première espèce. Donc enfin, on a la formule

$$(3) \qquad \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)$$

22. — La fonction Eulérienne de première espèce, qui est ainsi ramenée à celles de seconde, peut recevoir d'autres formes. Dans l'intégrale $B(\alpha,\beta)$, ou :

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\omega)^{2\alpha-1}(\cos\omega)^{2\beta-1}d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin^2\omega\right]^{\alpha-1}\left[\cos^2\omega\right]^{\beta-1}.2\sin\omega\cos\omega\,d\omega,$$

posons

$\sin^2\omega = x$; . . . . il vient :

$$(4) \qquad B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

La formule (3) montre d'ailleurs que $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$, ce qu'on vérifierait directement sur la forme (4) en posant $1-x=y$.

23. — Voici une troisième forme de $B(\alpha,\beta)$. Posons, dans (4),

$$x = \frac{1}{1+y}$$

on trouve :

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{y^{\beta-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}dy.$$

Si dans cette formule on suppose $\alpha+\beta=1$, il vient

$$B(1-\beta,\beta) = \int_0^\infty \frac{y^{\beta-1}}{1+y}dy\ ;$$

et par suite, d'après (3), en se rappelant que $\Gamma(1)=1$:

$$\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)=\int_0^\infty \frac{y^{\beta-1}}{1+y}dy$$

Nous verrons plus tard que l'intégrale du second membre est égale à $\frac{\pi}{\sin\beta\pi}$; on aura donc :

(5) $$\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\beta)=\frac{\pi}{\sin\beta\pi},$$

formule qui permet de calculer Γ pour les valeurs de la variable comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1, quand on l'aura calculé pour les valeurs comprises entre 0 et $\frac{1}{2}$. Cette formule suppose naturellement $0<\beta<1$, puisque $\Gamma(\alpha)$ n'a été défini que pour des valeurs positives de α.

24.– Calcul de $\Gamma(\frac{1}{2})$.– Si dans la formule (3) on fait $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, il vient

$$\Gamma^2\left(\tfrac{1}{2}\right)=B\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\omega=\pi$$

Donc

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

Si maintenant on fait $\alpha=\frac{1}{2}$ dans la formule (2), on trouve $\Gamma(\frac{1}{2})=2\int_0^\infty e^{-y^2}dy$; donc :

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}=\int_0^\infty e^{-y^2}dy,$$

formule obtenue autrement au N° 13.

Tables. — Il existe des tables donnant les valeurs de $\Gamma(\alpha)$, ces tables permettent aussi, d'après (3), de calculer $B(\alpha,\beta)$.

Valeur approchée de $\Gamma(n)$ pour n très grand.

25. — La relation de $\Gamma(n)$ avec les factorielles montre que, pour des valeurs entières de n, $\Gamma(n)$ croît avec n et croît même très rapidement. Legendre a d'ailleurs montré que $\Gamma(x)$, qui est infini pour $x=0$, commence par décroître, passe par un minimum pour une valeur de x comprise entre 1 et 2, et croît ensuite indéfiniment avec x.

Il y a intérêt, dans plusieurs questions, à connaître l'ordre

de grandeur, par rapport à n, de $\Gamma(n+1)$ ou de la factorielle $1.2\ldots n$; voici la marche à suivre pour arriver au résultat désiré.

26. — On a, par définition

$$(6) \qquad \Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^n \, dx ;$$

la fonction sous le signe $\int$, $e^{-x} x^n$, va de 0 à 0 quand x va de 0 à ∞, si on suppose $n > 0$; elle passe, comme on le voit en prenant la dérivée $\left[y' = (n-x) e^{-x} x^{n-1} \right]$ par un et un seul maximum pour $x = n$; ce maximum est $n^n e^{-n}$. Faisons alors, dans l'intégrale de définition (6), le changement de variable

$$(7) \qquad x^n e^{-x} = n^n e^{-n} e^{-t^2} \ldots\ldots (t = \text{nouvelle variable d'intégration}).$$

Quand x va de 0 à n, puis de n à $+\infty$, t^2 est réel et positif et va de $+\infty$ à 0, puis de 0 à $+\infty$: quant à t, on peut se donner arbitrairement son signe, puisqu'il n'est assujetti qu'à vérifier (7) : prenons alors t négatif pour x compris entre 0 et n, et positif pour x compris entre n et $+\infty$, t ira ainsi de $-\infty$ à $+\infty$.

Calculons maintenant dx ; pour simplifier, posons

$$x = n + u$$

et cherchons $du = dx$. à cet effet prenons les log des deux membres de (7) :

$$(8) \qquad n \log(n+u) - n - u = n \log n - n - t^2 ;$$

en différentiant :

$$du \left[\frac{n}{n+u} - 1 \right] = -2t\,dt$$

d'où

$$du = \frac{2t(u+n)}{u} dt$$

Portons cette valeur, et la valeur (7) de $x^n e^{-x}$, dans $\Gamma(n+1)$, c'est-à-dire dans (6) :

$$(9) \qquad \Gamma(n+1) = 2 n^n e^{-n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \left[t + \frac{nt}{u} \right] dt$$

Le changement de variable n'est pas terminé, puisque u reste sous le signe $\int$; il faudrait le tirer de (8) en fonction de t, ce qui n'est pas possible explicitement : on se bornera dès lors à une approximation.

Remplaçons, dans (8), $\log(n+u)$ par son développement de Taylor réduit aux deux premiers termes et au reste ; il vient :

$$n\left[\log n + \frac{u}{n} - \frac{u^2}{2}\frac{1}{(n+\theta u)^2}\right] - u = n\log n - t^2 \;;$$

et après réductions :

$$(10) \qquad \frac{nu^2}{2(n+\theta u)^2} = t^2 \;; \qquad \text{d'où } \frac{u}{n+\theta u} = t\sqrt{\frac{2}{n}} \qquad (0<\theta<1)$$

Il faut prendre le signe + devant le radical ; car : 1° u et t sont de même signe, puisque $u = x - n$ est négatif, comme t, pour $0<x<n$, et positif, comme t, pour $n<x<\infty$; 2° $n+\theta u$ est toujours positif, puisque la plus petite valeur de $u\,(=x-n)$ est $-n$ et que $0<\theta<1$.

Tirons alors $\frac{1}{u}$ de (10) en fonction de t et de la quantité inconnue (fonction de u et de n) θ :

$$\frac{1}{u} = \frac{1 - t\theta\sqrt{\frac{2}{n}}}{nt\sqrt{\frac{2}{n}}} = \frac{1}{nt}\left[\sqrt{\frac{n}{2}} - t\theta\right]$$

et portons dans l'expression (9) de $\Gamma(n+1)$:

$$\Gamma(n+1) = 2n^n e^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\left[t + \sqrt{\frac{n}{2}} - t\theta\right]dt \ldots\ldots \text{ce qui se décompose :}$$

$$= 2n^n e^{-n}\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}t(1-\theta)\,dt\right]$$

au second membre, la première intégrale est double de $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$, car e^{-t^2} est une fonction paire (cours de 1ère Année ; N° 169, 5°) ; elle est donc égale à $\sqrt{\pi}$; d'où :

$$\Gamma(n+1) = \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left[1 + \frac{2}{\sqrt{2n\pi}}\,J\right]$$

en posant

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t(1-\theta)\,dt,$$

où θ est une fonction inconnue de t (puisque de u), qu'on sait seulement rester comprise entre 0 et 1. Je dis que J est compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$.

En effet, décomposons J en deux intégrales $\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{+\infty}$; la seconde est positive puisque tous ses éléments sont positifs et on a :

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} t(1-\theta)\,dt < \int_0^{\infty} e^{-t^2} t\,dt = -\frac{1}{2}\left[e^{-t^2}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

De même on verrait que l'intégrale $\int_{-\infty}^{0}$, qui est négative puisque tous ses éléments sont négatifs, est, en valeur absolue inférieure à $\frac{1}{2}$; donc J est bien compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, et peut s'écrire $J = \frac{K}{2}$, avec $-1 < K < 1$. Donc :

$$\Gamma(n+1) = \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left[1 + \frac{K}{\sqrt{2n\pi}}\right] \cdots\cdots\cdots (-1 < K < 1) \tag{11}$$

Dès que n est assez grand le terme $\frac{K}{\sqrt{2n\pi}}$ est, en valeur absolue, très inférieur à 1, et on a sensiblement

$$\Gamma(n+1) = \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{12}$$

C'est la formule approximative cherchée; elle donne l'ordre de grandeur, en n, du produit $1.2.3....n$ quand n grandit indéfiniment.

27.– Remarque. – Il importe d'observer que l'erreur absolue de la formule (12) peut être considérable; car elle a pour expression, d'après (11), $K\left(\frac{n}{e}\right)^n$, quantité qui peut devenir infinie avec n; mais l'erreur relative, $\frac{K}{\sqrt{2n\pi}}$ sera toujours très petite et de module inférieur à $\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$.

Une étude plus complète montrerait que le terme $\frac{K}{\sqrt{2n\pi}}$,

développé suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{n}$ a pour expression :

$$\frac{K}{\sqrt{2n\pi}} = \frac{1}{12n} + \cdots$$

ce qui montre que l'erreur absolue grandit indéfiniment avec n.

Sur les logarithmes, l'erreur absolue est infiniment petite : car

$$\log\Gamma(n+1) = \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \log\left(1+\frac{K}{\sqrt{2n\pi}}\right)$$

et le dernier terme est infiniment petit, car si on le développe, le terme principal est $\frac{K}{\sqrt{2n\pi}}$, et tend vers zéro pour n infini. Donc, avec une erreur absolue infiniment petite

$$(13) \qquad \log\Gamma(n+1) = \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n$$

Applications des fonctions Γ.

28. – Les fonctions Γ servent surtout à donner l'expression exacte ou approchée des factorielles et jouent à ce titre un rôle utile dans le calcul des probabilités (Théorème de Bernoulli).

En Analyse elles ont offert un exemple important de fonctions représentées par des intégrales définies, et ont attiré l'attention d'Euler, Legendre, Gauss, Cauchy, Weierstrass, etc qui en ont donné de nombreuses propriétés. Nous nous bornerons à dire qu'on a étendu la définition de la fonction $\Gamma(\alpha)$ au cas où α est négatif et même imaginaire, et nous signalerons la formule simple :

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}\left[\log\Gamma(\alpha)\right] = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{(\alpha+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(\alpha+n)^2} + \cdots$$

d'où l'on déduit aisément l'expression de $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}$ sous forme de produit infini :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} = e^{c\alpha}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)e^{-\frac{\alpha}{n}}\right]$$

c étant la constante dite d'Euler ($c = 0{,}577215664\ldots$)

29. — Enfin les fonctions B et Γ permettent d'exprimer des intégrales définies qui se rencontrent fréquemment dans les applications; voici deux exemples.

30. — Soit à calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 x^{m-1}(1-x^p)^{n-1}\,dx,$$

qui est évidemment finie et déterminée si $m>0$; $n>0$; $p>0$.

Posons $x^p = y$ ou : $x = y^{\frac{1}{p}}$; on a :

$$I = \frac{1}{p}\int_0^1 y^{\frac{m}{p}-1}(1-y)^{n-1}\,dy = \frac{1}{p}\,B\left(\frac{m}{p}, n\right)$$

$$= \frac{1}{p}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right)\Gamma(n)}{\Gamma\left(\frac{m}{p}+n\right)}$$

Par exemple :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

31. — Intégrale de Dirichlet. — Soit à calculer l'intégrale multiple

$$J = \iiint x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^{\gamma-1}\,dx\,dy\,dz \qquad (\alpha, \beta, \gamma \text{ positifs})$$

dans le champ limité par le trièdre positif des axes de coordonnées et par la surface [1]

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^p = 1 \qquad (m, n, p \text{ positifs})$$

Faisons un changement de variables en posant

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m = \xi\,; \quad \left(\frac{y}{b}\right)^n = \eta\,; \quad \left(\frac{z}{c}\right)^p = \zeta\,;$$

---

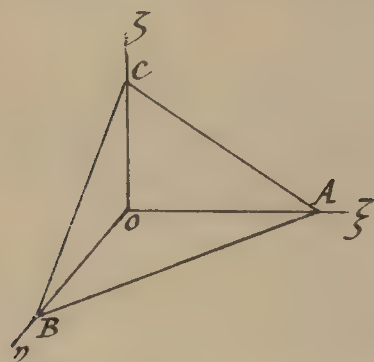
[1] Cette intégrale triple donne, comme cas particuliers, le volume et les moments d'inertie du champ par rapport aux axes de coordonnées :

$$\iiint dx\,dy\,dz \quad \text{et} \quad \iiint x^2\,dx\,dy\,dz + \iiint y^2\,dx\,dy\,dz$$

On a

$$J = \frac{a^\alpha b^\alpha c^\gamma}{m\,n\,p} \iiint \xi^{\frac{\alpha}{m}-1} \eta^{\frac{\beta}{n}-1} \zeta^{\frac{\gamma}{p}-1} d\xi . d\eta . d\zeta$$

le champ étant le tétraèdre OABC limité par le trièdre positif des axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ et par le plan



$$\xi + \eta + \zeta = 1$$

Commençons l'intégration par rapport à ζ; ξ et η étant fixes, les limites de ζ sont 0 et $1-\xi-\eta$; et on a[1]:

$$\iiint \xi^{\frac{\alpha}{m}-1} \eta^{\frac{\beta}{n}-1} \zeta^{\frac{\gamma}{p}-1} d\xi\, d\eta\, d\zeta = \iint \xi^{\frac{\alpha}{m}-1} \eta^{\frac{\beta}{n}-1} d\xi\, d\eta \left\{ \int_0^{1-\xi-\eta} \zeta^{\frac{\gamma}{p}-1} d\zeta \right\}$$

$$= \iint \xi^{\frac{\alpha}{m}-1} \eta^{\frac{\beta}{n}-1} \frac{p}{\gamma} (1-\xi-\eta)^{\frac{\gamma}{p}} d\xi\, d\eta$$

l'intégrale double ayant pour champ l'intérieur du triangle OAB. Elle s'écrit donc :

$$\frac{p}{\gamma} \int_0^1 \xi^{\frac{\alpha}{m}-1} d\xi \left\{ \int_0^{1-\xi} \eta^{\frac{\beta}{n}-1} (1-\xi-\eta)^{\frac{\gamma}{p}} d\eta \right\}$$

Dans l'intégrale (entre crochets) par rapport à η, où ξ est regardé comme constant, posons

$$\eta = u(1-\xi) \,; \text{ d'où : } d\eta = du\,(1-\xi)$$

l'expression totale devient :

$$\frac{p}{\gamma} \int_0^1 \xi^{\frac{\alpha}{m}-1} d\xi \left\{ \int_0^1 u^{\frac{\beta}{n}-1} (1-u)^{\frac{\gamma}{p}} (1-\xi)^{\frac{\beta}{n}+\frac{\gamma}{p}} \right\}$$

c'est-à-dire

$$\frac{p}{\gamma} \int_0^1 \xi^{\frac{\alpha}{m}-1} (1-\xi)^{\frac{\beta}{n}+\frac{\gamma}{p}} d\xi \int_0^1 u^{\frac{\beta}{n}-1} (1-u)^{\frac{\gamma}{p}} du = \frac{p}{\gamma}\, B\left(\frac{\alpha}{m}, \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{p} + 1\right) B\left(\frac{\beta}{n}, \frac{\gamma}{p} + 1\right)$$

Donc enfin, en remplaçant les B par leurs expressions à l'aide des Γ:

$$J = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{m\,n\,p} \frac{p}{\gamma} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{m}\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{p} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{n}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma}{p} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{p} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{p} + 1\right)}$$

---

(1) Voir un calcul analogue dans le cours de 1ère année, N°. 212, Volume du tétraèdre trirectangle.

d'où en réduisant, et observant que

$$\Gamma\left(\frac{\gamma}{p}+1\right)=\frac{\gamma}{p}\,\Gamma\left(\frac{\gamma}{p}\right)$$

$$J=\frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{mnp}\;\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{m}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{n}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}+\frac{\gamma}{p}+1\right)}$$

Par exemple, le volume du huitième de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ s'obtient en faisant dans cette formule :

$$m=n=p=2\,; \qquad \alpha=\beta=\gamma=1,$$

ce qui donne :

$$J=\frac{abc}{8}\;\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}$$

Or $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$;

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

donc

$$J=\pi\,\frac{abc}{6}$$

ce qui donne $\frac{4}{3}\pi abc$ pour le volume total, résultat connu.

Théorème de Bernoulli.

32. — C'est une application de la formule approchée de $\Gamma(n+1)$ au calcul des probabilités.

Donnons d'abord quelques définitions.

Quand une même cause peut produire des événements différents, A, B, ... on appelle probabilité de l'événement A, par exemple, le rapport du nombre des cas où A se produit au nombre total des cas possibles. par exemple, la probabilité d'amener un as, en prenant une carte au hasard dans un jeu ordinaire de 32 cartes, est $\frac{4}{32}$; celle d'amener un as donné est $\frac{1}{32}$; etc...

Dans les raisonnements qui vont suivre, nous supposerons que la cause ne peut produire que deux événements différents et

produit nécessairement l'un d'eux : tel est le cas, par exemple, d'une urne contenant R boules rouges et J boules jaunes ; la probabilité d'amener une rouge est $\frac{R}{R+J}$; une jaune $\frac{J}{R+J}$. Nous poserons

$$r = \frac{R}{R+J} \; ; \qquad j = \frac{J}{R+J} .$$

On a

$$r + j = 1$$

La probabilité 1 est une certitude ; la probabilité 0 est la certitude de l'événement contraire.

On démontrera dans le cours d'Astronomie le théorème suivant.

Appelons épreuve l'opération qui consiste à extraire une boule au hasard de l'urne et à l'y replacer ensuite ; si on fait N épreuves, la probabilité d'amener exactement ρ boules rouges sur ces N épreuves est donnée par le terme en $r^\rho j^{N-\rho}$ du développement de $(r+j)^N$, c. à. d par le terme :

$$T_\rho = \frac{N!}{\rho!\,(N-\rho)!}\, r^\rho j^{N-\rho} = r^\rho j^{N-\rho} \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(\rho+1)\,\Gamma(N-\rho+1)} ,$$

D'après cela, la probabilité d'amener un nombre de boules rouges au moins égal à h et au plus égal à ρ est $T_h + T_{h+1} + T_{h+2} + \cdots + T_\rho$.

33. – Cela posé, voici l'idée du théorème de Bernoulli. Si on fait un nombre considérable d'épreuves, N, on amènera N_r boules rouges et N_j jaunes $(N_r + N_j = N)$: on conçoit instinctivement que si N augmente indéfiniment, le rapport $\frac{N_r}{N_j}$ tendra vers $\frac{R}{J}$ (ou $\frac{r}{j}$), car la multiplication des épreuves doit entraîner une sorte de correction du hasard. Sous une autre forme le rapport $\frac{N_r}{N_r + N_j}$, ou $\frac{N_r}{N}$, tendra vers $\frac{r}{r+j}$, ou r. C'est en cela que consiste le théorème de Bernoulli, qu'on va établir rigoureusement et dont l'énoncé plus complet est le suivant.

Théorème de Bernoulli. — Soit une épreuve, produisant des évènements R, J, avec les probabilités respectives r, j : si on augmente indéfiniment le nombre des épreuves, le rapport du nombre, N_r, du cas amenant l'évènement R, au nombre total, N des épreuves, tendra vers la probabilité r, de cet évènement ; de plus la différence $N_r - rN$ ne sera pas, en valeur absolue, d'ordre supérieur à $\sqrt{N}$.

34. — Reprenons, pour préciser le langage, le cas de l'urne considérée plus haut.

D'après le théorème de Bernoulli, quand N tend vers ∞, le nombre des boules rouges amenées aurait pour valeur principale rN : nous allons chercher la probabilité P_X, pour que ce nombre de boules rouges sont compris entre[1] $rN - X$ (inclus) et $rN + X$ (exclus), X étant un entier arbitraire, qu'on peut prendre constant ou fonction de N, mais, en ce dernier cas, de manière que X soit d'ordre inférieur à $N^{\frac{2}{3}}$, c. à. d que $\frac{X}{N^{\frac{2}{3}}}$ ait pour limite 0 pour N infini.

La probabilité considérée, P_X, est, d'après ce qui précède (N° 32)

$$P_X = T_{rN-X} + T_{rN-X+1} + \ldots\ldots + T_{rN+X-1} = \sum_{\lambda=-X}^{\lambda=+X-1} T_{rN+\lambda}$$

λ allant de $-X$ à $+X-1$ par valeurs entières.

Or on sait (N° 32) que :

$$T_{rN+\lambda} = r^{rN+\lambda} j^{N(1-r)-\lambda} \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(rN+\lambda+1)\Gamma\big((1-r)N-\lambda+1\big)}$$

Dans les trois Γ ci-dessus (en faisant $1-r=j$) les arguments : $N+1$; $rN+\lambda+1$; $jN-\lambda+1$, augmentent indéfiniment avec N : car r et $j > 0$, et λ, qui varie de $-X$ à $X-1$ est d'ordre inférieur à $N^{\frac{2}{3}}$, et par suite à N, d'après l'hypothèse. Remplaçons alors ces Γ par leurs valeurs principales ; il vient pour la valeur principale de $T_{rN+\lambda}$:

$$T_{rN+\lambda} = r^{rN+\lambda} j^{jN-\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{N^{N+\frac{1}{2}} e^{-N} e^{rN+\lambda} e^{jN-\lambda}}{(rN+\lambda)^{rN+\lambda+\frac{1}{2}} (jN-\lambda)^{jN-\lambda+\frac{1}{2}}}$$

---

[1] Cela suppose rN, ou $\frac{R}{R+J}N$, entier : on n'a qu'à admettre, pour rentrer dans cette hypothèse, que N tend vers l'infini en parcourant la suite des multiples de $R+J$.

les exponentielles se détruisent, et, on peut écrire, en faisant sortir des parenthèses, au dénominateur, $(rN)^{rN+\lambda+\frac{1}{2}}$ et $(jN)^{jN-\lambda+\frac{1}{2}}$:

$$T_{rN+\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{N^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}} j^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{rN}\right)^{rN+\lambda+\frac{1}{2}} \left(1-\frac{\lambda}{jN}\right)^{jN-\lambda+\frac{1}{2}}}$$

Développons les deux facteurs du dénominateur suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{N}$, en passant pour cela par les logarithmes : (Voir cours de 1ère année, n° 104) :

$$\log\left(1+\frac{\lambda}{rN}\right)^{rN+\lambda+\frac{1}{2}} = \left(rN+\lambda+\tfrac{1}{2}\right) \log\left(1+\frac{\lambda}{rN}\right)$$

$$= \left(rN+\lambda+\tfrac{1}{2}\right)\left[\frac{\lambda}{rN} - \frac{\lambda^2}{2r^2N^2} + \frac{\lambda^3}{3r^3N^3} - \cdots\right]$$

$$= \lambda + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{rN} + \cdots\cdots,$$

en négligeant les termes en $\frac{\lambda}{N}$, $\frac{\lambda^3}{N^2}$, $\frac{\lambda^4}{N^3}$, ... qui sont sûrement infiniment petits pour N infini, puisque mod $\lambda \leqq X$ et que X est d'ordre inférieur à $N^{\frac{2}{3}}$ (c'est même à cause du terme en $\frac{\lambda^3}{N^2}$ qu'on a fait cette hypothèse sur X). Remontons des log aux nombres, nous trouvons :

$$\left(1+\frac{\lambda}{rN}\right)^{rN+\lambda+\frac{1}{2}} = e^{\lambda+\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{rN}+\cdots\cdots\cdots};$$

de même en changeant λ en $-\lambda$ et r en j :

$$\left(1-\frac{\lambda}{jN}\right)^{jN-\lambda+\frac{1}{2}} = e^{-\lambda+\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{jN}+\cdots\cdots}$$

d'où :

Valeur ppale $T_{rN+\lambda} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi Nrj}}\, e^{-\frac{\lambda^2}{2N}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{j}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi rjN}}\, e^{\frac{-\lambda^2}{2rjN}}$

Telle est la valeur principale de $T_{rN+\lambda}$; on voit que c'est un infiniment petit.

Or l'intégrale $\int_{\lambda}^{\lambda+1} e^{\frac{-x^2}{2rjN}}\,dx$ est comprise (cours de 1ère année, N° 169, 3°) entre : $e^{-\frac{(\lambda+1)^2}{2rjN}}$ et $e^{-\frac{\lambda^2}{2rjN}}$

et comme le rapport de ces deux exponentielles (inférieures à 1) tend vers 1, pour N infini, l'intégrale considérée diffère infiniment peu de la seconde exponentielle, c'est-à-dire que :

$$\text{valeur principale } T_{rN+\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi rjN}} \int_{\lambda}^{\lambda+1} e^{-\frac{x^2}{2rjN}} dx$$

Donc on aura pour valeur principale de P_x :

$$P_x = \sum_{-x}^{+X-1} T_{rN+\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi rjN}} \int_{-x}^{+X} e^{-\frac{x^2}{2rjN}} dx$$

Si on fait le changement de variable $x = t\sqrt{2rjN}$, il vient

$$P_x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{-X}{\sqrt{2rjN}}}^{+\frac{X}{\sqrt{2rjN}}} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{X}{\sqrt{2rjN}}} e^{-t^2} dt$$

C'est la formule qu'on s'était proposé de trouver ; elle établit le théorème de Bernoulli. En effet :

35. – A) Si X est constant $= X_0$, la probabilité P_x tend vers zéro pour N infini, car la limite supérieure de l'intégrale devient nulle. En d'autres termes, la probabilité d'amener, sur N épreuves, un nombre de boules rouges compris entre $rN - X_0$ et $rN + X_0$ est infiniment petite, pour un nombre infini d'épreuves.

B) Si X est une fonction de N d'ordre supérieur à $\sqrt{N}$, (ce qui est possible, puisque X n'est assujetti qu'à être d'ordre inférieur à $N^{\frac{2}{3}}$) on aura $\lim \frac{X}{\sqrt{N}} = \infty$, et la probabilité P_x tendra vers

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 1,$$

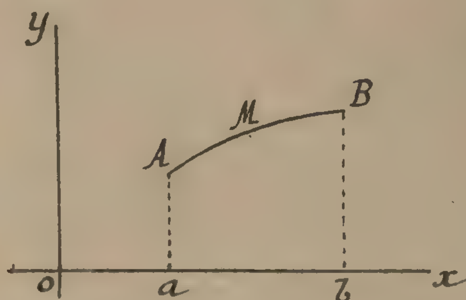
c.à.d. vers la certitude. Ce cas se présente, par exemple, pour $X = N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, ε étant une quantité positive fixe, très petite, et aussi petite qu'on veut. En d'autres termes, si on multiplie indéfiniment le nombre N des épreuves, il est certain que le nombre, N_r, des boules rouges amenées sera compris entre $rN - N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ et $rN + N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$; donc 1°) le rapport $\frac{N_r}{N}$, compris entre $r - N^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$ et $r + N^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$, tendra vers r ; 2° la différence $N_r - rN$, comprise entre $-N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, $+N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ ne sera pas d'ordre sensiblement supérieur à $\sqrt{N}$: Ces deux dernières conséquences constituent le théorème de Bernoulli.

C.q.f.d.

Chapitre III.

Intégrales curvilignes.

36. – **Définition.** – Soit y une fonction de x, définie par la relation $\varphi(x,y)=0$; l'intégrale $\int_a^b f(x,y)\,dx$ est une intégrale ordinaire, par rapport à la variable de sommation x : On dit que c'est une intégrale curviligne : pour la déterminer en effet, il faut se donner, non seulement la fonction $f(x,y)$, mais la courbe $\varphi(x,y)=0$. Figurons cette courbe ;



l'intégrale curviligne se représente souvent par le symbole

(1) $$\int_{AMB} f(x,y)\,dx\,;$$

AMB désignant l'arc de la courbe $\varphi(x,y)=0$ sur lequel reste le point x, y, entre les limites d'intégration : cette intégrale est bien déterminée si $f(x,y)$ est une fonction continue sur l'arc d'intégration.

Au lieu de x, on peut prendre y comme variable de sommation, et on définit de même $\int_{AMB} \psi(x,y)\,dy$.

Enfin, on peut considérer des intégrales curvilignes de la forme

(2) $$\int_{AMB} \left[f(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy\right]$$

Il est clair que l'on a

$$\int_{AMB} = -\int_{BMA},$$

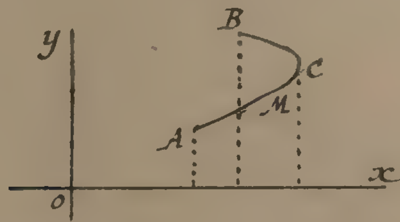
BMA étant l'arc AMB décrit en sens inverse : car dx et dy changent de signe quand on change le sens du parcours de l'arc.

On définirait de même l'intégrale

$$\int \left[f(x,y,z)\,dx + \psi(x,y,z)\,dy + \chi(x,y,z)\,dz \right]$$

prise le long d'une courbe gauche $\varphi_1(x,y,z)=0$; $\varphi_2(x,y,z)=0$.

L'intégrale curviligne (1) peut être prise le long d'un arc AMB admettant une tangente parallèle à Oy, en C ; seulement y ne désignera pas la même fonction de x sur l'arc AC et sur l'arc CB : si par exemple ACB est un arc d'ellipse, la fonction y, sur l'arc AC, correspondra à un certain signe d'un radical, et au signe contraire sur l'arc CB.



Une remarque analogue s'applique à l'intégrale (2).

D'après cela, on comprend que l'arc d'intégration puisse être un contour, c. à d. une ligne fermée et cela sans que l'intégrale soit nulle : les intégrales de cette nature jouent un rôle important en Analyse, et voici, à leur égard, une formule fondamentale, due à Riemann, qui transforme en intégrale double une intégrale simple prise suivant un contour, et réciproquement.

Formule de Riemann.

37. – Soient $M(x,y)$ et $N(x,y)$ deux fonctions de deux variables indépendantes x, y ; considérons l'intégrale double

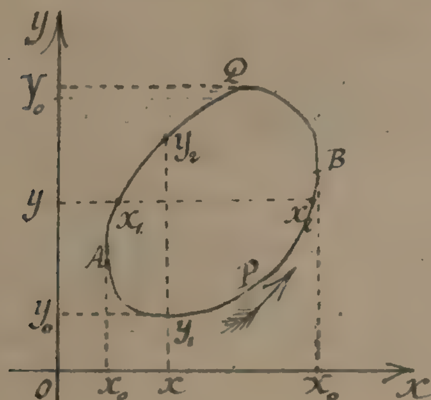
$$\iint \left(-\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx\, dy$$

prise à l'intérieur d'une aire C, dans laquelle on suppose $\frac{\partial M}{\partial y}$ et $\frac{\partial N}{\partial x}$ bien déterminées et continues.

On a d'abord, en calculant l'intégrale double comme d'ordinaire :

$$-\iint_C \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{x_0}^{X_0} dx \left\{ \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial M}{\partial y}\,dy \right\} =$$

$$= -\int_{x_0}^{X_0} dx \left[M(x,y_2) - M(x,y_1) \right]$$



L'intégrale simple à laquelle se ramène ainsi l'intégrale double considérée est la somme de deux

intégrales curvilignes (N°36), à savoir :

$$-\int_{AQB} M(x,y)\,dx \text{ et } +\int_{APB} M(x,y)\,dx\,;$$

or,

$$-\int_{AQB} = \int_{BQA}\text{, et par suite}$$

$$-\iint_C \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{BQAPB} M(x,y)\,dx$$

L'intégrale du second membre est une intégrale curviligne, prise le long du contour γ, qui limite le champ C, ce contour étant décrit dans le sens positif.[1]

De même on trouverait, en écrivant

$$\iint_C \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{y_0}^{Y_0} dy \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,:$$

$$\iint_C \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy = \int_\gamma N(x,y)\,dy\,,$$

le contour γ étant encore décrit dans le sens positif.

On obtient ainsi la formule de Riemann.

$$\iint_C \left(-\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial x}\right) dx\,dy = \int_\gamma (M\,dx + N\,dy),$$

qui transforme une intégrale double en intégrale curviligne, et inversement.

38. – On a implicitement admis, dans la démonstration, que le contour γ n'est coupé qu'en deux points, au plus, par toute parallèle aux axes Ox et Oy. Dans le cas d'une courbe, comme celle de la figure ci-dessous, coupée en plus de deux points par des parallèles à Oy, on divise le champ C en champ partiels, C_1, C_2, … jouissant de la propriété énoncée. Ici, il suffit de tracer la droite AB, qui joint les points de contact de deux tangentes parallèles à Oy, et l'on a, par ce qui précède :

---

(1) Le sens positif est celui dans lequel il faut faire tourner Ox pour l'amener à coïncider avec Oy par une rotation de 90 degrés autour de l'origine. Ce sera le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre si les axes sont orientés comme dans la figure ci-dessus, ce que nous supposerons toujours.

$$\iint_{C_1}\left(-\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial M}{\partial x}\right)dx\,dy=\int_{ABQA}(M\,dx+N\,dy)$$

$$\iint_{C_2}\left(\qquad\right)\qquad=\int_{APBA}\left(\qquad\right).$$

d'où en ajoutant :

$$\iint_C=\int_{APBA+ABQA}=\int_\gamma$$

car les intégrales $\int_{BA}$ et $\int_{AB}$ se détruisent (N° 36). La formule est donc vraie pour un contour fermé quelconque.

39. – Corollaire I. – On déduira plus loin de la formule de Riemann, le théorème fondamental de Cauchy sur les intégrales des fonctions d'une variable imaginaire ; deux autres corollaires, qu'on va exposer, ont une grande importance en physique (Thermodynamique en particulier.

Si l'expression $M\,dx+N\,dy$ est une différentielle exacte, on sait que l'on a réciproquement $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ et réciproquement (N° 11). En ce cas l'intégrale

$$\iint_C\left(-\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx\,dy$$

est nulle, quelque soit le champ C ; et, d'après la formule de Riemann, il en est de même de l'intégrale $\int_\gamma(M\,dx+N\,dy)$ quel que soit le contour γ.

Inversement, si $\int_\gamma$ est nul quel que soit γ, $\iint_C$ l'est également d'après Riemann ; en particulier, lorsque C est un rectangle, de côtés dx et dy, parallèles aux axes, l'intégrale double se réduit au terme $\left(-\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx\,dy$, qui n'est nul, en tout point x, y, que si l'on a identiquement $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{dx}$.

Donc :

Si l'intégrale $\int(M\,dx+N\,dy)$ est nulle le long d'un contour fermé quelconque, l'expression $M\,dx+N\,dy$ est une différentielle exacte (et réciproquement).

40.– Corollaire II. – Cette proposition s'étend sans difficulté au cas de trois variables.

Supposons que l'intégrale $\int(M\,dx + N\,dy + P\,dz)$, où M, N, P sont des fonctions de x, y, z, soit nulle le long d'un contour, gauche ou plan, quelconque de l'espace : elle sera nulle en particulier le long de tout contour, γ, tracé dans le plan $z = z_0$; comme elle se réduit alors à

$$\int_\gamma M(x,y,z_0)\,dx + N(x,y,z_0)\,dy$$

on aura, d'après le corollaire précédent : $\frac{\partial M(x,y,z_0)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y,z_0)}{\partial x}$, ou, puisque z_0 est arbitraire :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{.......... identiquement (quels que soient } x,y,z)$$

De même $$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \qquad \text{id}$$

$$\frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y} \qquad \text{id}$$

ce qui établit (N° 9) que $M\,dx + N\,dy + P\,dz$ est une différentielle exacte.

41– Remarque. – Il importe de préciser les conditions dans lesquelles la formule de Riemann est rigoureusement établie. On a supposé essentiellement que l'intégrale double avait un sens, c'est-à-dire que $\frac{\partial M}{\partial y}$ et $\frac{\partial N}{\partial x}$ étaient des fonctions bien déterminées et continues de x et y à l'intérieur et sur le contour de l'aire C ; on a également admis que les intégrales $\int M\,dx$ et $\int N\,dy$ avaient un sens, c. à. d. que les fonctions M et N sont déterminées et continues sur le contour.

En particulier la formule est applicable si toutes les fonctions $M, N, \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$ sont bien déterminées et continues à l'intérieur et sur le contour de l'aire.

Deuxième Partie.

Chapitre I.

Théorie des fonctions d'une variable imaginaire.

I. Généralités.

Avant-propos. — La deuxième partie du Cours a pour objet la théorie des fonctions d'une variable imaginaire et celle des fonctions elliptiques, qui en est une application directe.

Il n'est pas besoin de rappeler ici l'utilité de l'emploi des imaginaires dans les éléments; cet emploi a seul permis, par exemple, d'énoncer sans restriction deux théorèmes fondamentaux, à savoir que toute équation de degré m a m racines et que deux courbes de degrés m et n se coupent en m n points.

Le rôle des quantités imaginaires est plus important encore en Analyse : sans parler de la relation d'Euler, entre les fonctions trigonométriques et les exponentielles, (Cours de 1ère Année, p. 65) c'est dans le calcul intégral que ces quantités ont ouvert des voies nouvelles, grâce à l'introduction due à Cauchy, des intégrales prises entre des limites imaginaires : on verra plus loin quelles conséquences nombreuses et importantes a entraînées cette conception, même dans le domaine réel. On doit observer aussi que l'étude approfondie des intégrales réelles qu'on ne sait pas ramener aux fonctions élémentaires nécessite la considération des valeurs imaginaires de la variable, et, à ce point de vue, la théorie de Cauchy se présente comme la suite naturelle des éléments du Calcul intégral, de même

que la théorie d'Euler sur les fonctions trigonométriques est la suite naturelle de la trigonométrie élémentaire.

42. – Nous avons défini, d'après Cauchy, dans le cours de 1ère année (Chapitre V, p. 67), ce qu'on doit entendre par fonction de la variable imaginaire $z = x + yi$: une expression $P(x,y) + i\,Q(x,y)$ est dite fonction de z si l'on a identiquement

$$(1) \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad ; \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \; ;$$

cette fonction admet alors, par rapport à z, une dérivée qui est (Cours de 1ère Année, N° 82)

$$\frac{\partial P}{\partial x} + i\,\frac{\partial Q}{\partial x} \; ;$$

et cette dérivée est aussi une fonction de z, car on a, en vertu des identités (1), dérivées par rapport à x :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) \; ; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

43. – Uniformité. – Une fonction $f(z)$ a été dite monodrome ou uniforme dans une région R du plan, lorsque, le point z (c. à. d. le point de coordonnées x, y) étant assujetti à rester dans cette région, la fonction prend, en chaque point, une valeur unique, indépendante du chemin suivi par le point z.

Ainsi $(z-a)^m$, m n'étant pas entier, n'est pas monodrome autour du point $z = a$: si z décrit, dans le sens positif, un contour fermé entourant une fois le point a, la fonction reprend sa valeur initiale multipliée par $e^{2m\pi i}$ (Cours de 1ère Année, N°s 88 et 89). En particulier $\sqrt{z-a}$ se reproduit multiplié par -1, c'est-à-dire change de signe.

44. – Continuité. – La fonction $f(z)$ a été dite continue pour $z = z_0$ lorsque, étant donnée une quantité positive, ε, on peut assigner un nombre positif η, tel que l'on ait

$$(2) \qquad \operatorname{mod}\left[f(z_0+h) - f(z_0)\right] < \varepsilon,$$

pour toutes les valeurs de h dont le module est $< \eta$

La fonction est continue dans une région si elle continue en tous les points z_0 de cette région. (Cours de 1ère année, N° 72 et 91).

Cette définition peut se transformer.

Soient : $h = K + il$, K et l étant réels ; $z_0 = x_0 + iy_0$; $f(z) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$; on a :

$$f(z_0+h) - f(z_0) = P(x_0+K, y_0+l) - P(x_0,y_0) + i\left[Q(x_0+K,y_0+l) - Q(x_0,y_0)\right]$$

et, puisque le module de $A + Bi$ est supérieur (ou égal) à mod A et à mod B, on voit que, si $f(z)$ est continue pour $z = z_0$, on aura, a fortiori d'après (2) :

$$\text{mod}\left[P(x_0+K, y_0+l) - P(x_0,y_0)\right] < \varepsilon,$$

$$\text{mod}\left[Q(x_0+K, y_0+l) - Q(x_0,y_0)\right] < \varepsilon,$$

pour les valeurs de K et l telles que $\sqrt{K^2+l^2} < \eta$, et par suite pour toutes les valeurs de K et de l inférieures à $\frac{\eta}{\sqrt{2}}$ en valeur absolue. En d'autres termes,

Si $f(z)$ $(= P(x,y) + i\,Q(x,y))$ est une fonction continue de z pour $z = z_0$ $(= x_0 + iy_0)$, les deux fonctions $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont des fonctions continues des deux variables x, y, pour $x = x_0$, $y = y_0$.

De même si $f(z)$ est continue dans une région $\mathcal{R}$, P et Q seront des fonctions continues de x, y dans $\mathcal{R}$.

Observons enfin que si $f(z)$ est continue dans une région $\mathcal{R}$, son module, $\sqrt{P^2(x,y) + Q^2(x,y)}$, sera évidemment continu dans la même région.

45. — Fonctions holomorphes. — La fonction $f(z)$ est dite holomorphe dans une région $\mathcal{R}$ du plan si elle y est monodrome et continue, ainsi que sa dérivée ; c'est-à-dire si $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ sont des fonctions bien déterminées et continues de x, y, dans $\mathcal{R}$.

Les polynômes entiers en z, les fonctions e^z, $\cos z$, $\sin z$ sont holomorphes dans tout le plan; les fractions rationnelles le sont dans toute région qui ne comprend aucune des racines du dénominateur, car en ces points la fonction, devenant infinie, cesse d'être continue. Les fonctions $\log(z-a)$, $(z-a)^m$ sont holomorphes dans les régions où elles sont monodromes, c'est-à-dire à l'intérieur de toute courbe fermée ne contenant pas le point $z=a$.

Enfin les séries de puissances sont holomorphes à l'intérieur de leur cercle de convergence, puisqu'elles sont, dans ce cercle, monodromes et continues, ainsi que leurs dérivées de tout ordre, (Cours de 1ère année, Nos 71, 72, 73).

46. – Points critiques. – On nomme point critique d'une fonction $f(z)$ un point tel que, dans toute région comprenant ce point, la fonction ne soit pas holomorphe.

Il y a des points critiques de diverses natures.

1° Point de branchement. – Si lorsque la variable z décrit un contour fermé autour d'un point a, la fonction $f(z)$ revient au point de départ avec une valeur différente de sa valeur initiale, le point a est dit point de branchement de $f(z)$. Ainsi a est un branchement pour $\sqrt{z-a}$, $(z-a)^m$ (m non entier) et $\log(z-a)$.

2° Pôle. – Si $f(z)$ devient infinie pour $z=a$, de telle sorte que son inverse, $\frac{1}{f(z)}$, reste holomorphe au voisinage du point a (c'est-à-dire dans un cercle de rayon non nul ayant a pour centre), le point a est dit pôle de $f(z)$. Ainsi $z=1$ est pôle des fonctions $\frac{1}{z-1}$, $\frac{1}{(z-1)^2}$; mais c'est un point de branchement pour $\frac{1}{\sqrt{z-1}}$.

Le quotient de deux fonctions, holomorphes dans une région R, n'admet évidemment dans cette région, d'autres points critiques que des pôles, qui sont les points où s'annule le dénominateur. Si d'ailleurs, en un de ces points, le numérateur s'annule aussi, de façon que le quotient reste fini, le point ne sera pas critique, et la fonction quotient sera holomorphe au voisinage de ce point.

3° Point singulier essentiel. – C'est un point où la

fonction est indéterminée, tout en restant monodrome au voisinage de ce point. Exemple, le point $z = 0$ pour la fonction $e^{\frac{1}{z}}$: en effet les points pour lesquels cette fonction prend une valeur donnée, e^{α}, sont fournis par la formule

$$\frac{1}{z} = \alpha + 2K\pi i, \quad \text{ou } z = \frac{1}{\alpha + 2K\pi i}, \quad (K \text{ entier});$$

Or, quel que soit α, on peut prendre K assez grand pour que z soit aussi voisin du point $z = 0$ qu'on le voudra : celui-ci est donc un point d'indétermination.

47. — Fonctions méromorphes. — Une fonction qui, dans une région R du plan est holomorphe, sauf en certains pôles (ou, ce qui revient au même, une fonction qui n'a, dans R, d'autres points critiques que des pôles) est dite méromorphe dans cette région.

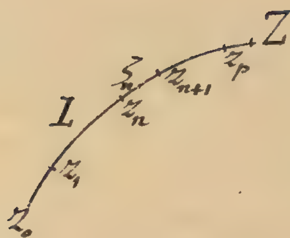
Les fractions rationnelles, les fonctions $\operatorname{tg} z$ et $\operatorname{cotg} z$ sont méromorphes dans tout le plan. L'inverse, $\frac{1}{f(z)}$, d'une fonction holomorphe dans une région, est méromorphe dans cette région ; ses pôles sont les points où s'annule $f(z)$. De même pour le quotient de deux fonctions holomorphes.

II. Intégrales définies imaginaires.

Définition de l'Intégrale imaginaire.

48. — Soit $f(z)$ une fonction continue de la variable z dans une région ; supposons que z aille de z_0 à Z en suivant une ligne déterminée, L, de cette région : marquons sur cette ligne des points successifs, $z_0, z_1, \ldots z_n, \ldots z_p, Z$, dans chaque intervalle, $z_n\ z_{n+1}$, prenons sur L un point, ζ_n et considérons la somme :

$$S = (z_1 - z_0) f(\zeta_0) + \cdots + (z_{n+1} - z_n) f(\zeta_n) + \cdots + (Z - z_p) f(\zeta_p);$$



Si l'on augmente le nombre de points z_n de manière que le module de toutes les différences $z_{n+1} - z_n$ décroisse indéfiniment la somme S tendra vers une limite indépendante du choix des points z_n et ζ_n sur la ligne I. On a en effet :

$$z_n = x_n + y_n i \quad ; \quad \zeta_n = \xi_n + \eta_n i \; ; \text{ d'où}$$

$$S = \left[(x_1 - x_0) + i(y_1 - y_0)\right] f(\xi_0 + \eta_0 i) + \cdots\cdots$$

et en posant $f(x+yi) = P + Qi$:

$$S = \left[(x_1 - x_0)P(\xi_0, \eta_0) - (y_1 - y_0)Q(\xi_0, \eta_0) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)P(\xi_n, \eta_n) - (y_{n+1} - y_n)Q(\xi_n, \eta_n) + \cdots\right]$$

$$+ i\left[(x_1 - x_0)Q(\xi_0, \eta_0) + (y_1 - y_0)P(\xi_0, \eta_0) + \cdots\cdots\cdots\right]$$

D'après cette expression, S, à la limite, n'est autre chose qu'une combinaison d'intégrales curvilignes réelles (N° 36), à savoir :

$$(2) \qquad \lim S = \int_I (P\,dx - Q\,dy) + i\int_I (Q\,dx + P\,dy),$$

Les intégrales curvilignes ont un sens, puisque l'on suppose $f(z)$ et par suite P et Q, continues le long de I. La limite ainsi déterminée se représente par le symbole

$$\int_I f(z)\,dz.$$

49. _ Cette définition étant semblable à celle de l'intégrale définie réelle conduit aux mêmes conséquences ; (cours de 1ère année, N° 169) :

1° Si on divise I en deux portions I_1 et I_2, on a évidemment

$$\int_I = \int_{I_1} + \int_{I_2}.$$

2° L'intégrale suivant I en allant de z_0 à Z est égale et de signe contraire à l'intégrale, prise suivant la même ligne, en allant de Z à z_0 (voir aussi N° 36).

3° Si M désigne le maximum du module de $f(z)$ sur la ligne L on aura :

$$\text{mod}\ S \leqq M\left[\text{mod}\,(z_1 - z_0) + \text{mod}\,(z_2 - z_1) + \cdots + \text{mod}\,(Z - z_p)\right],$$

car le mod d'une somme est inférieure à la somme des modules.

D'ailleurs mod $(z_1 - z_0)$ est la longueur de la corde $z_1 z_0$, et ainsi de suite ; la somme de ces cordes étant au plus égale à l'arc $z_0 Z$ de la ligne L, on aura, en appelant L la longueur de la ligne d'intégration :

$$\text{mod}\left[\int_L f(z)\,dz\right] \leqq ML$$

4° La règle du changement de variables est la même que pour les variables réelles ; il faut seulement déterminer le chemin, L', que suit la nouvelle variable quand z décrit l'arc L : c'est le long de L' que sera prise la nouvelle intégrale

Théorème fondamental de Cauchy.

50. – Toute la théorie qui va suivre n'est que l'application d'une proposition fondamentale, due à Cauchy, et qui s'énonce ainsi :

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans une région R du plan, à contour simple : l'intégrale $\int f(z)\,dz$, prise le long d'une ligne fermée quelconque, tracée tout entière dans la région R, est nulle.

Par contour simple, on entend un contour qui peut être tracé d'un seul mouvement continu : l'aire intérieure à un cercle est à contour simple, l'aire comprise entre deux circonférences concentriques est à contour non simple.

Désignons par γ une ligne fermée de la région R, supposée décrite, par exemple, dans le sens positif ; on a (N° 48) :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (P\,dx - Q\,dy) + i\int_\gamma (Q\,dx + P\,dy);$$

D'après l'hypothèse, $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur du contour γ et sur ce contour, c'est-à-dire que les fonctions P et Q, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, sont bien déterminées et continues à l'intérieur de γ et sur γ : on peut donc (N° 41) appliquer aux deux intégrales curvilignes du second membre de (3) la formule de Riemann (N° 37), ce qui donne :

$$\int_\gamma (P\,dx - Q\,dy) = -\iint_C \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy$$

$$\int_\gamma (Q\,dx + P\,dy) = \iint_C \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

C étant l'aire enveloppée par le contour γ. Mais, d'après les identités fondamentales (1) on a :

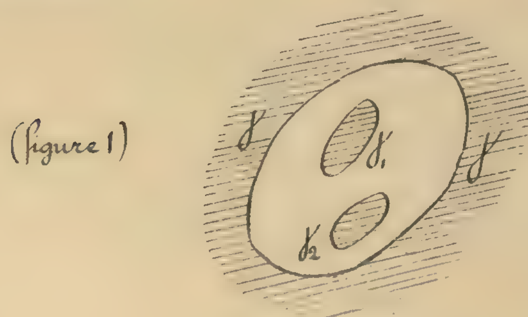
$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x},$$

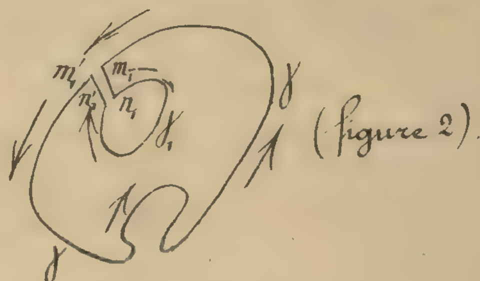
c. à. d. que les deux intégrales doubles sont identiquement nulles ; il en est donc de même de deux intégrales simples, ce qui d'après (3) démontre le théorème.

51. — Le théorème fondamental peut être étendu à un contour non simple.

Supposons que $f(z)$ soit holomorphe dans la région (non ombrée) comprise entre un contour simple, γ, et des contours γ_1, γ_2 .... intérieurs à γ (figure 1), ainsi que sur ces contours.

(figure 1)





(figure 2).

Joignons (figure 2) deux points voisins de chaque contour intérieur à deux points voisins du contour γ, par des lignes

voisines $m_1 n_1$, $m'_1 n'_1$ ... : nous formons ainsi un contour simple, à l'intérieur duquel $f(z)$ est encore holomorphe. Nous pouvons donc appliquer à ce contour, décrit par exemple dans le sens des flèches, le théorème de Cauchy, ce qui donne :

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz + \int_{m_1 n_1} + \int_{\gamma_1} + \int_{n'_1 m'_1} + \cdots\cdots = 0$$

Or si l'on suppose que les deux bords $m_1 n_1$ et $m'_1 n'_1$ de chaque coupure se rapprochent indéfiniment, la fonction $f(z)$, qui est holomorphe dans la région donnée, a les mêmes valeurs (à la limite) le long de $m_1 n_1$ et de $m'_1 n'_1$, de sorte que les intégrales $\int_{m_1 n_1}$ et $\int_{n'_1 m'_1}$, qui sont prises en sens contraire, suivant la même ligne, se détruisent, et il reste :

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz + \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \cdots\cdots = 0,$$

les contours $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ étant décrits dans le sens négatif, et le contour γ dans le sens positif. On peut écrire :

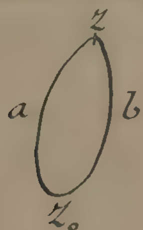
$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \cdots\cdots$$

les contours étant tous supposés décrits dans le même sens.

C'est l'extension cherchée du théorème de Cauchy : l'intégrale suivant le contour extérieur est égal à la somme des intégrales suivant les contours intérieurs

52. _ Corollaire I. _ L'intégrale $\int f(u)\,du$, prise suivant une ligne allant d'un point z_0 à un point z demeure constante quand on fait subir à la ligne d'intégration, (ses extrémités z_0 et z restant fixes), une déformation continue quelconque, pourvu que cette ligne, en se déformant, ne traverse aucun des points critiques de la fonction $f(u)$.

Soient en effet $z_0 a z$ et $z_0 b z$ deux lignes allant de z_0 à z : il n'y a entre elles et sur elles, par hypothèse, aucun point critique, c'est-à-dire que $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur du contour qu'elles déterminent, et sur ce contour. Dès lors, d'après le théorème fondamental :

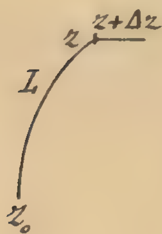


$$\int_{z_0 a z} + \int_{z b z_0} = 0\ ; \quad \text{c. à. d.} \quad \int_{z_0 a z} = \int_{z_0 b z} \qquad \text{(c.q.f.d)}$$

53. – Corollaire II. – D'après cela, si $f(z)$ est holomorphe dans une région $\mathcal{R}$, l'intégrale

$$I(z) = \int_{z_0}^{z} f(u)\, du\,,$$

prise le long d'une ligne quelconque, L située tout entière dans $\mathcal{R}$, est une fonction monodrome de sa limite supérieure, z, puisque sa valeur est indépendante du choix de la ligne L qui va de z_0 à z. Je dis qu'elle est holomorphe.



Cherchons en effet son accroissement, ΔI, quand on change z en $z + \Delta z$: soit L une ligne d'intégration, de z_0 à z ; pour ligne d'intégration de z_0 à $z + \Delta z$ on peut prendre L, suivie du segment rectiligne infiniment petit joignant les points z et $z + \Delta z$. Alors :

$$\Delta I = \int_{z}^{z+\Delta z} f(u)\, du = \int_{z}^{z+\Delta z} \left[f(z) + (f(u) - f(z) \right] du$$

d'où :

$$\frac{\Delta I}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\, du + \frac{1}{\Delta z} \int_{z}^{z+\Delta z} \left[f(u) - f(z) \right] du\,.$$

Au second membre, le premier terme est $f(z)$, car z est une constante sous le signe $\int$; quand au second terme, si M est le maximum du module de $f(u) - f(z)$ quand u reste sur le segment rectiligne $(z, z+\Delta z)$, son module est inférieur (N° 49, 3°), à

$$\text{mod}\left(\frac{1}{\Delta z}\right) . M . \text{mod.}(\Delta z), \text{ c. à. d. } M.$$

Or $f(u)$ étant continue, M tend vers zéro avec Δz, en sorte qu'on a :

$$\frac{\Delta I}{\Delta z} = f(z) + \varepsilon$$

ε tendant vers zéro avec Δz. Il résulte de cette relation :

1°. Que la fonction $I(z)$ est continue au point z, et par suite dans $\mathcal{R}$;

2°. Que sa dérivée, par rapport à z, est $f(z)$.

Cette dérivée d'après l'hypothèse est holomorphe dans $\mathcal{R}$; donc la fonction $I(z)$ est holomorphe dans la même région, puisqu'elle y est, ainsi que sa dérivée, monodrome et continue. Ainsi :

L'intégrale d'une fonction $f(z)$ holomorphe dans une région, est une fonction de la limite supérieure, z, holomorphe dans la même région ; sa dérivée par rapport à z est $f(z)$.

54 Corollaire III. – Si $F(z)$ est une fonction, holomorphe dans $\mathcal{R}$, ayant pour dérivée $f(z)$, on aura :

$$\int_{z_0}^{z} f(u)\,du = F(z) - F(z_0);$$

car les deux membres, ayant même dérivée par rapport à z, ne peuvent différer que par une constante, laquelle est nulle, puisque les deux membres sont égaux (à zéro) pour $z = z_0$.

De là résulte également qu'on peut appliquer à l'intégrale $\int_{z_0}^{z} f(u)du$ l'intégration par parties dans les régions du plan où $f(z)$ est holomorphe.

Remarque. – Le théorème fondamental de Cauchy suppose $f(z)$ holomorphe à l'intérieur du contour d'intégration, γ, et sur γ : il est généralement en défaut si cette condition n'est pas remplie.

Exemple : $\int \frac{dz}{z-a}$ le long d'une circonférence, C, de rayon R, ayant pour centre le point $z = a$. On a, sur la circonférence :

$$z - a = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) = Re^{i\varphi}$$

$$dz = Rie^{i\varphi}d\varphi$$

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = i\int d\varphi = 2\pi i$$

L'intégrale n'est donc pas nulle : on voit d'ailleurs qu'elle ne dépend ni du rayon du cercle, ni du choix du point de départ de l'intégration, comme cela devait être en vertu du théorème de Cauchy étendu (N° 51); car la fonction $\frac{1}{z-a}$ étant holomorphe entre deux circonférences C et C' de centre $z = a$, on a :

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = \int_{C'} \frac{dz}{z-a}$$

Au contraire l'intégrale $\int \frac{dz}{\sqrt{z}}$ prise par exemple le long d'un cercle de centre $z=0$ et de rayon R, dépend de R et de l'argument, φ_0, du point initial, car si l'on pose

$$z = Re^{i\varphi}, \text{ on a :}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = i\sqrt{R}\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} e^{\frac{i\varphi}{2}}\,d\varphi = -4\sqrt{R}\,e^{\frac{i\varphi_0}{2}}.$$

55. – Intégration et dérivation des séries. – La notion d'intégrale entre des limites imaginaires permet de traiter, exactement comme dans le cas des variables réelles, la question de l'intégration et de la dérivation des séries dont les termes sont des fonctions de z.

On établit ainsi que (cours de 1ère année, Nos 193-195) :

I. – L'intégrale, le long d'une ligne finie, d'une série uniformément convergente dans une région qui comprend cette ligne, s'obtient en faisant la somme des intégrales des termes de la série.

II. – Si une série est convergente dans une région et si la série des dérivées de ses termes est non seulement convergente, mais uniformément convergente dans cette région, la seconde série sera la dérivée de la première pour toute valeur de z comprise dans la région.

III. Intégrale de Cauchy.

---

56. – Soient : $f(z)$ une fonction holomorphe à l'intérieur d'un contour γ et sur ce contour, a un point intérieur à γ. Considérons l'intégrale, dite de Cauchy :

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz,$$



prise dans le sens positif. Si de a comme centre on décrit une circonférence, γ_1, intérieure au contour γ, et de rayon R, la fonction $\frac{f(z)}{z-a}$ sera holomorphe dans la région comprise entre les deux contours, et on aura, d'après le théorème de Cauchy étendu (N°. 51):

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

Or, sur la circonférence γ_1:

$$z-a = Re^{i\varphi}\,;\quad dz = Rie^{i\varphi}d\varphi\,;\ \ldots\ldots \text{ donc :}$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = i\int_{\gamma_1} f(z)\,d\varphi = i\int_0^{2\pi} f(a)\,d\varphi + i\int_{\gamma_1}\left[f(z)-f(a)\right]d\varphi$$

La fonction $f(z)$ étant continue à l'intérieur de γ, on peut prendre R assez petit pour que, sur la circonférence γ_1, le module de $f(z)-f(a)$ soit inférieur à un nombre ε, aussi petit qu'on veut; donc

$$\text{mod}\int_{\gamma_1}\left[f(z)-f(a)\right]d\varphi \quad < \varepsilon\int d\varphi, \text{ c.à.d. } < 2\pi\varepsilon,$$

quantité qui a pour limite zéro quand R décroît indéfiniment.

Il reste donc

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = i\int_0^{2\pi} f(a)\,d\varphi = 2\pi i f(a);$$

d'où la formule finale:

$$(4)\qquad \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i f(a)$$

57.– Remarque.– En vertu de (4), la fonction $f(z)$ est connue en tous les points, a, intérieurs à un contour quand on connaît sa valeur le long du contour: c'est là une importante propriétés des fonctions holomorphes.

58.– Corollaire I.– On peut dériver par rapport à a les deux membres de (4): pour dériver le premier, on appliquera la règle de dérivation sous le signe $\int$ qu'il est aisé

d'étendre aux intégrales imaginaires[1]; on trouve ainsi :

$$(5) \qquad f'(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2}\,dz$$

et par des dérivations successives :

$$f''(\alpha) = \frac{1.2}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\alpha)^3}\,dz$$

. . . .

$$f^n(\alpha) = \frac{1.2 \ldots n}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz$$

Les intégrales aux seconds membres sont évidemment des fonctions bien déterminées et continues de α (car α n'étant pas sur la ligne d'intégration $(z-\alpha)$ ne s'annule pas); on en conclut que les dérivées d'une fonction $f(\alpha)$ holomorphe dans une région R, sont holomorphes dans cette région, car chacune d'elles est monodrome et continue, ainsi que sa dérivée.

59. _ Corollaire II. _ Les formules précédentes donnent une limite supérieure du module des dérivées $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$, … … à l'intérieur du contour γ. Soient en effet M le maximum du module de $f(z)$ sur le contour, δ la plus courte distance de α au contour; on a (N° 49, 3°) :

---

[1] On peut rendre le raisonnement rigoureux comme il suit, dans le cas considéré. Dans (4) changeons α en $\alpha + h$, nous obtenons $f(\alpha+h)$, et, en retranchant $f(\alpha)$

$$\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\alpha)(z-\alpha-h)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-\alpha)^2}\left[1 + \frac{h}{z-\alpha-h}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2}\,dz + \frac{h}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-\alpha)^2(z-\alpha-h)}.$$

Au second membre, la deuxième intégrale est finie, car la fonction à intégrer reste finie sur le contour, qui lui-même a une longueur finie (N° 49, 3°); son produit par h a donc pour limite zéro quand h tend vers zéro; et, à la limite, on trouve bien la formule (5).



$$\text{mod}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \leqq \frac{M}{\delta^{n+1}} L; \; (L = \text{longueur du contour})$$

d'où :

$$\text{mod}\, f^n(a) \leqq \frac{1.2\ldots n}{2\pi}\cdot\frac{ML}{\delta^{n+1}}$$

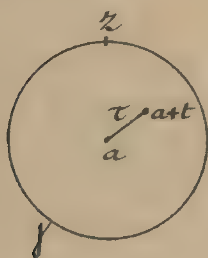
Si γ est une circonférence de centre a et rayon R :

$$\text{mod}\, f^n(a) \leqq = \frac{1.2\ldots n}{R^n} M$$

IV. — Développements en Série.

Série de Taylor.

60. — Soit $f(z)$ une fonction holomorphe à l'intérieur et sur le contour d'un cercle, γ, de rayon R, ayant pour centre le point $z = a$; désignons par $a+t$ un point intérieur à ce cercle. On a, d'après l'intégrale de Cauchy (N° 56) :



$$f(a+t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a-t}dz \,;$$

ce qui s'écrit identiquement :

$$f(a+t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz\left[\frac{1}{z-a} + \frac{t}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(z-a)^n} + \frac{t^n}{(z-a)^n(z-a-t)}\right]$$

ou :

$$f(a+t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z-a}dz + \frac{t}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz + \cdots + \frac{t^{n-1}}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^n}dz + R_n$$

c'est-à-dire d'après les formules du N° 58 :

$$(6) \qquad f(a+t) = f(a) + t f'(a) + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + R_n \,,$$

le reste, R_n, ayant pour expression

$$R_n = \frac{t^n}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\frac{dz}{(z-a)^n(z-a-t)}.$$

Soient : M le maximum du module de $f(z)$ sur le cercle γ, τ le module de t ; z étant sur la circonférence, $\mathrm{mod}(z-a)=R$, $\mathrm{mod}(z-a-t) \geqq R-\tau$ (1) ; et on a (N° 49, 3°) :

$$\mathrm{mod}\, R_n \leqq \frac{1}{2\pi}\frac{M.\tau^n}{R^n(R-\tau)}.2\pi.R$$

$$\leqq \frac{RM}{R-\tau}\left(\frac{\tau}{R}\right)^n,$$

quantité qui a pour limite zéro pour n infini, car $\tau < R$, puisque $a+t$ est à l'intérieur du cercle γ.

La série qui figure au second membre de (6), prolongée indéfiniment, est donc convergente et représente $f(a+t)$, à la seule condition que le point $a+t$ soit intérieur au cercle. C'est la Série de Taylor, étendue, par Cauchy, aux fonctions complexes.

La Série de Maclaurin s'obtient en faisant $a=0$: toute fonction $f(z)$, holomorphe dans un cercle décrit de l'origine comme centre, peut donc se développer en série convergente, ordonnée suivant les puissances croissantes de z, pour toutes les valeurs de z intérieures à ce cercle :

$$f(z)=f(0)+zf'(0)+\cdots+\frac{z^n}{n!}f^n(0)+\cdots$$

61. – Remarque. – D'après cela, si l'origine est un point ordinaire (c. à d. non critique) de $f(z)$, on peut développer la fonction, par la formule de Maclaurin, pour toutes les valeurs de z comprises à l'intérieur d'un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon la distance de ce point au point critique le plus voisin : sur le cercle même, il y a doute ; la série peut n'être pas convergente.

Au-delà du cercle, la série est certainement divergente : car cette série est une série de puissances, si donc elle convergeait

---

(1) Car le mod. d'une différence est supérieur (ou égal) à la différence des modules.

pour un point, M, plus éloigné de l'origine O que le point critique le plus voisin, elle convergerait certainement à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon OM, d'après les propriétés des séries de puissances. Elle serait donc, toujours d'après ces propriétés (N°. 45) holomorphe dans ce cercle, ce qui est impossible, puisque, par hypothèse, le cercle contient un point critique.

On sait ainsi fixer d'une manière exacte le rayon du cercle à l'intérieur duquel converge la série de Maclaurin, et on voit que l'introduction des imaginaires est indispensable, puisque le point critique le plus voisin de l'origine peut être imaginaire. Par exemple la fonction $\sqrt{1+x^2}$ ne peut être développée en série de Maclaurin convergente, même pour des valeurs réelles de x, que si mod x reste inférieur à 1: les points critiques de la fonction sont en effet $+i$ et $-i$.

Pour $\log(1+z)$ et $(1+z)^m$, l'origine est un point ordinaire, les points critiques se réduisent au seul point $z=-1$: la série de Maclaurin est donc convergente si mod $z<1$; de même pour $\frac{1}{\cos z}$, la série converge si mod $z<\frac{\pi}{2}$.

Remarque II. — La formule de Taylor pour les fonctions d'une variable réelle (Cours de 1ère année, p. 78) n'est nullement un cas particulier de la formule (6) relative aux variables imaginaires: montrons-le sur un exemple.

Soit la fonction $f(z)=\sqrt{1+z^2}$: la formule imaginaire (6), ou, pour préciser, celle de Maclaurin,

$$f(z)=f(0)+zf'(0)+\cdots+R_n$$

ne s'applique que dans le cercle de centre O à l'intérieur duquel $f(z)$ est holomorphe, c. à d. de rayon 1; en ce cas la série du second membre indéfiniment prolongée converge, puisque R_n tend vers zéro pour $n=\infty$. En particulier, la formule ne convient qu'aux valeurs réelles de z comprises entre -1 et $+1$.

Au contraire la formule réelle:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^n(\theta x)$$

s'applique à toutes les valeurs réelles de x: car $f(x)$ et ses dérivées

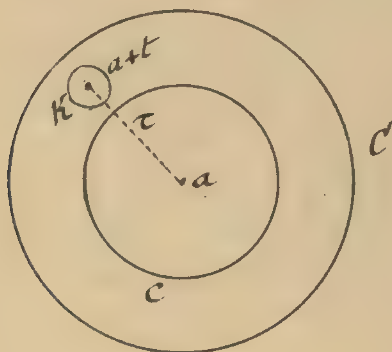
sont des fonctions continues de x entre $-\infty$ et $+\infty$. En particulier elle convient aux valeurs réelles de x non comprises entre -1 et $+1$; seulement, en ce cas, le reste $\frac{x^n}{n!}f^n(\theta x)$ ne tend pas vers 0 pour n infini, car (Rem. I) la série du second membre indéfiniment prolongée est divergente.

En d'autres termes, la formule de Taylor réelle peut avoir un champ d'application plus étendu que la formule imaginaire (6); mais quand la série réelle converge, elle rentre, comme cas particulier, dans la série imaginaire.

Série de Laurent.

62. — Laurent (1843) a généralisé la théorie précédente.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe à l'intérieur et sur le pourtour d'une couronne circulaire, comprise entre deux circonférences C et c, de même centre, a, de rayons R et r. Désignons par $a+t$ un point de la couronne; si nous entourons ce point d'un petit cercle, K la fonction $\frac{f(z)}{z-a-t}$ sera holomorphe dans la région comprise entre les trois circonférences, et on aura, d'après le théorème de Cauchy pour une région à contour non simple (N°51)



$$\int_C \frac{f(z)}{z-a-t}\,dz = \int_c + \int_K ,$$

les trois circonférences étant décrites dans le sens positif. Or on a (Intégrale de Cauchy, N°56)

$$\int_K \frac{f(z)}{z-a-t}\,dz = 2\pi i\, f(a+t); \qquad \text{d'où :}$$

$$2\pi i f(a+t) = \int_C \frac{f(z)}{z-a-t}\,dz - \int_c \frac{f(z)}{z-a-t}\,dz .$$

Sur la circonférence C, le module de $z-a$ étant supérieur à celui de t, écrivons

$$\frac{1}{z-a-t} = \frac{1}{z-a} + \frac{t}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(z-a)^n} + \frac{t^n}{(z-a)^n(z-a-t)};$$

sur la circonférence c, mod $z-a$ étant inférieur à mod t, écrivons :

$$-\frac{1}{z-a-t}=\frac{1}{t-(z-a)}=\frac{1}{t}+\frac{z-a}{t^2}+\dots+\frac{(z-a)^{n-1}}{t^n}+\frac{(z-a)^n}{t^n[t-(z-a)]};$$

et portons ces valeurs dans l'expression de $2\pi i f(a+t)$.

Il vient :

$$2\pi i f(a+t)=\int_C\frac{f(z)}{z-a}dz+t\int_C\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz+\dots+t^{n+1}\int_C\frac{f(z)}{(z-a)^n}dz+R_n$$

$$+\frac{1}{t}\int_c f(z)dz+\frac{1}{t^2}\int_c(z-a)f(z)dz+\dots+\frac{1}{t^n}\int_c(z-a)^{n-1}f(z)dz+r_n.$$

On voit aisément que les modules des deux termes complémentaires, R_n et r_n ont pour limite zéro, pour n infini ; soient en effet M le maximum du module de $f(z)$ sur la couronne, τ le module de t ; on a :

$$\text{mod } R_n=\text{mod}\int_C f(z)\frac{t^n}{(z-a)^n(z-a-t)}dz\leqq M\left(\frac{\tau}{R}\right)^n\frac{2\pi R}{R-\tau}$$

$$\text{mod } r_n=\text{mod}\int_c f(z)\frac{(z-a)^n}{t^n[t-(z-a)]}dz\leqq M\left(\frac{r}{\tau}\right)^n\frac{2\pi r}{\tau-r},$$

et les seconds membres tendent vers zéro, pour $n=\infty$, car $r<\tau<R$.

On a ainsi développé $2\pi i\,.\,f(a+t)$, et par suite $f(a+t)$, en une double série convergente, ordonnée suivant les puissances positives et négatives de t de la forme :

$$f(a+t)=A_0+A_1t+\dots+A_nt^n+\dots$$

$$+\frac{B_1}{t}+\dots+\frac{B_n}{t^n}+\dots$$

les A et B étant des constantes par rapport à t, représentées par des intégrales définies :

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\ ^{(1)}$$

$$B_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)(z-a)^{n-1}dz$$

---

(1) Voir cette note au bas de la page suivante.

Ce développement est valable si le point $(a+t)$ est dans la couronne.

On peut écrire aussi ; en posant $a+t=z$, d'où $t=z-a$:

$$f(z)=A_0+A_1(z-a)+\cdots\cdots+A_n(z-a)^n+\cdots$$
$$+\frac{B_1}{z-a}+\cdots\cdots\cdots+\frac{B_n}{(z-a)^n}+\cdots\cdots,$$

pour toutes les valeurs de z à l'intérieur de la couronne.

63. – L'application la plus importante de la série de Laurent est le développement en série d'une fonction, $f(z)$, autour d'un point singulier essentiel, a : en effet, décrivons de a comme centre un cercle C, ne contenant aucun autre point critique (ce qui est possible si a est un point critique isolé) ; soit c une circonférence de centre a, intérieure à C, et de rayon aussi petit qu'on veut. La fonction $f(z)$ est holomorphe dans la couronne comprise entre les deux circonférences, d'où le développement

$$f(z)=A_0+A_1(z-a)+\cdots\cdots+A_n(z-a)^n+\cdots$$
$$+\frac{B_1}{z-a}+\cdots\cdots\cdots+\frac{B_n}{(z-a)^n}+\cdots\cdots$$

applicable à toutes les valeurs de z comprises dans le cercle C, le point a excepté. Exemple : $f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}$ autour du point essentiel $z=0$; le rayon du cercle C est alors aussi grand qu'on veut, c'est-à-dire que la série de Laurent est valable dans tout le plan, le point $z=0$ excepté.

Applications du développement de Taylor.

64. – Théorème. – Une fonction holomorphe dans tout le plan, et dont le module reste constamment inférieur à une limite M se réduit nécessairement à une constante.

Note de la page 59.

(1) Au lieu de prendre, pour A_n, $\frac{1}{2\pi i}\int_{C}$, on peut prendre $\frac{1}{2\pi i}\int_{c}$, car la fonction $\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$ est holomorphe dans la couronne circulaire. Donc (N°. 51), $\int_{C}=\int_{c}$. De même, pour B_n, au lieu de $\int_{c}$ on peut prendre $\int_{C}$.

La fonction étant holomorphe dans tout le plan, la série de Taylor est applicable pour toute valeur de t; par suite

$$(6) \qquad f(a+t) = f(a) + t f'(a) + \cdots + \frac{t^n}{n!} f^n(a) + \cdots$$

Décrivons de a comme centre un cercle de rayon arbitraire, R; on a (N° 59):

$$\mathrm{mod}\, f^n(a) \leqq \frac{1.2\ldots n}{R^n} M,$$

quelque grand que soit R. Or, M étant fixe, le second membre tend vers zéro pour R infini; donc $f'(a)$, $f''(a)$, ... sont nuls, et il reste dans (6)

$$f(a+t) = f(a) \qquad \text{C.q.f.d.}$$

Zéros des fonctions holomorphes.

65._ Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans une région du plan, s'annulant pour un point a de cette région; on a, par la formule de Taylor:

$$f(a+t) = f(a) + t f'(a) + \cdots\cdots$$

et en posant:

$$a + t = z,$$

$$f(z) = f(a) + (z-a) f'(a) + \cdots + \frac{(z-a)^m}{m!} f^m(a) + \cdots\cdots$$

développement valable quand z est intérieur à un cercle, γ, de centre a. Par hypothèse, $f(a)$ est nul; supposons que $f'(a)$, $f''(a)$, ... $f^{m-1}(a)$ le soient aussi, il reste:

$$f(z) = (z-a)^m \left[\frac{f^m(a)}{m!} + \cdots\cdots \right] = (z-a)^m \varphi(z)$$

$\varphi(a)$ étant différent de zéro, à moins toutefois que toutes les dérivées ne s'annulent pour $z = a$; $f(z)$ serait alors identiquement nul, cas sans intérêt. D'ailleurs $\varphi(z)$ est holomorphe car c'est une série de puissances convergente dans γ (N° 45).

On dit que a est un zéro de la fonction $f(z)$, et que m est son degré (ou ordre) de multiplicité (nécessairement entier).

On déduit de là que les zéros d'une fonction holomorphe sont isolés, c'est-à-dire qu'on peut entourer chacun d'eux d'un cercle assez petit pour ne contenir aucun autre zéro. En effet, la fonction holomorphe $\varphi(z)$ étant continue autour de a, son module l'est également (N° 44); on peut donc trouver un nombre ρ assez petit pour que, z restant dans le cercle de centre a et de rayon ρ, mod $\varphi(z)$ diffère d'aussi peu qu'on voudra, de mod $\varphi(a)$, qui n'est pas nul. Par suite $\varphi(z)$ ne s'annulera pas dans le cercle, et comme $f(z)=(z-a)^m\varphi(z)$, $f(z)$ ne s'annulera, dans ce cercle, qu'au point a. [1]

Les mêmes remarques s'appliquent aux fonctions méromorphes au voisinage de leurs zéros; ces zéros sont également isolés.

Pôles des fonctions méromorphes.

66. – Si $f(z)$ a un pôle au point a, la fonction $\frac{1}{f(z)}$, par définition (N° 46, 2°), est holomorphe dans un cercle, γ, décrit de a comme centre et s'annule pour $z=a$. Donc d'après ce qui précède :

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^n\psi(z), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (n \text{ entier et } > 0$$

$\psi(z)$ étant holomorphe dans le cercle γ, et ne s'annulant pas pour $z=a$.

On en tire

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^n}\,\frac{1}{\psi(z)}.$$

D'ailleurs $\psi(z)$ étant holomorphe et ne s'annulant pas pour $z=a$, $\frac{1}{\psi(z)}$ sera holomorphe dans un cercle, γ', de centre a [il suffit évidemment de prendre le rayon de γ' assez petit pour que ce cercle ne contienne aucun zéro de $\psi(z)$]; donc, par la série de Taylor :

---

[1] Ce raisonnement suppose $\varphi(a)$ différent de zéro, ce qui est toujours vrai, à moins que $f(z)$ ne soit identiquement nul, comme on l'a observé plus haut. Si donc on trouve qu'une fonction holomorphe a des zéros aussi voisins qu'on veut l'un de l'autre, on en concluera qu'elle est identiquement nulle.

$$(7)\qquad \frac{1}{\varphi(z)} = A_0 + A_1(z-a) + \cdots + A_{n-1}(z-a)^{n-1} + (z-a)^n \psi(z); \text{ et :}$$

$$f(z) = \frac{A_0}{(z-a)^n} + \frac{A_1}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{z-a} + \varphi(z);$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe au voisinage de a, et restant finie pour $z=a$. On peut aussi développer $\varphi(z)$, autour du point a, par la série de Taylor, ce qui donne

$$f(z) = \frac{A_0}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{z-a} + A_n + A_{n+1}(z-a) + \cdots\cdots$$

C'est le développement d'une fonction méromorphe aux environs d'un pôle, formule importante, d'un fréquent usage; elle est valable à l'intérieur d'un cercle ayant a pour centre, et pour rayon la distance de ce point au point critique le plus voisin de la fonction $f(z)$.

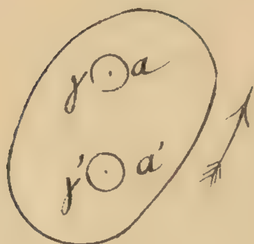
L'entier n est dit degré (ou Ordre) de multiplicité du pôle a. Les pôles d'une fonction méromorphe sont isolés, car ce sont les zéros de la fonction inverse, qui est méromorphe. Il en résulte qu'une fonction, méromorphe dans une région finie du plan, n'a dans cette région qu'un nombre limité de zéros et de pôles.

Parmi les coefficients des termes en $\frac{1}{(z-a)^k}$, dans l'expression (7) de $f(z)$, celui de $\frac{1}{z-a}$, que nous avons désigné par A_{n-1}, joue un rôle spécial; il a reçu de Cauchy le nom de résidu de $f(z)$ relatif au pôle a.

V. – Théorème des résidus

---

67. – Soit $f(z)$ une fonction méromorphe à l'intérieur d'un contour simple, K; désignons par $a, a', \ldots$ ceux de ses pôles intérieurs à K et entourons-les de petits cercles, $\gamma, \gamma', \ldots$; la fonction $f(z)$



étant holomorphe dans la région à contour non simple comprise entre K et les circonférences γ, γ', ..., on aura, d'après le théorème de Cauchy étendu, (N° 51) :

$$\int_K f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_{\gamma'} f(z)\,dz + \cdots$$

tous les contours étant décrits dans le même sens, que nous supposerons le sens positif.

Or, autour du pôle a, (N° 66) :

$$f(z) = \frac{A_0}{(z-a)^n} + \cdots\cdots + \frac{A_{n-1}}{z-a} + \varphi(z);$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe autour du point a, l'intégrale $\int_\gamma \varphi(z)\,dz$ est nulle, et on a :

$$(8) \qquad \int_\gamma f(z)\,dz = A_0 \int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^n} + \cdots + A_{n-1} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}.$$

Or (N° 54, Corollaire III), si $p > 1$

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^p} = -\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(z-a)^{p-1}}\right];$$

le second membre reprenant la même valeur quand on revient au point de départ de l'intégration, (puisque p est entier), l'intégrale est nulle. Pour $p = 1$ (N° 54 Remarque) :

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

Il reste donc dans (8) :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,A_{n-1};$$

et par suit.

$$\int_K f(z)\,dz = 2\pi i\,(A_{n-1} + A'_{n-1} + \cdots),$$

A_{n-1}, A'_{n-1}, ... étant les résidus de $f(z)$ relatifs aux pôles $a, a', \ldots$

Donc :

Donc :
L'intégrale d'une fonction méromorphe prise dans le sens positif le long d'un contour simple K, est égale à la somme des résidus de cette fonction, relatifs aux pôles, situés à l'intérieur du contour, multipliée par $2\pi i$.

Remarque. — Dans les applications, on a souvent à trouver le résidu, par rapport à un pôle $z = a$, d'une fonction $f(z)$, mise sous la forme $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, φ et ψ étant holomorphes autour du point $z = a$, zéro d'ordre m de $\psi(z)$. Posons $z = a + t$; il vient

$$f(a+t) = \frac{\varphi(a+t)}{\psi(a+t)} = \frac{\varphi(a) + t\varphi'(a) + \cdots\cdots}{t^m \frac{\psi^m(a)}{m!} + t^{m+1}\frac{\psi^{m+1}(a)}{(m+1)!} + \cdots}$$

Il suffit de diviser le numérateur par le dénominateur, en ordonnant suivant les puissances croissantes de t : on n'aura besoin que de prendre les m premiers termes au dividende et au diviseur ; et on obtiendra ainsi la partie infinie du développement de $f(a+t)$:

$$f(a+t) = \frac{A_0}{t^n} + \cdots\cdots + \frac{A_{n-1}}{t} + \cdots\cdots ;$$

le résidu sera le coefficient du terme en $\frac{1}{t}$ (Voir le Cours de 1ère Année, N° 123, 2°).

Si a est zéro simple de $\psi(z)$, le résidu de $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ sera $\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$, formule à retenir.

Théorèmes de Cauchy sur les zéros et les pôles d'une fonction méromorphe.

68. — Soit $f(z)$ une fonction méromorphe à l'intérieur d'un contour simple γ ; désignons par $f'(z)$ sa dérivée et par $\varphi(z)$ une fonction holomorphe à l'intérieur de γ. L'intégrale

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\varphi(z)\,dz$$

prise dans le sens positif, est égale, d'après le théorème des Résidus, à la somme des Résidus de la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)}\varphi(z)$, relatifs aux

pôles situés à l'intérieur du contour. Cette fonction ne peut devenir infinie que si son dénominateur s'annule, c'est-à-dire pour les zéros de $f(z)$, ou si son numérateur, $\varphi(z) f'(z)$, est infini.

Or $\varphi(z)$, par hypothèse, n'a pas de pôles dans le contour; quant aux pôles de $f'(z)$, ce sont nécessairement ceux de $f(z)$, car les dérivées d'une fonction étant holomorphes en même temps que celle-ci (N°. 58) ne peuvent devenir infinies qu'aux points critiques de la fonction. On a donc seulement à considérer les zéros et les pôles de $f(z)$, situés à l'intérieur du contour; soit a l'un d'eux; on a, au voisinage de a (N°s 65, 66).

$$f(z) = (z-a)^m \psi(z),$$

$\psi(z)$ n'étant ni nulle ni infinie pour $z = a$, et m étant un entier, positif si a est un zéro de $f(z)$, négatif si c'est un pôle.

On en tire:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)};$$

et

$$\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a}\varphi(z) + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\varphi(z).$$

Le second terme du second membre est fini pour $z = a$, puisque $\psi(a)$ n'est ni nul, ni infini; le résidu du premier membre, relatif au pôle a, est donc le même que celui de $\frac{m}{z-a}\varphi(z)$, égal évidemment à $m\varphi(a)$. Donc enfin

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum m\varphi(a) = \sum\varphi(\alpha) - \sum\varphi(\beta),$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ étant les zéros; $\beta_1, \beta_2, \ldots$ les pôles de $f(z)$, intérieurs au contour γ. Dans la somme $\Sigma\varphi(\alpha)$, chaque zéro figure autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité, et de même pour les pôles. Cette formule donne donc la différence des deux sommes $\Sigma\varphi(z)$ étendues respectivement aux zéros et aux pôles d'une fonction méromorphe, situés dans un contour donné.

Cas particulier. — Si $\varphi(z) = 1$, on aura la formule:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = M - N,$$

M étant le nombre des zéros de $f(z)$, N celui de ses pôles, intérieurs à γ, chacun d'eux étant compté avec son ordre de multiplicité.

Application. _ Prenons pour $f(z)$ le polynôme $A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots$, et pour contour γ une circonférence de centre O et de rayon très grand R. On aura, pour expression du nombre des racines de $f(z)$ intérieures à γ (puisque le polynôme n'a pas de pôles):

$$M = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{nA_0 z^{n-1} + \ldots}{A_0 z^n + \ldots}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{n + (n-1)\frac{A_1}{A_0 z} + \cdots}{1 + \frac{A_1}{A_0 z} + \cdots\cdots}\,\frac{dz}{z}$$

Sur le cercle γ, $z = Re^{i\varphi}$,

$$dz = Rie^{i\varphi}d\varphi\,; \qquad \frac{dz}{z} = i\,d\varphi$$

$$M = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}(n+\varepsilon)\,i\,d\varphi,$$

le module de ε tendant vers zéro, pour R infini. Donc :

$$M = n + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\varepsilon\,d\varphi$$

L'intégrale $\int_0^{2\pi}\varepsilon\,d\varphi$, ou $\frac{1}{i}\int_\gamma \varepsilon\frac{dz}{z}$ a pour limite zéro, car $z.\frac{\varepsilon}{z} = \varepsilon$ tend vers zéro, pour $R = \infty$ (Voir plus bas, Lemme II, N° 69); il reste donc

$$M = n,$$

c'est-à-dire qu'une équation d'ordre n a n racines.

VI. – Applications diverses.

Calcul d'Intégrales définies.

69. — La Théorie de Cauchy donne une méthode féconde pour le calcul des intégrales définies ; dans ces recherches, deux Lemmes sont utiles.

Lemme I. — L'intégrale $\int f(z)dz$, prise le long d'un arc d'une circonférence infiniment petite, de centre a et de rayon r, tend vers zéro avec r, si le maximum du module de $(z-a)f(z)$ sur l'arc d'intégration tend lui-même vers zéro avec r.

Soit en effet M le maximum du module de $(z-a)f(z)$ sur l'arc considéré ; on a, sur cet arc, par hypothèse :

$$\mathrm{mod}\, f(z) \leqq \frac{M}{\mathrm{mod}(z-a)} \quad \text{c. à d.} \leqq \frac{M}{r}$$

d'où :

$$\mathrm{mod} \int f(z)dz \leqq \frac{M}{r} l ,$$

l étant la longueur de l'arc, qui est inférieure à celle, $2\pi r$, de la circonférence entière. Le module de l'intégrale est donc au plus égal à $2\pi M$, ce qui établit le lemme, M tendant vers zéro avec r, par hypothèse.

Lemme II. – L'intégrale $\int f(z)dz$, prise le long d'un arc d'une circonférence infiniment grande, ayant pour centre l'origine et pour rayon R, tend vers zéro quand R croît indéfiniment, si le maximum du module de $zf(z)$ sur l'arc d'intégration tend lui-même vers zéro, pour R infini.

Soit en effet M le maximum du module de $zf(z)$ sur l'arc ;

on a, sur cet arc, par hypothèse :

$$\text{mod}\, f(z) \leqq \frac{M}{R},$$

d'où

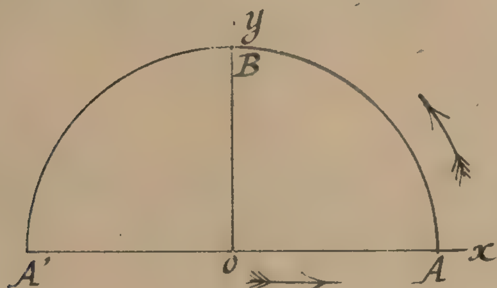
$$\text{mod} \int f(z)\, dz \leqq \frac{M}{R} \cdot L \leqq 2\pi M,$$

ce qui démontre le lemme, puisque lim. $M = 0$, pour $R = \infty$.

70. – Calcul d'Intégrales rationnelles. – Intégrons la fonction :

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$$

le long du contour, K, formé : 1° d'un demi cercle, ABA', de rayon infini, ayant l'origine pour centre ; 2° du diamètre A'A, qui coïncide avec l'axe des x.



D'après le lemme II, l'intégrale le long du demi-cercle est nulle, car

$$z f(z) = \frac{z}{(1+z^2)^2},$$

tend vers zéro quand le module de z croît indéfiniment ; l'intégrale suivant K se réduit donc à l'intégrale suivant la droite A'A, c'est-à-dire à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

Mais d'après le théorème des résidus (N° 67), elle est égale à $2\pi i \sum A$, $\sum A$ désignant la somme des résidus de $f(z)$ pour les pôles intérieurs à K, c'est-à-dire pour les pôles situés au-dessus de Ox. La fonction $\frac{1}{(1+z^2)}$ n'a, au-dessus de Ox, qu'un pôle (double), $z = +i$; pour calculer son résidu, posons $z = i + t$ (Remarque du N° 67).

$$\frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{(2it+t^2)^2} = \frac{-1}{4t^2} \; \frac{1}{\left(1+\frac{t}{i}+\cdots\right)}$$

et, par division :

$$= -\frac{1}{4t^2}\left[1 - \frac{t}{i} + \cdots\right] = -\frac{1}{4t^2} + \frac{1}{4ti} + \cdots\cdots$$

Le résidu est donc $\frac{1}{4i}$. Par suite :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{2\pi i}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$

Cette méthode s'applique, d'une manière générale, au calcul de l'intégrale

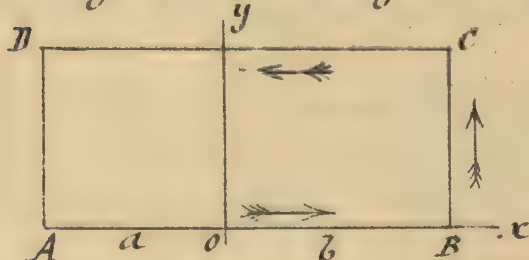
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$$

où P et Q sont des polynômes dont le second n'a pas de racine réelle et tels que le degré de Q surpasse de deux unités au moins celui de P (Cours de 1ère Année, N°. 188, p. 172).

71. — Intégrale de Fourier. — Intégrons la fonction

$$f(z) = e^{-z^2}$$

le long d'un rectangle ABCD, ayant un côté sur Ox ; soient $-a$ et $+b$ les abcisses de A et B $(a>0, b>0)$ et h la hauteur BC.



La fonction $f(z)$ étant holomorphe dans tout le plan, l'intégrale le long du rectangle est nulle. Donc :

$$\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA} = 0$$

Laissons la hauteur h du rectangle fixe et faisons tendre a et b vers $+\infty$; la première intégrale réelle $\int_{-a}^{b} e^{-x^2}dx$ tend vers $\sqrt{\pi}$.

Je dis que la seconde et la quatrième, $\int_{BC}$ et $\int_{DA}$ sont nulles.

En effet, le long de BC, on a

$$z = b + it,$$

t étant réel et variant de 0 à h. Donc

$$\int_{BC} e^{-z^2} dz = \int_0^h e^{-(b+it)^2} i\,dt = i e^{-b^2} \int_0^h e^{-2bit} e^{t^2} dt .$$

Sous le dernier signe $\int$, e^{-2bit} a pour module[1] 1 ; e^{t^2} reste inférieur à e^{h^2} ; donc le module de $\int_{BC}$ est inférieur à $e^{-b^2} e^{h^2} h$, quantité qui tend vers 0 pour b infini. Donc $\lim \int_{BC} = 0$; et il en est de même pour $\int_{DA}$. Il vient ainsi :

$$\sqrt{\pi} + \int_{CD} e^{-z^2} dz = 0$$

Mais le long de CD, $z = x + hi$, x étant réel et allant de $+\infty$ à $-\infty$; donc en renversant les limites :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+hi)^2} dx = \sqrt{\pi}$$

ou :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \left[\cos 2hx - i \sin 2hx\right] dx = \sqrt{\pi}\, e^{-h^2}$$

En séparant le réel de l'imaginaire on a donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sin 2hx\, dx = 0 \quad \text{............ (évident, fonction impaire)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2hx\, dx = \sqrt{\pi}\, e^{-h^2} \quad \text{..... (Intégrale de Fourier)}$$

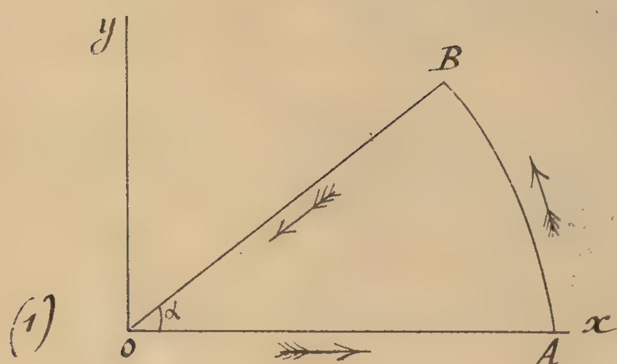
72. — Intégrales de Fresnel et analogues. — Intégrons encore la fonction

$$f(z) = e^{-z^2}$$

mais, cette fois, le long d'un contour K, formé 1° par une portion, $0A = R$, de l'axe des x, que nous ferons croître ensuite indéfiniment ;

---

(1) Car d'une manière générale, le module de e^{Ai}, où A est réel, c'est-à-dire le module de $\cos A + i \sin A$ est $\sqrt{\cos^2 A + \sin^2 A} = 1$.



2°. par un arc de cercle, AB, de centre O, de rayon R, et l'angle au centre α $(\alpha < \frac{\pi}{4})$; 3°. par le rayon BO.

La fonction e^{-z^2} étant holomorphe dans tout le plan, son intégrale le long de K est nulle. Donc :

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx + \int_{AB} e^{-z^2}dz + \int_{BO} e^{-z^2}dz = 0 .$$

La première intégrale est $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; pour calculer la troisième, observons que, sur la droite OB :

$$z = \rho e^{i\alpha} = \rho(\cos\alpha + i \sin\alpha),$$

et de B à O, ρ varie, par valeurs réelles, de $+\infty$ à 0. La troisième intégrale est donc

$$\int_\infty^0 e^{-\rho^2(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)} (\cos\alpha + i\sin\alpha)\, d\rho$$

Enfin l'intégrale intermédiaire $\int_{AB}$, est nulle, comme on va l'établir tout à l'heure. Il reste donc :

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \int_0^\infty e^{-\rho^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)}(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,d\rho = \int_0^\infty d\rho .\, e^{-\rho^2\cos 2\alpha}\left[\cos(\rho^2\sin 2\alpha) - i\sin(\rho^2 \sin 2\alpha)\right]\left[\cos\alpha + i\sin\alpha\right]$$

et, en séparant le réel de l'imaginaire, et posant pour abréger

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-\rho^2\cos 2\alpha}\cos(\rho^2\sin 2\alpha)\,d\rho$$

$$I_2 \int_0^\infty e^{-\rho^2\cos 2\alpha}\sin(\rho^2\sin 2\alpha)\,d\rho$$

il vient :

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = I_1\cos\alpha + I_2\sin\alpha$$

$$0 = I_1\sin\alpha - I_2\cos\alpha$$

d'où l'on tire :

$$I_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cos\alpha ; \qquad I_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sin\alpha$$

Si l'on fait, dans les intégrales I_1 et I_2, le changement de variable : $\rho\sqrt{\sin 2\alpha} = u$, ces égalités deviennent :

$$(F)\quad \begin{cases} \int_0^\infty e^{-u^2 \cot g 2\alpha} \cos u^2\, du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cos\alpha\sqrt{\sin 2\alpha} \\ \int_0^\infty e^{-u^2 \cot g 2\alpha} \sin u^2\, du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sin\alpha\sqrt{\sin 2\alpha} \end{cases}$$

Reste à démontrer que l'intégrale intermédiaire $\int_{AB} e^{-z^2}dz$ est nulle ; on applique pour cela le Lemme II. On a, le long de l'arc AB

$$z = Re^{i\varphi} = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) \ldots\ldots \varphi \text{ allant de } 0 \text{ à } \alpha ;$$

$$zf(z) = ze^{-z^2} = Re^{i\varphi}e^{-R^2\cos 2\varphi}e^{-Ri\sin 2\varphi}$$

Le module du second membre est $Re^{-R^2\cos 2\varphi}$; son maximum correspond au minimum de $\cos 2\varphi$ sur l'arc, c'est-à-dire à $\varphi = \alpha$. Ce maximum est donc

$$Re^{-R^2\cos 2\alpha}$$

et tend vers zéro pour R infini, puisque l'hypothèse $\alpha < \frac{\pi}{4}$ entraîne $\cos 2\alpha > 0$. D'après le lemme II l'intégrale $\int_{AB}$ est donc nulle, et les formules (F) ci-dessus sont démontrées.

Sont-elles vraies pour le cas limite de $\alpha = \frac{\pi}{4}$? Ici, le lemme II ne s'applique plus, car le maximum de $zf(z)$, à savoir $Re^{-R^2\cos 2\alpha}$, est alors R et ne tend plus vers zéro pour R infini.

Il faut donc recourir à une autre méthode, pour établir que l'intégrale $\int_{AB}$ est nulle.

On a, en gardant les notations ci-dessus $(z = Re^{i\varphi})$:

$$\int_{AB} e^{-z^2}dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\varphi}e^{-iR^2\sin 2\varphi}e^{i\varphi}Ri\,d\varphi$$

Le module du second membre est inférieur à l'intégrale obtenue en remplaçant chacun des facteurs sous le signe $\int$ par son module, c'est-à-dire à l'intégrale réelle

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} R e^{-R^2 \cos 2\varphi} d\varphi$$

Il suffit donc de prouver que J tend vers zéro pour R infini ; or en posant

$2\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$ il vient :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R e^{-R^2 \sin\theta} d\theta$$

De 0 à $\frac{\pi}{2}$, $\sin\theta$ est supérieur à $\frac{\theta}{2}$, comme on le reconnaît aisément ; on augmente donc J en remplaçant $\sin\theta$ par $\frac{\theta}{2}$, c'est-à-dire :

$$J < \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R e^{-R^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = -\frac{R}{2} \cdot \frac{2}{R^2} \left[e^{-R^2 \frac{\theta}{2}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

ou :

$$J < \frac{1}{R} \left[1 - e^{-\frac{\pi}{4} R^2} \right]$$

quantité qui a pour limite zéro, pour R infini C.q.f.d.

Donc les formules (F) sont vraies pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$; elles donnent alors :

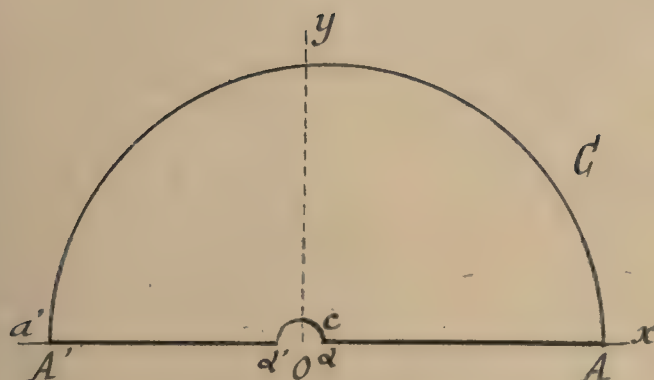
$$\int_0^{\infty} \cos u^2 \, du = \int_0^{\infty} \sin u^2 \, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} ;$$

ce sont les Intégrales de Fresnel.

73. – Calcul de $\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{1-x} dx$, et de $\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$. – Soit la fonction

$$f(z) = \frac{z^{p-1} - z^{q-1}}{1-z} \qquad (0 < p, q < 1) ;$$

elle admet comme point de branchement $z = 0$, puisque p et q sont supposés non entiers ; elle est monodrome dans un contour simple ne comprenant pas ce point, par exemple dans le contour K ci-contre (traits pleins) formé par deux circonférences C et c, de centre 0, de rayons infiniment grand et



infiniment petit, et par les segments $A'\alpha'$, αA de l'axe des x.

Pour définir complètement $f(z)$ dans ce contour, nous choisirons parmi les valeurs de z^{p-1} (et z^{q-1}) celle qui est réelle et positive sur la partie positive de Ox, c. à. d. celle qui est réelle et positive pour z réel et positif. Or si $z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, on a :

$$z^{p-1} = \rho^{p-1}\left[\cos(p-1)\varphi + i \sin(p-1)\varphi\right];$$

sur Ox, $\varphi = 2K\pi$ et pour que z^{p-1} soit réel et positif, il faut prendre $K = 0$.

En d'autres termes, l'argument, φ, de z est nul sur le côté Ox du contour ; par suite, en un point quelconque intérieur au contour, il est compris entre 0 et π ; sur Ox' il est égal à π.

Cela posé, je dis que $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur de K et sur K. Le numérateur en effet, $z^{p-1} - z^{q-1}$, y est holomorphe, puisque le point critique 0 est extérieur au contour ; le dénominateur, $1 - z$, s'annule il est vrai sur le contour, pour $z = 1$, mais en ce point le numérateur, $z^{p-1} - z^{q-1}$, s'annule aussi, et comme ce numérateur est holomorphe autour du point $z = 1$, le zéro 1 est au moins d'ordre un, de sorte que $f(z)$ reste fini. Il en résulte bien que $f(z)$ est holomorphe dans K et sur K ; par suite l'intégrale $\int_K f(z)\,dz$, prise le long de ce contour, est nulle.

Cette intégrale se décompose en quatre autres :

1°. et 2°. Les intégrales le long des demi-cercles C et c ; elles sont nulles, car $z f(z)$ tend vers zéro pour $z = 0$ ou $z = \infty$, puisque p et q sont compris entre 0 et 1 (Lemmes I et II, N°. 69).

3°. L'intégrale réelle de α à A, $\int_0^\infty \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{1 - x}\,dx$, que nous désignerons par J : (elle a une valeur finie et déterminée, comme on le voit aisément en appliquant les règles du Cours de première année).

4° L'intégrale suivant $A'\alpha'$. Or le long de Ox', l'argument de z étant π, on a

$$z = \rho e^{\pi i}, \text{ d'où } z^{p-1} = \rho^{p-1} e^{(p-1)\pi i} = -\rho^{p-1} e^{p\pi i} \text{ ; par suite :}$$

$$\int_{A'}^{\alpha'} = \int_{\infty}^{0} \frac{\rho^{p-1} e^{p\pi i} - \rho^{q-1} e^{q\pi i}}{1+\rho}\, d\rho, \text{ ...... } \rho \text{ étant réel ;}$$

donc finalement :

$$J + \int_{\infty}^{0} \frac{\rho^{p-1} e^{p\pi i} - \rho^{q-1} e^{q\pi i}}{1+\rho}\, d\rho = 0,$$

et, en séparant le réel de l'imaginaire ($e^{p\pi i} = \cos p\pi + i \sin p\pi$) :

$$(J) \quad \begin{cases} J = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\rho^{p-1}\cos p\pi - \rho^{q-1}\cos q\pi}{1+\rho}\, d\rho \\ 0 = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\rho^{p-1}\sin p\pi - \rho^{q-1}\sin q\pi}{1+\rho}\, d\rho \end{cases}$$

Ces deux relations vont nous permettre de calculer les deux intégrales que nous avons en vue.

74. — Prenons d'abord la seconde relation (J) ; elle s'écrit, en posant pour abréger,

$$F(p) = \int_0^{\infty} \frac{\rho^{p-1}}{1+\rho}\, d\rho \ :$$

$$F(p) \sin p\pi = F(q) \sin q\pi$$

Or lorsque p et q sont des variables indépendantes, une fonction p seul ne peut être égale à une fonction de q seul, que si ces deux fonctions se réduisent à une même constante indépendante de p, q. Donc :

$$F(p) = \frac{A}{\sin p\pi}$$

Pour déterminer la constante absolue A, observons que l'intégrale $F(p)$ n'est autre chose (N° 23) que le produit $\Gamma(p)\,\Gamma(1-p)$, en sorte qu'on a $\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \dfrac{A}{\sin p\pi}$; et si on fait dans cette relation

$p = \frac{1}{2}$, il vient, puisque $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (N° 24), $A = \pi$. Donc

$$\int_0^{\infty} \frac{\rho^{p-1}}{1+\rho}\, d\rho = \Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi},$$

formule annoncée au N° 23.

75. — Prenons maintenant la première relation (J); elle s'écrit :

$$J = \cos p\pi \int_0^{\infty} \frac{\rho^{p-1}}{1+\rho}\, d\rho - \cos q\pi \int_0^{\infty} \frac{\rho^{q-1}}{1+\rho}\, d\rho\,;$$

ou en tenant compte de la formule précédente :

(2) $$J \text{ c.à.d. } \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{1-x}\, dx = \pi\left[\cot p\pi - \cot q\pi\right]$$

Intégrales des différentielles algébriques.

---

76. — Comme on l'a dit dans l'avant-propos placé en tête du présent Chapitre, la Théorie de Cauchy permet d'étudier complètement, grâce à l'emploi des imaginaires, les fonctions qui proviennent de l'intégration des fonctions algébriques : on se bornera ici à deux exemples.

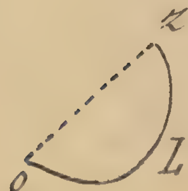
77. — Etude de l'Intégrale $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$. — Cette fonction est arc Sin z ; mais on peut l'étudier, en partant de l'intégrale, sans connaître sa liaison avec les fonctions trigonométriques : on posera donc

(1) $$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = F(z),$$

l'intégrale étant prise le long d'une ligne, L, quelconque, allant du point 0 au point z, et en supposant qu'on parte de 0 avec la valeur +1 du radical $\sqrt{1-z^2}$.

Comme cette intégrale porte sur une fonction non monodrome de z ($\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ admet en effet deux points critiques $z = \pm 1$), elle aura différentes valeurs selon la forme de la ligne L. Etudions ces valeurs.

Observons d'abord qu'un chemin quelconque, L, allant de 0 à z se ramène, au point de vue de la valeur de l'intégrale, à un chemin fermé allant de 0 à 0, suivi d'un chemin déterminé, le segment rectiligne $0z$, par exemple, allant de 0 à z : il suffit en effet d'ajouter à la ligne L le segment $z0$, que l'on fera suivre immédiatement du même segment décrit en sens inverse $0z$, (ce qui ne change pas la valeur de l'intégrale) pour obtenir un chemin fermé $(L + z0)$ suivi du segment $0z$:



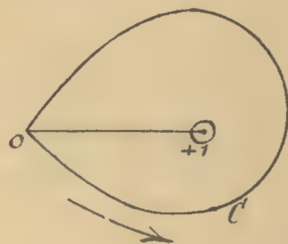
On est ainsi ramené à étudier les valeurs de l'intégrale (1) le long des chemins fermés allant de 0 à 0.

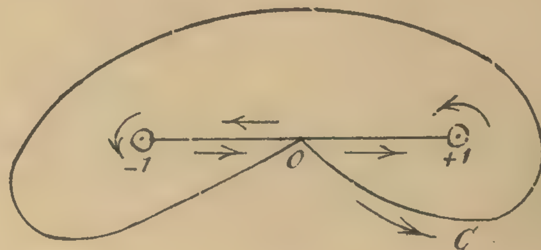
Considérons à cet effet ce qu'on nomme les lacets relatifs aux deux points critiques ± 1, c. à. d. les chemins obtenus comme il suit : on va, en ligne droite (suivant $0x$ par conséquent) de 0 à un point très voisin de $+1$, on décrit ensuite autour de $+1$ un cercle très petit, et on revient en 0 par le chemin rectiligne suivi à l'aller ; ce chemin s'appelle le lacet $+1$. On définit de même le lacet -1.



Je dis maintenant qu'un chemin fermé quelconque, C, allant de 0 à 0 se ramène, au point de vue de la valeur de l'intégrale, à des combinaisons de lacets.

Considérons, par exemple, les chemins C des deux figures ci-dessous :





le premier équivaut au lacet +1 ; car on peut déformer C_1, ses extrémités 0 et 0 restant fixes, de manière à le faire coïncider avec le lacet +1, sans traverser de point critique (N° 52). De même dans la seconde figure, on peut déformer C_1 sans traverser de point critique de manière à le faire coïncider avec le chemin formé du lacet +1, suivi du lacet −1.

On verrait aisément qu'il en est de même dans tous les cas.

Cherchons alors les valeurs de l'intégrale le long des lacets.

Partons de 0 avec la valeur +1 du radical $\sqrt{1-z^2}$, et décrivons le lacet +1 dans un sens quelconque : l'intégrale le long du lacet se compose : 1° de l'intégrale rectiligne suivant 0m, dont la limite, quand le rayon du petit cercle tend vers zéro, est l'intégrale (réelle)

0 m +1

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \left(\text{arc Sin}\, z\right)_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

2° de l'intégrale suivant le petit cercle qui est nulle à la limite, car $\frac{z-1}{\sqrt{1-z^2}}$ tend vers zéro pour $z=1$ (N° 69, Lemme I) ; 3° de l'intégrale de retour suivant m0 : celle-ci est égale à la première, car la rotation autour de +1 a changé le signe de $\sqrt{1-z}$ (N° 43) et par suite celui de $\sqrt{1-z^2} = \sqrt{1-z}\,\sqrt{1+z}$; dz change également de signe dans le retour de sorte que $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ reprend, en chaque point de 0m, la même valeur au retour qu'à l'aller.

L'intégrale le long du lacet +1 est donc π, quand le signe du radical au départ est +1 ; elle serait évidemment $-\pi$ avec le signe initial −1.

De même l'intégrale le long du lacet −1 est $2\int_0^{-1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\pi$, le signe initial du radical étant + ; elle est $+\pi$ si ce signe est −.

Observons enfin que si on décrit successivement le lacet +1 et le lacet −1, en partant au début avec le signe + du radical, l'intégrale, le long de ce chemin, est $\pi + \pi = 2\pi$: car après le parcours du lacet +1, on est revenu en 0 avec le signe − du radical, et le second lacet est décrit, dès lors, avec ce signe initial −. De même si on décrit deux fois de suite le lacet +1, l'intégrale le long de

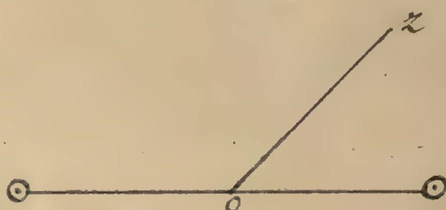
ce chemin est $\pi - \pi$, c. à. d. zéro.

79. — Soit maintenant U la valeur de l'intégrale le long du segment rectiligne Oz, le signe initial du radical étant $+$; on vient de voir (N°s 77 et 78) que la valeur la plus générale de l'intégrale

$$F(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

s'obtient en prenant pour ligne d'intégration une suite de lacets, suivie du segment rectiligne Oz. Si avant de décrire Oz on a





décrit le lacet $+1$, l'intégrale le long de ce chemin est $\pi - U$,[1] si on a décrit le lacet $+1$, puis le lacet -1, puis Oz, l'intégrale correspondante est $2\pi + U$.

En décrivant une suite quelconque de lacets avant de décrire Oz, on voit par là, sans difficulté, que l'intégrale correspondante est $2m\pi + U$ ou $(2n+1)\pi - U$; de sorte, finalement, que les valeurs de l'intégrale $F(z)$, pour une valeur donnée de z, sont comprises dans les formules

$$2m\pi + U\,; \quad (2n+1)\pi - U\,.$$

Tel est le résultat cherché; on le met sous une forme plus intéressante en introduisant la fonction inverse de l'intégrale.

Posons en effet :

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\,,$$

---

[1] le signe $-$ devant U provient de ce que, après le parcours du lacet $+1$ on est revenu en 0 avec le signe $-$ du radical ; le segment Oz est donc décrit avec le signe initial $-$, d'où $-U$ pour l'intégrale correspondante.

et regardons z comme fonction de u ; $z=\varphi(u)$. Admettons qu'on ait établi que z est une fonction monodrome de u (en fait, $z=\sin u$) ; d'après ce qui précède, à une même valeur de z correspondent, pour u, les valeurs $2m\pi+U$, $(2n+1)\pi-U$; donc, inversement, aux valeurs $2m\pi+u$ et $(2n+1)\pi-u$, de la variable u, correspond une seule et même valeur de z.

On a donc :

$$\varphi(2m\pi+u)=\varphi(u)=\varphi(2n\pi+\pi-u) ;$$

c. à d. que $\varphi(u)$ admet la période 2π, et que $\varphi(\pi-u)=\varphi(u)$.

On retrouve ainsi les propriétés connues de l'arc Sin ou du Sinus, par une méthode dont la portée est évidemment considérable. On va l'appliquer à un exemple moins élémentaire.

80. – Etude de l'Intégrale elliptique de première espèce. –

Prenons cette intégrale (Cours de 1ère année, p. 159) sous la forme $\int \frac{dz}{\sqrt{Z}}$, Z désignant un polynôme de troisième ordre, à coefficients réels ou non, et dont nous appellerons les racines e_1, e_2, e_3. Posons

$$(2) \qquad u=u_0+\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{Z}}$$



u_0 et z_0 étant des constantes quelconques.

Formons les lacets relatifs aux trois points critiques e_1, e_2, e_3, en partant du point z_0 : on voit, comme dans l'exemple précédent, que la valeur la plus générale de l'intégrale, quand on déforme arbitrairement la ligne d'intégration qui va de z_0 à z, s'obtient, en prenant pour ligne d'intégration une suite de lacets, suivie du segment $z_0 z$.

L'intégrale le long du lacet e_1 est égale (N° 78) à deux fois l'intégrale rectiligne $\int_{z_0}^{e_1}\frac{dz}{\sqrt{Z}}$; on posera

$$(3) \qquad 2\int_{z_0}^{e_\alpha}\frac{dz}{\sqrt{Z}}=2A_\alpha \qquad (\alpha=1,2,3)$$

en supposant, que dans 3 intégrales, on parte de z_0 avec une valeur déterminée, $\sqrt{Z_0}$, du radical $\sqrt{Z}$.

L'intégrale le long d'un chemin formé des lacets $e_\alpha, e_\beta, e_\gamma \dots$ sera donc, la valeur initiale du radical étant $\sqrt{Z_0}$:

$$2A_\alpha - 2A_\beta + 2A_\gamma - \dots;$$

le signe − devant $2A_\beta$ provenant de ce que le parcours du lacet e_α a changé le signe du radical.

Si maintenant U est la valeur de l'intégrale suivant le segment $z_0 z$, la valeur initiale du radical étant $\sqrt{Z_0}$, les valeurs de la fonction $u(z)$ pour une même valeur de z, seront comprises, selon que le nombre des lacets parcourus sera pair ou impair, dans l'une ou l'autre des formules

$$u = \begin{cases} u_0 = 2A_\alpha - 2A_\beta + 2A_\gamma - 2A_\delta + \dots + U \\ u_0 + 2A_\alpha - 2A_\beta + 2A_\gamma - \dots\dots\dots U \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ désignant les chiffres 1, 2, 3 dans un ordre quelconque et étant en nombre pair dans la première formule, impair dans la seconde.

Réunissons dans ces formules les termes en A_1, A_2, A_3; elles deviennent :

$$u = \begin{cases} u_0 + 2m_1 A_1 + 2m_2 A_2 + 2m_3 A_3 + U, \dots \text{ avec } m_1 + m_2 + m_3 = 0 \\ u_0 + 2m'_1 A_1 + 2m'_2 A_2 + 2m'_3 A_3 - U, \dots \text{ avec } m'_1 + m'_2 + m'_3 = 1; \end{cases}$$

ce qu'on peut écrire :

$$u = u_0 + 2m_1 A_1 + 2m_2 A_2 + 2m_3 A_3 + \begin{cases} U \\ 2A_1 - U \end{cases}$$

m_1, m_2, m_3 étant des entiers quelconques, de somme nulle.

Posons maintenant pour simplifier :

(4) $\qquad \omega_1 = A_3 - A_2\,; \quad \omega_2 = A_1 - A_3\,; \quad \omega_3 = A_2 - A_1 \quad (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0)$

on pourra écrire :

$$u = u_0 + 2m_1(A_1 - A_3) - 2m_2(A_3 - A_2) + 2(m_1 + m_2 + m_3)A_3 + \begin{cases} U \\ 2A_1 - U \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(5) \qquad u = 2m_1\omega_2 - 2m_2\omega_1 + \begin{cases} u_0 + U \\ u_0 + 2A_1 - U. \end{cases}$$

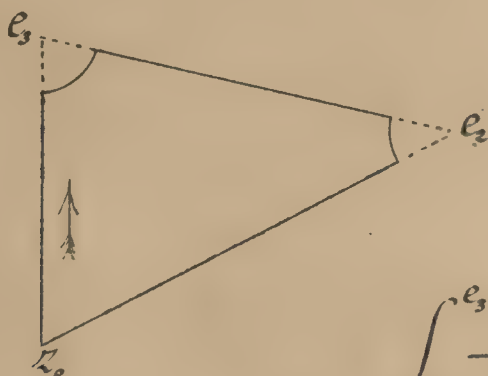
m_1 et m_2 étant des entiers quelconques.

81. — De là résultent d'importantes conséquences.

Observons d'abord que les quantités (dites périodes) $2\omega_1$, $2\omega_2$, $(2\omega_3)$ ne dépendent pas de constantes u_0, z_0, mais seulement de e_1, e_2, e_3. On a en effet, pour (3) et (4) :

$$\omega_1 = A_3 - A_2 = \int_{z_0}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{Z}} - \int_{z_0}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{Z}},$$

les intégrales étant prises le long des segments z_0e_2, z_0e_3. Or si le point z_0 est à l'intérieur du triangle e_1, e_2, e_3, (ce qu'on peut toujours supposer puisque ce point est arbitraire) le contour ci-dessous (traits pleins), formés par les côtés du triangle $z_0\,e_3\,e_2$ interrompus par deux arcs de cercle infiniment petits de centres e_3 et e_2, ne contient à son intérieur aucun point critique de $\sqrt{Z}$; donc $\int \frac{dz}{\sqrt{Z}}$ le long de ce contour est nulle (N° 50) ; c'est-à-dire que



$$\int_{z_0}^{e_3} + \int_{e_3}^{e_2} + \int_{e_2}^{z_0} = 0$$ On en tire :

$$\int_{z_0}^{e_3} - \int_{z_0}^{e_2} = \int_{e_2}^{e_3} \; ; \text{ d'où :}$$

$$(6) \qquad \begin{cases} \omega_1 = \int_{e_2}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{Z}}, \text{ et de même} \\ \omega_2 = \int_{e_3}^{e_1} \; ; \; \omega_3 = \int_{e_1}^{e_2} \end{cases}$$

expressions indépendantes de z_0 et u_0.

1° Cela posé, faisons, pour préciser, $u_0 = \omega_1$ et $z_0 = e_1$; ce qui donne $A_1 = 0$. On a

$$(7) \qquad u = \omega_1 + \int_{e_1}^{z} \frac{dz}{\sqrt{Z}}.$$

Considérons la fonction inverse : $z = \varphi(u)$, et admettons (ce que nous établirons dans le chapitre des équations différentielles), que z soit une fonction monodrome et méromorphe de u. On voit par (5) que :

$$\varphi(u + 2\omega_1) = \varphi(u + 2\omega_2) = \varphi(u)$$

c'est-à-dire que z est une fonction doublement périodique de u, aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$.

2° Toujours d'après (5) à une valeur de z correspondent, à des multiples près des périodes, deux valeurs de u, à savoir $\omega_1 + U$ et $\omega_1 - U$, dont la somme est $2\omega_1$. On a donc

$$\varphi(u) = \varphi(2\omega_1 - u) = \varphi(-u) \text{....puisque } 2\omega_1 \text{ est une période.}$$

La fonction $\varphi(u)$ est donc paire.

3° Faisons successivement dans (7) $z = e_1, e_2, e_3$; on a, en tenant compte de (6) :

pour $z = e_1$: ...... $u = \omega_1 + \int_{e_1}^{e_1} = \omega_1$

$z = e_2$ ...... $u = \omega_1 + \int_{e_1}^{e_2} = \omega_1 + \omega_3$

$z = e_3$ ...... $u = \omega_1 + \int_{e_1}^{e_3} = \omega_1 - \omega_2$

d'où l'on conclut :

$$e_1 = \varphi(\omega_1)\,; \quad e_2 = \varphi(\omega_1 + \omega_3) = \varphi(\omega_2)\,; \quad e_3 = \varphi(\omega_1 - \omega_2) = \varphi(\omega_1 + \omega_2 - 2\omega_2) = \varphi(\omega_3)$$

$$(8) \qquad \text{c.à.d.} \quad \varphi(\omega_\alpha) = e_\alpha \text{ .... } (\alpha = 1, 2, 3)$$

On voit par là comment les fonctions doublement périodiques s'introduisent naturellement en analyse par l'inversion de l'intégrale

elliptique de première espèce : il est à observer que l'inversion des intégrales de seconde ou de troisième espèces ne conduirait pas à des fonctions inverses monodromes. C'est Abel qui a eu le premier l'idée d'introduire la fonction inverse, guidé par l'analogie avec l'intégrale qui donne l'arc sinus : il a pu ainsi découvrir la double périodicité, propriété fondamentale, qui avait échappé à Euler et à Legendre.

La théorie des fonctions doublement périodiques peut d'ailleurs s'établir indépendamment de la considération des intégrales elliptiques, et de la manière la plus simple : c'est ce sujet qui va nous occuper maintenant. Nous verrons ensuite comment ces fonctions permettent d'intégrer les différentielles elliptiques, ce qui est leur application principale.

Chapitre II.

Chapitre II.

Fonctions Elliptiques.

I. _ Généralités.

82. _ Définitions. _ Une fonction, $f(u)$, de la variable imaginaire, u, admet la période 2ω si l'on a :

$$f(u+2\omega)=f(u)$$

Si elle a plusieurs périodes, 2ω, $2\omega'$, ... elle admettra aussi la période $2m\omega+2m'\omega'+\dots$; m, m', ... étant entiers, positifs ou négatifs.

Marquons dans le plan les points $u=2m\omega+2m'\omega'+\dots$; le segment rectiligne compris entre deux quelconques d'entre eux représente une période, c'est-à-dire que la quantité imaginaire qui a pour module la distance de ces deux points et pour argument l'angle avec Ox de la droite qui les joint, est une période.

On nomme fonction elliptique une fonction méromorphe dans tout le plan, admettant deux périodes : ce nom vient de la relation de ces fonctions avec l'intégrale qui exprime la longueur de l'arc d'ellipse.

Il est clair que toutes les dérivées d'une fonction elliptique sont elliptiques, aux mêmes périodes.

Théorèmes sur les périodes.
(Question non traitée au Cours).

83. — Lemme. — Une fonction méromorphe, $f(u)$ qui admet une période de module aussi petit qu'on veut est une constante.

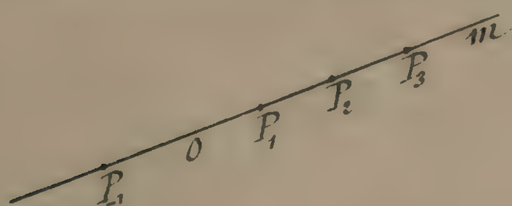
Soit α cette période ; u_0 étant une constante, on aura $f(u_0+\alpha) - f(u_0) = 0$; la fonction méromorphe $f(u) - f(u_0)$ admettra ainsi deux zéros, u_0 et $u_0+\alpha$, aussi voisins qu'on le voudra ; elle est par suite (N°.95) identiquement nulle, c'est-à-dire que $f(u)$ est une constante.

Théorème I. — Le rapport des deux périodes d'une fonction elliptique, $f(u)$, est imaginaire (Jacobi).

Nous nous appuierons sur la remarque suivante :

Soit une suite de quantités positives, x, en nombre infini, $x_1, x_2, \dots$, dont aucune n'est nulle ; deux cas pourront se présenter. 1° Ou bien une de ces quantités sera inférieure (ou au plus égale) à chacune des autres, c'est-à-dire qu'il existera, dans la suite, un nombre minimum, non nul ; 2° ou bien étant donnée une quelconque, x_n, des quantités x, on pourra toujours trouver $x_{n+1} < x_n$, puis $x_{n+2} < x_{n+1}$, et ainsi de suite. On formera ainsi une série infinie de nombres décroissants, $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$ qui tendent vers une limite, A, car une quantité variable, qui décroît constamment et restant positive, a une limite. En d'autres termes, il y a une infinité de nombres x compris entre A et $A+\varepsilon$, si petit que soit ε. (Exemple, les nombres $1+\frac{1}{n}$, n entier et positif ; $A=1$).

Cela posé, pour établir le théorème de Jacobi, admettons que le rapport des périodes $2\omega_2$, $2\omega_1$, soit réel : les points $u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$, que nous appellerons points-périodes, sont alors sur une même droite, Om, issue de l'origine. Parmi ces points, abstraction faite de O, cherchons les plus rapprochés de O ; d'après la remarque précédente, deux cas sont à distinguer :



1° Un des points-périodes, P_1, est plus rapproché de O

l'origine que tous les autres ; 2° aucun n'est plus rapproché, c'est-à-dire qu'il y a une infinité de ces points au voisinage d'un point A, de la droite Om.

La seconde hypothèse est inadmissible : en effet, on pourrait toujours trouver, au voisinage de A, deux points-périodes dont la distance soit inférieure à un nombre ε, si petit qu'il soit ; il y aura donc, puisque le segment rectiligne compris entre deux points-périodes représente une période, une période, α, de module aussi petit qu'on veut, et par suite (Lemme) la fonction $f(u)$ sera une constante.

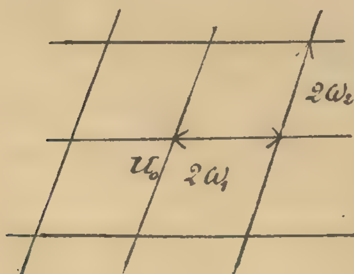
Reste la première hypothèse : il y a un point P_1, au moins aussi rapproché de O que tous les autres. Le segment OP_1 représente alors une période 2Ω, de module minimum ; les points $P_2, P_3, \ldots P_{-1}$, compris dans la formule $2m\Omega$, sont des points-périodes. Je dis qu'il n'y en a pas d'autres : car, s'il en existait un, P, compris entre P_2 et P_3, par exemple, la période représentée par le segment P_2P aurait un module inférieur à OP_1, c'est-à-dire à mod 2Ω. Les points-périodes, et par suite les périodes, sont donc compris dans la formule $2m\Omega$, et il n'y a, en réalité qu'une seule période, 2Ω.

Corollaire. — Si une fonction elliptique a la période réelle, $2\omega_1$, les périodes, autres que $2m_1\omega_1$, sont imaginaires.

84. — Représentation géométrique de la double périodicité. — Le rapport des deux périodes étant imaginaires, les points

$$u = u_0 + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$$

ne sont pas en ligne droite : ils sont les sommets d'un réseau de parallélogrammes, dont les côtés représentent les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, et dont un sommet est le point arbitraire $u = u_0$. Un quelconque de ces parallélogrammes se nomme parallélogramme des périodes.



La fonction elliptique, $f(u)$, reprend la même valeur en tous les points analogues du réseau ; il suffit donc de connaître ses valeurs et ses propriétés à l'intérieur d'un parallélogramme pour les connaître dans tout le plan.

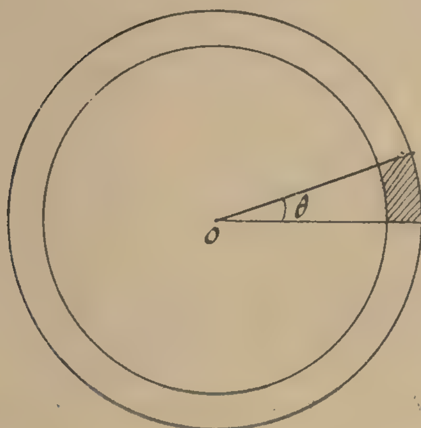
85. — Théorème II. — Une fonction monodrome ne peut admettre plus de deux périodes. (Jacobi).

Supposons, en effet, qu'il y ait trois périodes, $2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3$: leurs rapports, deux à deux, seront imaginaires, sinon, d'après le Théorème I, la fonction périodique serait une constante, ou les périodes se réduiraient à moins de trois. Considérons, dans le plan, les points périodes

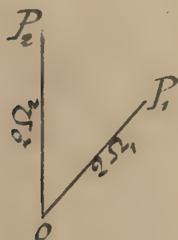
$$u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2 + 2m_3\omega_3,$$

abstraction faite de l'origine O ; deux cas sont à distinguer : 1° l'un d'eux est au moins aussi rapproché de l'origine que tous les autres ; 2° il y a une infinité de ces points dont la distance à l'origine est aussi voisine qu'on veut d'une limite, ρ.

La seconde hypothèse est inadmissible : il y aurait, en effet, entre les circonférences, de centre O, de rayons ρ et $\rho+\varepsilon$, une infinité de points-périodes, et, par suite, si l'on divise la couronne en secteurs correspondant à un angle au centre θ, pris aussi petit qu'on veut, un au moins des secteurs comprendrait une infinité de points-périodes. Or, la distance de deux de ces points étant le module d'une période et les dimensions du secteur pouvant devenir aussi petites qu'on veut, on formerait ainsi une période de module inférieur à toute quantité donnée, et par suite (Lemme) la fonction $f(u)$ serait une constante.

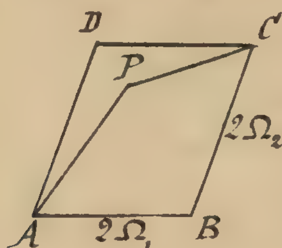


Reste donc la première hypothèse : il y a un point période, P_1, au moins aussi rapproché de O que tous les autres ; soit $2\Omega_1$ la période, de module minimum, représentée par le segment OP_1. Si maintenant on supprime le point P_1 et tous les points-périodes situés sur la droite OP_1, le même raisonnement montre que, parmi les points-périodes restants (et il ne reste, sinon tous ces points seraient en ligne droite, et les rapports deux à deux de $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$ seraient



réels) il y a un point P_2, au moins aussi rapproché de 0 que tous les autres : la période, $2\Omega_2$, représentée par $0P_2$, est celle qui a le module minimum parmi toutes les périodes dont le segment représentatif n'est pas parallèle à $0P_1$. D'ailleurs P_2 n'étant pas sur la droite $0P_1$ le rapport $\frac{2\Omega_2}{2\Omega_1}$ est imaginaire; on peut donc construire un réseau de parallélogrammes, dont les côtés sont les périodes $2\Omega_1$ et $2\Omega_2$, un des sommets du réseau étant l'origine.

Tous les sommets du réseau sont des points-périodes : je dis qu'il n'y en a pas d'autres. En effet, s'il en existait un autre, P, il serait sur les côtés ou à l'intérieur d'un des parallélogrammes, $ABCD$, du réseau. Or il ne peut être : 1° ni sur le côté AB (ou CD), car le segment AP (ou CP) représenterait une période de module inférieur à mod. $2\Omega_1$; 2° ni sur le côté AD (ou BC), car le segment AP (ou CP) représenterait une période, de segment représentatif non parallèle à AB, et de module inférieur à mod. $2\Omega_2$; 3° ni à l'intérieur du parallélogramme, car l'inégalité évidente :



$AP + PC < AD + DC < 2AD$, c'est-à-dire < 2 mod. $2\Omega_2$, montre que l'une des périodes représentées par AP et PC aurait son module inférieur à mod $2\Omega_2$.

Les points-périodes, c'est-à-dire les périodes, sont donc tous compris dans la formule $2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2$, et il n'y a en, en réalité que deux périodes, $2\Omega_1$ et $2\Omega_2$.

L'impossibilité de trois périodes, et a fortiori d'un plus grand nombre, est donc établie.

Théorèmes sur les fonctions elliptiques.

86. – Théorème III. – Une fonction elliptique qui ne devient pas infinie est une constante.

En effet, le module de cette fonction dans un parallélogramme, et par suite dans tout le plan, est limité; donc (N° 64), la fonction se réduit à une constante.

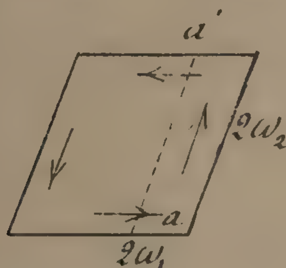
87. – On dit qu'une fonction elliptique est d'ordre n si elle a n pôles dans un parallélogramme des périodes (un pôle double étant compté pour deux et ainsi de suite). Il est clair qui si $f(u)$ est d'ordre n, $f^2(u)$ est d'ordre $2n$, etc.......

Théorème IV. – La somme des résidus d'une fonction elliptique par rapport aux pôles situés dans un parallélogramme des périodes est nulle.

Car elle est égale (N° 67) à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(u)\,du,$$

prise sur le contour du parallélogramme, dans le sens positif.



Or les intégrales relatives à deux côtés opposés se détruisent, car en deux points correspondants, (situés sur une même parallèle à l'autre côté) tels que a et a', $f(u)$ a la même valeur, et du des valeurs égales et de signes contraires.

88. – Il n'y a pas de fonction elliptique d'ordre un.

Car une telle fonction n'aurait qu'un pôle simple ; son développement autour de ce pôle, a, serait donc de la forme (N° 66) :

$$f(u) = \frac{A}{u-a} + B_0 + B_1(u-a) + \cdots,$$

A étant le résidu ; la somme des résidus relatifs aux pôles intérieurs à un même parallélogramme étant nulle, on aurait $A = 0$, et a ne serait pas un pôle.

89. – Théorème V. – Une fonction elliptique a autant de zéros que de pôles dans un parallélogramme des périodes.

Car la différence, $m-n$, entre le nombre de zéros et celui des pôles est égale (N° 68) à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(u)}{f(u)}\,du,$$

prise le long du contour du parallélogramme. Or cette intégrale

est nulle, car la fonction $f'(u)$ admettant les mêmes périodes que $f(u)$, les intégrales relatives aux côtés opposés se détruisent.

Corollaire. — L'équation $f(u) = c$, (c étant une constante) a n solutions dans chaque parallélogramme, si n est d'ordre de la fonction elliptique $f(u)$: car la fonction elliptique, $f(u) - c$, ayant les mêmes pôles que $f(u)$ est d'ordre n.

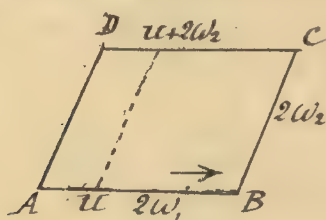
90. — Théorème VI. — La somme des valeurs des zéros d'une fonction elliptique est égale à celle des valeurs des pôles contenus dans le même parallélogramme, à une période près.

En effet, la différence entre la somme des valeurs des zéros et celle des valeurs des pôles, dans un même parallélogramme, est égale (N° 68) à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(u)}{f(u)}\, u\, du,$$

prise dans le sens positif, le long du contour du parallélogramme.

Or on a, en désignant par u un point du côté AB, et par $z = u + 2\omega_2$ le point correspondant du côté CD :



$$\int_{CD} \frac{f'(z)}{f(z)}\, z\, dz = -\int_{AB} \frac{f'(u+2\omega_2)}{f(u+2\omega_2)}(u+2\omega_2)\, du$$

$$= -\int_{AB} \frac{f'(u)}{f(u)}(u+2\omega_2)\, du.$$

D'où :

$$\int_{AB} \frac{f'(u)}{f(u)}\, u\, du + \int_{CD} \frac{f'(z)}{f(z)}\, z\, dz = -\int_{AB} 2\omega_2 \frac{f'(u)}{f(u)}\, du$$

$$= -2\omega_2 \Big[\log f(u)\Big]_A^B$$

Mais aux points B et A, pour lesquels les valeurs de la variable u diffèrent de $2\omega_1$, $f(u)$ reprend la même valeur ; la différence des logarithmes est donc un multiple entier de $2\pi i$, soit $2K_2\pi i$; (car le logarithme d'une quantité n'est défini qu'à une constante,

$2K\pi i$, près); de même les intégrales suivant BC et DA donnent le terme $2\omega_1 . 2K_1\pi i$, et l'intégrale qui représente la différence entre les sommes des valeurs des zéros et des pôles est :

$$\frac{1}{2\pi i}\left(-2\omega_2 . 2K_2\pi i + 2\omega_1 . 2K_1\pi i\right) = 2K_1\omega_1 - 2K_2\omega_2,$$

c'est-à-dire une période. C. q. f. d.

91. — Théorème VII. — Une fonction elliptique est déterminée 1° à un facteur constant près lorsque l'on connaît ses zéros et ses pôles dans un parallélogramme avec leur ordre de multiplicité ; 2° à une constante additive près lorsque l'on connaît ses pôles et la partie infinie de son développement aux environs de chacun d'eux.

Car si deux fonctions elliptiques, $f(u)$ et $\varphi(u)$, satisfont aux conditions données, le quotient $\frac{f(u)}{\varphi(u)}$ dans le premier cas, la différence $f(u) - \varphi(u)$ dans le second, sera une fonction elliptique sans pôles, et par suite (N° 86) une constante.

92. — Théorème VIII. — Deux fonctions elliptiques, $f(u)$ et $\varphi(u)$, ayant les mêmes périodes, sont liées par une relation algébrique. — Soit en effet

$$F = \sum C_{\alpha\beta} f^\alpha(u)\varphi^\beta(u),$$

un polynôme de degré p par rapport à chacune des quantités $f(u)$ et $\varphi(u)$, et à coefficients, $C_{\alpha\beta}$, indéterminés. C'est une fonction elliptique de u, dont les périodes sont les mêmes que celles de f et de φ. Elle est d'ordre $p(n+\nu)$, si n et ν désignent les ordres de f et de φ : en effet, elle ne peut avoir d'autres pôles que ceux de f et de φ, et elle admet chacun d'eux au même ordre que la fonction $f^p\varphi^p$, qui est, dans F, le terme de l'ordre le plus élevé, et qui est évidemment d'ordre $p(n+\nu)$.

Cela posé, particularisons les coefficients $C_{\alpha\beta}$, en écrivant qu'aux environs de chacun des pôles de F la partie infinie du développement de F est identiquement nulle : pour un pôle d'ordre h, on a ainsi à annuler h coefficients (ceux de $(u-\alpha)^{-h}$, $(u-\alpha)^{-h+1}$, ... $(u-\alpha)^{-1}$) ;

ce qui donne en tout un nombre d'équations égal à Σh, c'est-à-dire à l'ordre $p(n+\nu)$ de $F(u)$. D'ailleurs ces équations sont évidemment linéaires et homogènes par rapport aux coefficients $c_{\alpha\beta}$, dont le nombre est $(p+1)^2$.

A nos $p(n+\nu)$ équations, ajoutons-en une, en écrivant que $F(u)$ est nulle pour une valeur particulière u_0 de u : cette équation sera encore linéaire et homogène par rapport aux $c_{\alpha\beta}$. Si p est choisi assez grand pour que le nombre, $p(n+\nu)+1$, des équations entre les c soit inférieur au nombre $(p+1)^2$ des inconnues $c_{\alpha\beta}$, (ce qui est toujours possible) on pourra déterminer ces inconnues de manière à vérifier les équations ; alors $F(u)$ n'ayant plus de pôles et s'annulant pour $u=u_0$ sera identiquement nulle : en d'autres termes, il y aura entre f et φ la relation algébrique $F=0$.

Décomposons le polynôme F en facteurs irréductibles ; l'un de ces facteurs, $\Phi(f,\varphi)$ sera nul et la véritable relation entre f et φ sera $\Phi(f,\varphi)=0$; les autres facteurs sont des solutions étrangères.

Cherchons a priori le degré de Φ par rapport à f et à φ. A chaque valeur de $f(u)$ correspondent, dans le parallélogramme des périodes communes, n valeurs de u (car la fonction elliptique $f(u)-C$ a autant de zéros que de pôles, c'est-à-dire n), et par suite n valeurs (au plus) de $\varphi(u)$. L'équation $\Phi=0$ est donc de degré n (au plus) par rapport à φ, et de degré ν (au plus) par rapport à f.

Corollaire. – Il existe une relation algébrique entre une fonction elliptique $f(u)$ et sa dérivée, $f'(u)$.

Soient $a, b, c, \dots$ les pôles de $f(u)$ dans un parallélogramme et $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ leurs ordres de multiplicité ; $f'(u)$ admettra ces pôles avec les ordres $\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, \dots$ (car si $f(u)=\frac{A_0}{(u-a)^\alpha}+\dots$, $f'(u)=\frac{-A_0\alpha}{(u_0-a)^{\alpha+1}}+\dots$) : l'équation entre f et f' sera donc d'ordre $\alpha+\beta+\gamma\dots=n$ par rapport à f, et d'ordre $\alpha+1+\beta+1+\gamma+1+\dots=n+h$ par rapport à f' : n étant l'ordre de $f(u)$ et h le nombre de ses pôles distincts.

II. – Les fonctions $\theta(u)$; $\sigma(u)$; $\zeta(u)$; pu.

93. – Il y a des fonctions elliptiques : nous allons former en effet, d'après Jacobi et Weierstrass, des fonctions particulières, permettant d'exprimer tous les autres.

Retour sur la fonction $\theta(u)$.

94. — On a défini, dans le cours de 1ère année (p. 74) une fonction $\theta(u)$ par la série

(1) $$\theta(u) = \frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)\frac{\pi i u}{2\omega_1}},$$

où

$$q = e^{\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}}$$

et ω_1, ω_2 désignant deux constantes quelconques, telles que $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ ait sa partie imaginaire positive.

Il a été démontré que la série est uniformément convergente dans tout le plan, et par suite que $\theta(u)$ est une fonction de u monodrome et continue dans tout le plan: une démonstration toute pareille établirait les mêmes propriétés pour la série des dérivées des termes de (1). Il en résulte (N° 55, II) que cette seconde série est la dérivée $\theta'(u)$ de $\theta(u)$; et aussi, d'après la définition des fonctions holomorphes, (N° 45) que $\theta(u)$ est holomorphe dans tout le plan.

Rappelons les propriétés démontrées de $\theta(u)$:

(2) $\theta(-u) = -\theta(u)$ .... Fonction impaire

(3) $\theta(u+2\omega_1) = -\theta(u)$

(4) $\theta(u+2\omega_2) = -q^{-1}e^{-\frac{\pi i u}{\omega_1}}\theta(u)$

On peut aussi mettre $\theta(u)$ sous la forme (Cours de 1ère Année, p. 76 note)

(5) $$\frac{1}{2}\theta(u) = q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\pi u}{2\omega_1} - q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{3\pi u}{2\omega_1} + q^{\frac{25}{4}}\sin 5\frac{\pi u}{2\omega_1} - \ldots\ldots$$

qui montre que $\theta(u)$ s'annule pour $u = 0$:

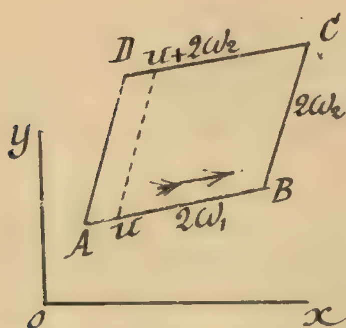
95. — Zéros de $\theta(u)$. — Les relations (3) et (4) montrent que si $\theta(u)$ s'annule pour $u = u_0$, elle s'annule aussi pour $u = u_0 + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$. Donc, pour avoir les zéros de $\theta(u)$ il suffit de chercher ceux qui sont dans un parallélogramme quelconque, P, construit avec les deux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$.

La fonction $\theta(u)$, holomorphe dans tout le plan, n'a

pas de pôles à distance finie; donc le nombre, M, de ses zéros compris à l'intérieur de P est (N° 68) :

$$M = \frac{1}{2\pi i}\int_P \frac{\theta'(u)}{\theta(u)}\,du,$$

l'intégrale étant prise sur le contour du parallélogramme P, dans le sens positif.[1]



Or les intégrales relatives aux côtés BC et DA se détruisent, car, en vertu de la relation $\theta(u+2\omega_1) = -\theta(u)$, la fonction $\frac{\theta'(u)}{\theta(u)}$ admet la période $2\omega_1$ (raisonnement du N° 87). Pour les côtés AB et CD, on a :

$$\int_{CD}\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}\,dz = -\int_{AB}\frac{\theta'(u+2\omega_2)}{\theta(u+2\omega_2)}\,du;$$

mais d'après la formule (4) dérivée logarithmiquement :

$$\frac{\theta'}{\theta}(u+2\omega_2) = \frac{\theta'}{\theta}(u) - \frac{\pi i}{\omega_1}$$

d'où :

$$\int_{CD}\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}\,dz = -\int_{AB}\frac{\theta'(u)}{\theta(u)}\,du + \frac{\pi i}{\omega_1}\int_{AB}du$$

et enfin :

$$2\pi i . M = \int_{AB}\frac{\theta'(u)}{\theta(u)}\,du + \int_{CD}\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}\,dz = \frac{\pi i}{\omega_1}\int_{AB}du = \frac{\pi i}{\omega_1}\int_{u_0}^{u_0+2\omega_1}du = 2\pi i$$

c'est-à-dire

$$M = 1$$

---

[1] Soit posé : $2\omega_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1)$; $2\omega_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2)$; on a : $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}\left[\cos(\varphi_2-\varphi_1) + i\,\sin(\varphi_2-\varphi_1)\right]$ d'où, puisque $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ a sa partie imaginaire positive, $\sin(\varphi_2-\varphi_1) > 0$. Or $\varphi_2-\varphi_1$ est l'angle DAB : cet angle est donc compris entre 0 et π, c'est-à-dire que les points D et C sont au-dessus de la droite AB; ou mieux qu'en décrivant le parallélogramme en suivant d'abord AB, puis BC, on le décrit dans le sens positif.

La fonction $\theta(u)$ n'a donc qu'un seul zéro, qui est un zéro simple dans chaque parallélogramme des périodes ; or on a vu plus haut qu'elle s'annule pour $u=0$; tous les zéros sont donc compris dans la formule :

$$u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2 .$$

La fonction σu.

96. _ Définissons maintenant une nouvelle fonction, σu, par la relation :

$$(1') \qquad \sigma u = 2\omega_1 A e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \theta(u) \; ;$$

A et η_1 étant deux constantes. Cette transformation a pour but d'obtenir une fonction jouissant de propriétés symétriques par rapport aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, ce qui n'est pas le cas de $\theta(u)$

On détermine les constantes A et η_1 par les conditions suivantes. D'après (1'), σu est, comme $\theta(u)$, une fonction impaire, admettant comme zéro simple le point $u=0$; elle est holomorphe dans tout le plan, puisque les deux facteurs $e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}$ et $\theta(u)$ jouissent de cette propriété : on peut donc la développer par la formule de Maclaurin, sous la forme :

$$\sigma u = \lambda_1 u + \lambda_3 u^3 + \lambda_5 u^5 + \cdots$$

ce développement étant valable dans tout le plan. On choisira les constante A et η_1 de manière que

$$\lambda_1 = 1 \; ; \quad \lambda_3 = 0$$

c'est-à-dire

$$\sigma'(0) = 1 \; ; \quad \sigma'''(0) = 0$$

Or on a, d'après (1') :

$$\sigma'(u) = 2\omega_1 A e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \theta'(u) + \cdots\cdots$$

$$\sigma'''(u) = 2\omega_1 A \left[e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \theta'''(u) + \cdots + 3\frac{\eta_1}{\omega_1} e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \theta'(u) + \cdots \right]$$

les termes non écrits ayant en facteur u ou $\theta(u)$, c'est-à-dire

s'annulant pour $u=0$. Donc :

$$\sigma'(0)=1=2\omega_1 A\theta'(0)$$
$$\sigma'''(0)=0=2\omega_1 A\left[\theta'''(0)+\frac{3\eta_1}{\omega_1}\theta'(0)\right]$$

relation qui donne A et η_1. Calculant $\theta'(0)$ et $\theta'''(0)$ en partant de la forme (5)

(5) $$\theta(u)=2q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\pi u}{2\omega_1}-2q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{3\pi u}{2\omega_1}+2q^{\frac{25}{4}}\sin\frac{5\pi u}{2\omega_1}-\dots$$

on trouve :

(2') $$\frac{1}{A}=2\pi\left[q^{\frac{1}{4}}-3q^{\frac{9}{4}}+5q^{\frac{25}{4}}-\dots\right]$$

(3') $$12\eta_1\omega_1=\pi^2\frac{q^{\frac{1}{4}}-3^3q^{\frac{9}{4}}+5^3q^{\frac{25}{4}}-\dots}{q^{\frac{1}{4}}-3q^{\frac{9}{4}}+5q^{\frac{25}{4}}-\dots}$$

Observons aussi que la valeur

$$2\omega_1 A\theta'(0)=1,$$

portée dans (1'), donne :

$$\sigma u=e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\frac{\theta(u)}{\theta'(0)}.$$

97. — Propriétés de σu. — 1° Comme on l'a dit, σu est une fonction holomorphe dans tout le plan ; impaire ; et son développement suivant les puissances croissantes de u est de la forme :

(4') $$\sigma u=u+*+\lambda_5 u^5+\lambda_7 u^7+\dots$$

Cette série converge quelque soit u.

2° Les zéros de σu sont, d'après (1'), ceux de $\theta(u)$ c'est-à-dire

$$u=2m_1\omega_1+2m_2\omega_2$$

ce sont des zéros simples.

3° — Si on change u en $u+2\omega_1$ dans (1'), on a, d'après la formule $\theta(u+2\omega_1)=-\theta(u)$:

(5') $$\sigma(u+2\omega_1)=-2\omega_1 A e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}(u+2\omega_1)^2}\theta(u)=-\sigma u\, e^{2\eta_1(u+\omega_1)}.$$

4°. — Si on change u en $u+2\omega_2$, on a, d'après la formule $\theta(u+2\omega_2) = -q^{-1} e^{-\frac{\pi i u}{\omega_1}} \theta(u)$:

$$\sigma(u+2\omega_2) = -2\omega_1 A e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}(u+2\omega_2)^2} e^{-\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1} - \frac{\pi i u}{\omega_1}} \theta(u)$$

$$= -\sigma(u) e^{\frac{u}{\omega_1}(2\eta_1\omega_2 - i\pi) + \frac{\omega_2}{\omega_1}(2\eta_1\omega_2 - i\pi)}$$

Introduisons, pour la symétrie, une nouvelle constante, η_2, définie par la relation :

(6') $$2\eta_1\omega_2 - i\pi = 2\eta_2\omega_1 ; \quad d'où \quad \eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{i\pi}{2} ;$$

l'équation précédente devient :

(7') $$\sigma(u+2\omega_2) = -\sigma u \, e^{2\eta_2(u+\omega_2)}$$

formule analogue à (5').

5°. — Il y a avantage, pour la symétrie, à introduire deux nouvelles quantités, ω_3 et η_3 définies par :

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0 ;$$

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0$$

et, en portant les valeurs de ω_2 et η_2, tirées de ces dernières relations, dans (6'), il vient :

(8') $$2(\omega_1\eta_3 - \eta_1\omega_3) = i\pi$$

Calculons maintenant $\sigma(u-2\omega_3)$; on a :

$$\sigma(u-2\omega_3) = \sigma(\overline{u+2\omega_1} + 2\omega_2), \text{ et, d'après (7') et (5')}$$

$$= -\sigma(u+2\omega_1) e^{2\eta_2(u+2\omega_1+\omega_2)}$$

$$= \sigma(u) e^{2\eta_1(u+\omega_1) + 2\eta_2(u+2\omega_1+\omega_2)} = \sigma(u) e^{2u(\eta_1+\eta_2) + 2\omega_1(\eta_1+\eta_2) + 2\eta_2(\omega_1+\omega_2)}$$

$$= \sigma(u) e^{-2u\eta_3 - 2\omega_1\eta_3 + 2\omega_3(\eta_1+\eta_3)}, \text{ et, d'après (8') :}$$

$$\sigma(u-2\omega_3) = -\sigma(u) e^{-2u\eta_3 + 2\eta_3\omega_3}$$

Changeant dans cette relation u en $u+2\omega_3$, on a finalement :

(9') $$\sigma(u+2\omega_3) = -\sigma u \cdot e^{2\eta_3(u+\omega_3)}$$

formule analogue à (5') et (7').

Les trois formules (5'), (7'), (9') se résument en une seule :

(10') $$\sigma(u+2\omega_\alpha) = -\sigma u \; e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)} \ldots\ldots (\alpha = 1, 2, 3)$$

La fonction ζu.

98. — Définition et propriétés. — La fonction ζu est, par définition, la dérivée logarithmique de σu :

$$\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u}$$

1° D'après cela, ζu est quotient de deux fonctions holomorphes dans tout le plan ; car σu étant holomorphe sa dérivée l'est aussi (N° 58). La fonction ζu est donc méromorphe dans le plan, c'est une fonction impaire, car σu étant impaire, $\sigma' u$ est paire.

2° Les pôles de ζu sont les zéros de σu, c'est-à-dire

$$u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2 \,;$$

ce sont des pôles simples, puisque ce sont des zéros simples de σu. Le développement de ζu autour du pôle $u=0$ se déduit de celui de σu ; on a :

$$\zeta u = \frac{1 + 5\lambda_5 u^4 + \cdots}{u + \lambda_5 u^5 + \cdots}$$

et, en faisant la division ordonnée suivant les puissances croissantes de u :

(11') $$\zeta u = \frac{1}{u} + * - \frac{1}{3} C_1 u^3 - \frac{1}{5} C_2 u^5 \ldots\ldots$$

développement valable dans un cercle ayant pour centre le point $u=0$, et pour rayon la distance de ce point au pôle de ζu le plus voisin. Il n'y a pas au second membre de terme en u : cela tient à ce que, dans σu, il n'y a pas de terme en u^3.

3° — En dérivant logarithmiquement la formule (10'), on trouve :

(12') $$\zeta(u+2\omega_\alpha) = \zeta(u) + 2\eta_\alpha \,;$$

ζu n'est donc pas une fonction elliptique. Si dans cette relation on fait $u = -\omega_2$, il vient, puisque $\zeta(-u) = -\zeta u$:

$$\zeta(\omega_2) = \eta_2 .$$

La fonction pu.

99. — Définition et propriétés. — On pose :

$$pu = -\zeta' u .$$

1° La fonction pu, dérivée d'une fonction méromorphe impaire, est une fonction méromorphe dans tout le plan, et paire.

2° Ses pôles sont ceux de ζu, car (N° 68) la dérivée d'une fonction méromorphe n'a pas d'autres pôles que ceux de la fonction. Ce sont les points

$$u = 2m_1 \omega_1 + 2m_2 \omega_2 .$$

Le développement de pu autour du pôle $u=0$ s'obtient en dérivant la relation (11') ce qui donne :

(13') $$pu = \frac{1}{u^2} + * + C_1 u^2 + C_2 u^4 + \ldots\ldots$$

Le pôle $u=0$ est donc double. La série (13') est valable dans un cercle ayant pour centre le point $u=0$, et pour rayon la distance de ce point au pôle de pu le plus voisin.

Observons que dans cette série, le terme constant manque : cela tient à ce que ζu n'a pas de terme en u, et par suite à ce que σu n'a pas de terme en u^3. C'est pour arriver à ce résultat qu'on a fait disparaître le terme en u^3 dans σu.

3° La fonction pu est elliptique : ses périodes sont $2\omega_1$ et $2\omega_2$ (et par suite aussi $2\omega_3$) ; car on a, en dérivant la relation (12') :

(14') $$p(u + 2\omega_2) = pu$$

La fonction pu n'a qu'un pôle $u=0$, dans un parallélogramme des périodes contenant l'origine ; ce pôle est double, pu donc est une fonction elliptique d'ordre deux.

100. – Remarque I. – On a ainsi formé une fonction, pu, jouissant des propriétés suivantes :

1° Elle est elliptique, et ses périodes sont deux quantités quelconques, $2\omega_1$, $2\omega_2$. (On a, il est vrai, supposé que $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ a sa partie imaginaire positive ; s'il en était autrement, on remplacerait, dans la formation de la fonction thêta, ω_2 par $-\omega_2$, mais les périodes de pu seraient toujours $2\omega_1$ et $2\omega_2$).

2° Elle est d'ordre deux ; ses pôles dont chacun est double, sont les points $u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$.

3° Autour du pôle $u = 0$, le développement du pu est de la forme :

$$(13) \qquad pu = \frac{1}{u^2} + * + \text{termes ayant } u \text{ en facteur.}$$

Je dis qu'il n'y a qu'une fonction satisfaisant à ces conditions. En effet s'il en existait une seconde, $f(u)$, ayant autour du point $u = 0$ le développement :

$$(13\,bis) \qquad f(u) = \frac{1}{u^2} + * + \text{termes ayant } u \text{ en facteur}$$

la différence $pu - f(u)$ serait une fonction elliptique sans pôles, car elle ne devient plus infinie pour $u = 0$: ce serait donc une constante ; or, pour $u = 0$, $pu - f(u)$ s'annule, puisque les développements (13) et (13 bis) ne renferment pas de terme constant ; il en résulte que $pu - f(u)$ est identiquement nul.

Il résulte de là que, de quelque manière qu'on forme pu (par exemple en permutant les périodes $2\omega_1$ et $\pm 2\omega_2$ qui jouent un rôle dissymétrique dans la formation de la fonction thêta) on arrivera toujours à la même fonction pu, qui se trouve ainsi définie, sans ambiguïté, par les conditions 1°, 2°, 3° ci-dessus, c'est-à-dire par les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ prises dans un ordre quelconque.

Les fonctions ζu et σu dépendent de même uniquement et symétriquement de $2\omega_1$ et $2\omega_2$, car on peut les définir sans ambiguïté à l'aide de pu. En effet ζu est une fonction méromorphe, dont la dérivée est $-pu$, dont les pôles sont alors ceux de pu, et qui, autour du pôle $u = 0$, a le développement :

$$(11') \qquad \zeta u = \frac{1}{u} - \frac{1}{3} C_1 u^3 - \ldots\ldots$$

Il ne peut exister deux pareilles fonctions, ζu et $f(u)$; car $\zeta' u - f'(u)$ étant nul, la différence $\zeta u - f(u)$ est une constante, qui est nulle, puisque, d'après (11'), $\zeta u - f'(u) = 0$, pour $u = 0$.

De même σu est une fonction holomorphe dans tout le plan, ayant pour dérivée logarithmique ζu, en admettant, autour du point $u = 0$, le développement :

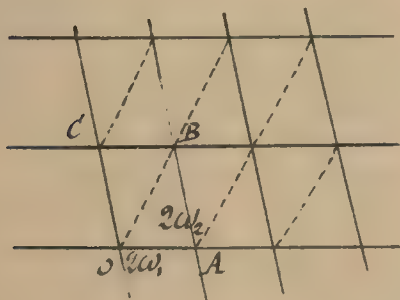
$$\sigma u = u + \ldots\ldots$$

Il ne peut exister deux pareilles fonctions, σu et $f_2(u)$ car $\frac{\sigma' u}{\sigma u} - \frac{f_2'(u)}{f_2(u)}$ étant nul, on aurait en intégrant :

$$\log \sigma u = \log f_2(u) - \log C \; ; \text{ d'où : } f_2(u) = C \sigma u \; ;$$

d'ailleurs les deux fonctions $\frac{\sigma u}{u}$ et $\frac{f_2(u)}{u}$, se réduisant à 1 pour $u = 0$, la constante C est égale à l'unité, c'est-à-dire que $f_2(u)$ est identique à σu.

Remarque II. — On peut ajouter que pu (et par suite ζu, et σu) ne dépend en réalité que du réseau des points périodes $u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$; car, d'après la Remarque I, on peut définir complètement pu : une fonction méromorphe, ayant pour pôles doubles les sommets de ce réseau, pour périodes les quantités représentées par les segments rectilignes joignant deux quelconques de ces points, et développable, autour du pôle $u = 0$, sous la forme



$$pu = \frac{1}{u^2} + * + \text{termes ayant } u \text{ en facteur.}$$

Or le réseau des points $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$ peut s'obtenir en partant d'autres périodes que $2\omega_1 = OA$ et $2\omega_2 = AB$: par exemple, les parallélogrammes construits avec $2\omega_1 = OA$ et $2\omega_1 + 2\omega_2 = OB$, auront pour sommets les points $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$, et ces points seulement. Les fonctions pu, ζu, σu construites avec les périodes $2\omega_1$ et $2\omega_1 + 2\omega_2$ seront donc les mêmes que celles construites avec $2\omega_1$, $2\omega_2$.

D'une manière générale, les réseaux de parallélogrammes

construits avec les deux systèmes de périodes $(2\omega_1, 2\omega_2)$ et $(2\omega_1', 2\omega_2')$, et dont un sommet est à l'origine, auront les mêmes sommets 1° si les sommets du réseau $(2\omega_1', 2\omega_2')$ appartiennent au réseau $(2\omega_1, 2\omega_2)$, c'est-à-dire si l'on a :

$$2\omega_1' = 2\lambda_1 \omega_1 + 2\lambda_2 \omega_2 \qquad (\lambda \text{ et } \mu \text{ entiers})$$

$$2\omega_2' = 2\mu_1 \omega_1 + 2\mu_2 \omega_2$$

2° si les sommets du réseau $(2\omega_1, 2\omega_2)$ appartiennent au réseau, $2\omega_1', 2\omega_2'$, c'est-à-dire si réciproquement, on peut, des équations précédentes, tirer $2\omega_1, 2\omega_2$ sous forme de fonctions linéaires de $2\omega_1', 2\omega_2'$, à coefficients entiers, c'est-à-dire, comme on le voit aisément, si

$$\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = \pm 1$$

Les systèmes de périodes $(2\omega_1, 2\omega_2)$ et $(2\omega_1', 2\omega_2')$ sont alors dits équivalents, et les fonctions pu, ζu, σu construites avec deux systèmes de périodes équivalents sont les mêmes.

On nomme système de périodes primitives tout système équivalent au système $2\omega_1, 2\omega_2$ qui a servi à construire pu.

Remarque III. – On a :

$$pu = -\zeta'(u) = -\frac{d}{du}\frac{\sigma' u}{\sigma u}$$

La relation (1'), qui définit σu en fonction de $\theta(u)$, dérivée logarithmiquement, donne

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{\eta_1 u}{\omega_1} + \frac{\theta'(u)}{\theta(u)};$$

d'où

$$-pu = +\frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{d}{du}\left(\frac{\theta'(u)}{\theta(u)}\right).$$

La fonction $-pu$ est donc à la constante près $\frac{\eta_1}{\omega_1}$, la fonction doublement périodique dont on avait indiqué la formation dans le cours de 1ère année (p. 76, Remarque).

III. – Relation entre pu et $p'u$.

101. – Il y a (N° 92 Corollaire) une relation entre pu et $p'u$; essayons de la former.

On a, autour du point $u = 0$

$$pu = \frac{1}{u^2} + C_1 u^2 + C_2 u^4 + \dots$$

$$p'u = -\frac{2}{u^3} + 2C_1 u + 4C_2 u^3 + \dots$$

ce qui montre que $p'u$ est une fonction elliptique d'ordre trois (Voir N° , Corollaire).

La fonction elliptique $p'^2u - 4p^3u$ a un pôle double, sans résidu à l'origine, car :

$$p'^2u - 4p^3u = -20\frac{C_1}{u^2} - 28\,C_2 + Ku^2 + \dots$$

La fonction $p'^2u - 4p^3u + 20\,C_1\,pu + 28\,C_2$ n'a plus de pôle à l'origine, et s'annule pour $u = 0$. C'est donc une fonction elliptique, aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, et sans pôle dans un parallélogramme des périodes contenant l'origine : elle se réduit dès lors (N° 86) à une constante, qui est zéro, puisque la fonction est nulle pour $u = 0$. Donc :

$$p'^2u = 4p^3u - g_2\,pu - g_3\,,$$

g_2 et g_3 désignant respectivement $20\,C_1$ et $28\,C_2$. Ce sont des fonctions de $2\omega_1$ et $2\omega_2$, comme tous les coefficients du développement de pu autour du pôle $u = 0$.

102. — On en déduit, par dérivation, et après suppression du facteur commun $2p'u$:

$$p''u = 6\,p^2u - \frac{1}{2}g_2$$

dérivons encore :

$$p'''u = 12\,pu\,p'u\,,$$

. . . .

et ainsi de suite ; ce qui montre que les dérivées successives, $p''u$, $p'''u$, ... s'expriment par des polynômes en pu et $p'u$.

La relation

$$p''u = 6\,p^2u - \frac{1}{2}\,g_2$$

conduit à une conséquence importante ; elle permet de calculer les coefficients, C_n, du développement de pu autour du pôle $u=0$. Remplaçons-y en effet :

$$pu \text{ par } \frac{1}{u^2} + C_1 u^2 + \cdots + C_n u^{2n} + \cdots\cdots$$

$$p''u \text{ par } \frac{6}{u^4} + 2C_1 + \cdots + 2n(2n-1)\,C_n u^{2n-2} + \cdots\cdots$$

et identifions les coefficients de u^{2n-2} dans les deux membres ; nous trouvons :

$$2n(2n-1)\,C_n = 6\left\{2C_n + 2C_1C_{n-2} + 2C_2C_{n-3} + \cdots\right\}$$

ou :

$$C_n\left[2n^2 - n - 6\right] = 6\left\{C_1C_{n-2} + C_2C_{n-3} + \cdots\cdots\right\};$$

formule de récurrence qui exprime C_n en fonction entière de $C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$, dès que n dépasse 2. Donc C_3, C_4, ... C_n ... sont des polynômes entiers en C_1 et C_2, c'est-à-dire en g_2 et g_3. On trouve ainsi :

$$pu = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{20}\,g_2 u^2 + \frac{1}{28}\,g_3 u^4 + \frac{1}{1200}\,g_2^2 u^6 + \frac{3}{6160}\,g_2 g_3 u^8 + \cdots\cdots$$

103. — Rappelons que nous avons introduit une période, ω_3, définie par

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$$

Posons :

$$p\omega_1 = e_1\,; \quad p\omega_2 = e_2\,; \quad p\omega_3 = e_3$$

Ces trois quantités sont distinctes : car la fonction elliptique $pu - pu_0$, où u_0 est une constante, a les pôles de pu ; c'est donc une fonction du second ordre, et qui n'a, dès lors, pas d'autres zéros que les deux zéros évidents $u = \pm u_0 +$ période. On ne pourrait donc avoir $p\omega_1 = p\omega_2$ que si $\omega_1 \pm \omega_2$ était une période, ce qui n'est pas.

Les points $u = \omega_1$, ω_2, ω_3 sont les zéros de $p'u$; on a en effet :

$p'(\omega_2) = p'(\omega_2 - 2\omega_2)$; à cause de la périodicité de $p'u$;
c'est-à-dire

$= p'(-\omega_2) = -p'(\omega_2)$; car pu étant paire, $p'u$ est impaire.

Donc $2p'(\omega_2) = 0$. (Observons que $p'u$, qui est d'ordre trois, n'a pas d'autres zéros que ω_1, ω_2, ω_3, à des périodes près.)

Le polynôme $4p^3u - g_2\,pu - g_3$, $(= p'^2u)$ s'annule ainsi pour $u = \omega_2$, c'est-à-dire pour $pu = e_1, e_2, e_3$; il peut donc se mettre sous la forme :

$$4p^3 - g_2\,p - g_3 = 4(p - e_1)(p - e_2)(p - e_3)$$

d'où en identifiant

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

$$e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3 = -\frac{1}{4}g_2$$

$$e_1e_2e_3 = \frac{1}{4}g_3$$

Remarque I. — On appelle g_2 et g_3 les invariants du réseau des points périodes : $u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$. Ces constantes en effet étant déterminées quand la fonction pu est connue, ne dépendent, comme pu, que des sommets de ce réseau.

On nomme demi-périodes les quantités de la forme ω_2 + période.

Remarque II. — Si dans la relation

$$p'^2u = 4p^3u - g_2\,pu - g_3\,,$$

on pose

$$pu = z\,, \quad \text{on a :}$$

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}\ ; \quad \text{d'où :}$$

$$u = u_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}}\,.$$

On voit ainsi que $z = pu$ est la fonction inverse d'une intégrale

elliptique, u, de première espèce.
On reviendra sur ce point.

IV. _ Expressions diverses d'une fonction elliptique.

---

104. — Une fonction elliptique, $f(u)$, aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ peut être exprimée soit par fonctions σ, soit par les fonctions ζ, soit par les fonctions p, construites avec les mêmes périodes.

Expression par un quotient de fonctions σ.

105. — Soient, dans un parallélogramme des périodes, $a_1, a_2 \dots a_n$ les pôles de $f(u)$; $b_1, b_2, \dots b_n$ ses zéros. On sait (N° 90) que :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + W,$$

W étant une période. Je dis que :

$$f(u) = C\,\frac{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\dots\dots\sigma(u-b_n-W)}{\sigma(u-a_1)\dots\dots\dots\dots\sigma(u-a_n)}$$

C étant un facteur constant. En effet le second membre est une fonction elliptique, aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, puisque si on change u en $u+2\omega_1$, il se reproduit multiplié par : (1)

$$\frac{(-1)^n e^{+2\eta_1(nu+n\omega_1-b_1-b_2\dots-b_n-W)}}{(-1)^n e^{+2\eta_1(nu+n\omega_1-a_1-a_2\dots-a_n)}} = 1$$

Cette fonction elliptique a d'ailleurs les mêmes zéros et les mêmes pôles que $f(u)$; elle n'en diffère donc (N° 91) que par un facteur constant. C.q.f.d.

---

(1) à cause de la formule $\sigma(u+2\omega_1) = -\sigma(u)\,e^{2\eta_1(u+\omega_1)}$.

Expression par la fonction ζ et ses dérivées.

106. _ Supposons qu'on connaisse dans un parallélogramme des périodes, les pôles $a, b, c, \ldots l$ de $f(u)$, et les parties infinies du développement de $f(u)$ autour de chacun d'eux :

autour de a .... $\dfrac{A_\alpha}{(u-a)^\alpha} + \dfrac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \dfrac{A_1}{u-a}$;

....

autour de l .... $\dfrac{I_\lambda}{(u-l)^\lambda} + \cdots\cdots + \dfrac{I_1}{u-l}$

On aura $A_1 + B_1 + \cdots + I_1 = 0$, car la somme des résidus de $f(u)$, dans un parallélogramme, est nulle (N° 87).

Je dis que :

$$\begin{aligned} f(u) = {} & A_1\zeta(u-a) - A_2\zeta'(u-a) + \cdots + \frac{(-1)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}A_\alpha\zeta^{\alpha-1}(u-a) \\ & + B_1\zeta(u-b) - \cdots \\ & + \cdots \\ & + I_1\zeta(u-l) - \cdots\cdots + \frac{(-1)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}I_\lambda\zeta(u-l) \\ & + C \end{aligned}$$

C étant une constante. En effet, je dis que le second membre, $F(u)$, est une fonction elliptique, aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$: car 1° $\zeta' u$, $\zeta'' u$, ... qui sont $-pu$, $-p'u$, ... sont elliptiques ; 2° quant aux termes $\zeta(u-a)$, ils se reproduisent augmentés $2\eta_1$ quand on ajoute $2\omega_1$ à u(1) : donc $F(u)$ se reproduit augmentée de $2\eta_1(A_1 + B_1 + \cdots + I_1)$, c'est-à-dire zéro. Elle admet donc les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$.

Ses pôles sont $a, b, \ldots l$; aux environs de l'un d'eux, a, on a :

$$\left.\begin{aligned} \zeta(u-a) &= \frac{1}{u-a} + \cdots\cdots \\ \zeta'(u-a) &= -\frac{1}{(u-a)^2} + \cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \zeta^{\alpha-1}(u-a) &= (-1)^{\alpha-1}\frac{(\alpha-1)!}{(u-a)^\alpha} + \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \text{d'où : } F(u) = \frac{A_\alpha}{(u-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_1}{(u-a)} + \cdots\cdots$$

---

(1) en vertu de la formule $\zeta(u+2\omega_\alpha) = \zeta u + 2\eta_\alpha$.

On voit que les deux fonctions elliptiques, aux mêmes périodes, $F(u)$ et $f(u)$ ont mêmes parties infinies aux environs de leurs pôles; leur différence (N° 91) est donc une constante. C.q.f.d.

107. – La formule précédente, due à M. Hermite, s'appelle formule de décomposition en éléments simples; elle permet de trouver l'intégrale d'une fonction elliptique, car chacun des termes du second membre s'intègre immédiatement : l'intégrale de ζu est $\log \sigma u$.

Expression par les fonctions p et p'.

108. – Supposons d'abord que $f(u)$ soit paire : soient dans un parallélogramme

$$\pm\alpha_1 \ ; \qquad \pm\alpha_2$$

ceux de ses zéros qui ne sont pas égaux à zéro ; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ leurs ordres de multiplicité. Soient de même

$$\pm\beta_1 \ ; \qquad \pm\beta_2 \ ; \ldots\ldots$$

ceux de ses pôles qui ne sont pas égaux à zéro ; $\mu_1, \mu_2, \ldots$ leurs ordres.

Je dis que :

$$f(u) = C\,\frac{(pu - p\alpha_1)^{\lambda_1}(pu - p\alpha_2)^{\lambda_2}\ldots}{(pu - p\beta_1)^{\mu_1}(pu - p\beta_2)^{\mu_2}\ldots}$$

C étant une constante. Soit en effet $F(u)$ le second membre ; le quotient $\frac{f(u)}{F(u)}$ est elliptique et n'admet ni zéro, ni pôle, en dehors du point $u = 0$; mais le point $u = 0$ ne pouvant être à la fois zéro et pôle la fonction $\frac{f}{F}$ manquera de zéros ou de pôles et sera par suite une constante. C.q.f.d.

Si $f(u)$ est impaire $\frac{f(u)}{p'u}$ sera paire, (car $p'u$, dérivée d'une fonction paire, est impaire) et on pourra lui appliquer la formule précédente ; c'est-à-dire que $f(u) = p'(u)\,R_1(pu)$; R étant rationnel en pu.

Si $f(u)$ n'est ni paire ni impaire, écrivons :

$$f(u) = \frac{f(u)+f(-u)}{2} + \frac{f(u)-f(-u)}{2} = \varphi(u) + \psi(u),$$

$\varphi(u)$ étant une fonction elliptique paire et $\psi(u)$ impaire [car en changeant u en $-u$, $\varphi(u)$ est inaltérée, $\psi(u)$ change de signe]. On aura donc :

$$f(u) = R(pu) + p'u\, R_1(pu);$$

Donc : toute fonction elliptique s'exprime rationnellement en fonction de pu et $p'u$.

V. – Formules d'addition.

---

109. – Exprimons la fonction elliptique de u, $pu - pv$, par un quotient de fonctions σ (v désigne une constante). Les zéros de cette fonction sont $u = \pm v$; ses pôles, le pôle double $u = 0$.

Donc

$$pu - pv = C\,\frac{\sigma(u-v)\,\sigma(u+v)}{\sigma^2 u}.$$

Pour déterminer C, égalons les parties infinies pour $u = 0$:

$$\frac{1}{u^2} = C\,\frac{\sigma(-v).\,\sigma v}{u^2}\ ;\ \text{d'où}\quad C = -\frac{1}{\sigma^2 v}$$

On a ainsi :

$$pu - pv = -\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}$$

formule importante, dont nous allons déduire celles d'addition de ζ et de p.

110. – Formule d'addition pour ζu. – Dérivons logarithmiquement les deux membres de la formule précédente par rapport à u, puis par rapport à v ; il vient, puisque la dérivée logarithmique de σu est ζu :

$$\frac{p'u}{pu - pv} = \zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta u$$

$$\frac{-p'v}{pu - pv} = \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta v$$

et par addition :

$$\zeta(u+v) = \zeta u + \zeta v + \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv}$$

C'est la formule d'addition des arguments pour ζu. Par soustraction :

$$\zeta(u-v) = \zeta u - \zeta v + \frac{1}{2}\,\frac{p'u + p'v}{pu - pv}.$$

111. – Formule d'addition pour pu. – Dérivons la relation antéprécédente successivement par rapport à u et à v ; il vient :

$$-p(u+v) = -pu + \frac{1}{2}\,\frac{p''u}{pu-pv} - \frac{1}{2}\,\frac{p'u(p'u-p'v)}{(pu-pv)^2} \quad \text{.... (formule non symétrique en } u \text{ et } v\text{)}$$

$$-p(u+v) = -pv - \frac{1}{2}\,\frac{p''v}{pu-pv} + \frac{1}{2}\,\frac{p'v(p'u-p'v)}{(pu-pv)^2} \qquad \text{– id –}$$

Ajoutons membre à membre, en remplaçant $p''u$ et $p''v$ par $6p^2 - \frac{1}{2}g_2$ (N° 102) :

$$-2p(u+v) = -pu - pv + \frac{6}{2}\,\frac{p^2u - p^2v}{pu-pv} - \frac{1}{2}\,\frac{(p'u-p'v)^2}{(pu-pv)^2} \quad \text{.... (formule symétrique)}$$

$$-2p(u+v) = 2(pu+pv) - \frac{1}{2}\left[\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right]^2$$

et finalement :

$$p(u+v) + pu + pv = \frac{1}{4}\left[\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right]^2$$

C'est la formule d'addition des arguments pour p, symétrique en u et v.

Remarque. – Les formules d'addition conduisent à celles de multiplication ; faisant tendre u vers v dans la dernière, on a :

$$p(2v) + 2pv = \frac{1}{4}\left[\frac{p''v}{p'v}\right]^2 = \frac{1}{4}\,\frac{(6p^2v - \frac{1}{2}g_2)^2}{p'^2v}$$

d'où $p(2v)$. En dérivant on aurait $p'(2v)$; faisant ensuite dans la

formule d'addition $u = 2v, 3v, \ldots$ on obtiendra $p(3v); p(4v), \ldots$ [1]

112. – Cas particuliers du théorème d'addition. – Soit $v = \pm \omega_\lambda$. On a, d'après la formule d'addition de pu :

$$p(u \pm \omega_\lambda) + pu + e_\lambda = \frac{1}{4} \frac{p'^2 u}{(pu - e_\lambda)^2} = \frac{(pu - e_\beta)(pu - e_\gamma)}{pu - e_\lambda}$$

d'où :

$$p(u \pm \omega_\lambda) = \frac{1}{pu - e_\lambda}\left[(pu - e_\beta)(pu - e_\gamma) - (p^2 u - e_\lambda^2)\right]$$

$$= e_\lambda + \frac{(e_\lambda - e_\beta)(e_\lambda - e_\gamma)}{pu - e_\lambda},$$

en tenant compte dans les calculs, de la relation $e_\lambda + e_\beta + e_\gamma = 0$.

VI. – Les fonctions $\sqrt{pu - e_\lambda}$ et Snu.

---

113. – Dans la formule $pu - pv = -\dfrac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u . \sigma^2 v}$

faisons $v = \omega_\lambda$; on a :

$$pu - e_\lambda = -\frac{\sigma(u+\omega_\lambda)\sigma(u-\omega_\lambda)}{\sigma^2 u \, \sigma^2 \omega_\lambda}$$

Or

$$-\sigma(u - \omega_\lambda) = -\sigma(u + \omega_\lambda - 2\omega_\lambda) = \sigma(\overline{-u - \omega_\lambda} + 2\omega_\lambda)$$

D'après la formule :

$$\sigma(v + 2\omega_\lambda) = -e^{2\eta_\lambda(u+\omega_\lambda)} \sigma v,$$

On a :

$$\sigma(\overline{-u - \omega_\lambda} + 2\omega_\lambda) = e^{-2\eta_\lambda u} \sigma(u + \omega_\lambda)$$

---

[1] On trouvera des formules de multiplication plus élégantes dans le Traité d'Analyse de M. Jordan (Tome 2, 2ème Edition, pages 280 et suivantes.

D'où enfin

$$pu - e_\alpha = e^{-2\eta_\alpha u} \frac{\sigma^2(u+\omega_\alpha)}{\sigma^2 u . \sigma^2 \omega_\alpha}$$

(1) $$\sqrt{pu - e_\alpha} = e^{-\eta_\alpha u} \frac{\sigma(u+\omega_\alpha)}{\sigma u . \sigma \omega_\alpha}$$

114. — Le radical $\sqrt{pu-e_\alpha}$ est donc dans tout le plan une fonction monodrome et méromorphe de u, la détermination de ce radical que donne la formule précédente est celle qui, pour u voisin de zéro, a la valeur principale $+\frac{1}{u}$.

On pose

(2) $$\sigma_\alpha u = e^{-\eta_\alpha u} \frac{\sigma(u+\omega_\alpha)}{\sigma \omega_\alpha} \; ; \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

de sorte qu'on a :

(3) $$\sqrt{pu - e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u} .$$

On n'aura pas dans le cours, à faire usage explicitement des fonctions $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$.

On pose également $\sqrt{pu-e_\alpha} = \sigma_{\alpha 0}(u)$; voici quelques propriétés des trois fonctions $\sigma_{\alpha 0}$, qui interviennent dans certaines questions de mécanique.

115. — La relation $pu - e_\alpha = \sigma^2_{\alpha 0}(u)$ montre que si l'on change u en $-u$ ou en $u+$ Période, $\sigma_{\alpha 0}$ se reproduit multiplié par ± 1 : il s'agit de lever l'ambiguité, ce qu'on fait aisément en donnant à u des valeurs particulières, et en se rappelant qu'aux environs de $u=0$, $\sigma_{\alpha 0}(u) = +\frac{1}{u} + \dots$ On établit ainsi les formules

$$\sigma_{\alpha 0}(-u) = -\sigma_{\alpha 0}(u) \qquad \text{On vérifie le signe en faisant } u=\varepsilon$$

(4) $$\sigma_{\alpha 0}(u+2\omega_\beta) = -\sigma_{\alpha 0}(u) \qquad \text{——— id ———} \quad u = -\omega_\beta$$

$$\sigma_{\alpha 0}(u+2\omega_\alpha) = \sigma_{\alpha 0}(u) \qquad \text{——— id ———} \quad u = -\omega_\alpha + \varepsilon$$

La fonction $\sigma_{\alpha 0}(u)$ est donc doublement périodique ; ses périodes sont $2\omega_\alpha$ et $4\omega_\beta$, $4\omega_\gamma$, qui n'en font en réalité que deux, car $\omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\gamma = 0$.

Observons enfin que la relation

$$p'^2u = 4(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3)$$

s'écrit, en extrayant les racines :

$$p'u = \pm 2\, \sigma_{10}u . \sigma_{20}u . \sigma_{30}u$$

Il faut prendre le signe $-$, car, pour $u = 0$, la valeur principale de $p'u$ est $-\frac{2}{u^3}$, et celle de chacun des $\sigma_{\lambda 0}$ est $\frac{1}{u}$.

116. – Fonction snu. – La formule snu est une des anciennes fonctions elliptiques d'Abel et de Jacobi ; on la rattache aux fonctions p et σ par la définition suivante. Posons :

$$(5) \qquad snu = \sqrt{e_1 - e_2}\, \frac{1}{\sigma_{20}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1 - e_2}}\right)} = \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{p\left(\frac{u}{\sqrt{e_1 - e_2}}\right) - e_2}}$$

D'après (4) la fonction snu est impaire ; elle est elliptique et admet pour périodes $2\omega_2\sqrt{e_1 - e_2}$ et $4\omega_1\sqrt{e_1 - e_2}$; elle change de signe si on augmente u de $2\omega_1\sqrt{e_1 - e_2}$ ou $2\omega_3\sqrt{e_1 - e_2}$. Enfin elle est liée à sa dérivée par une importante relation, qu'on va former.

Posons, pour abréger, $v = \frac{u}{\sqrt{e_1 - e_2}}$; on a, par (5) :

$$(6) \qquad pv - e_2 = \frac{e_1 - e_2}{Sn^2u} ;$$

d'où, en dérivant par rapport à u :

$$(7) \qquad \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_2}}\, p'v = -2(e_1 - e_2)\frac{Sn'u}{Sn^3u}$$

Portons maintenant les valeurs (6) et (7) de pv et $p'v$ dans l'équation :

$$p'^2v = 4(pv - e_1)(pv - e_2)(pv - e_3) \ldots \ldots$$

il vient, après réductions :

$$(8) \qquad (Sn'u)^2 = (1 - Sn^2u)(1 - k^2 Sn^2u)$$

étant posé

$$K^2 = \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}$$

Observons encore que, d'après (5), $\operatorname{sn} u = 0$ pour $u = 0$.

Remarque. — D'après (8), en posant $\operatorname{sn} u = z$, on a :

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{(1-z^2)(1-K^2z^2)}\,;$$ d'où, puisque $u=0$ pour $z=0$:

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-K^2z^2)}}$$

On voit ainsi que $z = \operatorname{sn} u$ est la fonction inverse de l'intégrale elliptique de première espèce mise sous la forme de Legendre (Cours de première année N° 159).

D'après cela, les valeurs de $\operatorname{sn} u$ ne dépendent que de u et de K, de sorte qu'une table à double entrée les fera connaître. De même les périodes de $\operatorname{sn} u$ ne dépendent que de K.

VII. — pu considéré comme fonction de u, et de g_2, g_3.

---

117. — On a formé pu en partant des périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ et on a établi que

(1) $$p'^2 u = 4p^3u - g_2\, pu - g_3 = 4\,(pu - e_1)\,(pu - e_2)\,(pu - e_3)\,;$$

g_2 et g_3 étant des fonctions de $2\omega_1$, $2\omega_2$: $g_2 = \varphi_2\,(2\omega_1, 2\omega_2)$; $g_3 = \varphi_3\,(2\omega_1, 2\omega_2)$.

Inversement, étant donnés arbitrairement les invariants g_2 et g_3, peut-on trouver deux périodes, $2\omega_1$, $2\omega_2$, telles que la fonction pu formée avec ces périodes vérifie la relation (1)? Cela revient à chercher si des relations $g_2 = \varphi_2$; $g_3 = \varphi_3$ on peut tirer $2\omega_1$ et $2\omega_2$ quand on se donne g_2 et g_3. A priori, le problème n'est pas impossible, puisque le nombre des équations égale celui des inconnues ; on va le résoudre en donnant les valeurs de $2\omega_1$, $2\omega_2$ en fonction des invariants.

118. _ Supposons g_2 et g_3 donnés ; soit :

$$Z = 4z^3 - g_2 z - g_3 = 4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3);$$

On a vu au N° 81 que si l'on pose :

(2) $$u = \omega_1 + \int_{e_1}^{z} \frac{dz}{\sqrt{Z}} \quad ,$$

z est une fonction méromorphe de u, $\varphi(u)$, doublement périodique, (c'est-à-dire elliptique) aux périodes

(3) $$2\omega_1 = \int_{e_2}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{Z}} \quad ; \quad 2\omega_2 = \int_{e_3}^{e_1} \frac{dz}{\sqrt{Z}} \quad ; \quad 2\omega_3 = \int_{e_1}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{Z}}$$

$(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0)$; de plus, z est une fonction elliptique paire et d'ordre deux ; car (N° 81, 2°) à une valeur de $z = \varphi(u)$ correspondent, à des périodes près, deux et deux valeurs seulement de u. Enfin (N° 81, 3°), on a :

(4) $$\varphi(\omega_\alpha) = e_\alpha \quad .$$

Je dis que cette fonction $\varphi(u)$ est identique à la fonction $\wp u$ formée avec les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ données par (3).

Cherchons ses pôles : je dis qu'elle admet pour pôle double $u = 0$; elle n'en aura dès lors pas d'autres, dans un parallélogramme, puisqu'elle est d'ordre deux.

Pour le démontrer, considérons la dérivée $\varphi'(u)$; c'est une fonction impaire de u, elle devient donc nulle ou infinie pour $u = 0$: si elle devient infinie, c'est que $u = 0$ est un pôle de $\varphi(u)$,[1] et ce sera nécessairement un pôle double, puisque $\varphi(u)$ est paire (et d'ordre deux). Tout revient donc à prouver que $\varphi'(u)$ ne s'annule pas pour $u = 0$.

Cherchons les zéros de $\varphi'(u)$. On a, en différentiant la relation de définition (2) et en faisant $z = \varphi(u)$:

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3} \quad ; \text{ c. à. d.}$$

---

(1) puisque les pôles de la dérivée d'une fonction elliptique sont les mêmes que ceux de la fonction.

$$(5) \qquad \varphi'^2(u) = 4\varphi^3 u - g_2\,\varphi u - g_3 = 4\left[\varphi u - e_1\right]\left[\varphi u - e_2\right]\left[\varphi u - e_3\right]$$

ce qui montre que $\varphi'(u)$ ne s'annule que pour $\varphi(u) = e_2$, ou, d'après (4) pour

$$\varphi(u) = \varphi(\omega_2)$$

Cette équation en u, puisque $\varphi(u)$ est paire et d'ordre deux, n'a pas d'autres solutions (à des périodes près) que $u = \pm\,\omega_2$, quantités dont aucune n'est nulle, ce qui démontre la proposition.

Cela posé, le développement de $\varphi(u)$ autour du point $u = 0$ (pôle double) est de la forme :

$$\varphi(u) = \frac{\lambda}{u^2} + \mu + \nu u^2 + \ldots\ldots\ldots \text{ d'où :}$$

$$\varphi'(u) = -\frac{2\lambda}{u^3} + 2\nu u + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

et en portant ces valeurs dans la relation (5) entre φu et $\varphi' u$ $(\varphi'^2 = 4\varphi^3 - g_2\,\varphi - g_3)$:

$$\frac{4\lambda^2}{u^6} - \frac{8\lambda\nu}{u^2} + \ldots = \frac{4\lambda^3}{u^6} + 12\,\frac{\lambda^2\mu}{u^4} + \ldots - g_2\,\frac{\lambda}{u^2} - \ldots\ldots - g_3\,;$$

d'où en égalant les coefficients des termes en $\frac{1}{u^6}$ et $\frac{1}{u^4}$ dans les deux membres :

$$\lambda = 1 \quad ; \quad \mu = 0\,.$$

Le développement de $\varphi(u)$ autour du pôle $u = 0$ est donc :

$$\varphi(u) = \frac{1}{u^2} + * + \nu u^2 + \ldots\ldots$$

Donc enfin, si l'on considère la fonction pu formée avec les périodes (3) : $2\omega_1$, $2\omega_2$, la différence $\varphi(u) - pu$ sera une fonction elliptique aux mêmes périodes, sans pôle dans le parallélogramme et s'annulant pour $u = 0$; ce qui montre bien que $\varphi(u) = pu$.

Ainsi :

Les invariants g_2 et g_3 étant donnés, les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ ont les valeurs (3), c. à. d. que la fonction pu formée avec ces périodes

vérifie l'équation $p'^2u = 4p^3u - g_2 pu - g_3$.

D'après cela, on voit ce qu'il faut entendre par $p(u, g_2, g_3)$, ou par $p(u, e_2)$[1].

119. — Remarques sur les périodes. — Je dis que si g_2 et g_3 sont réels, la fonction $p(u, g_2, g_3)$ admet une période réelle et une période purement imaginaire.

Supposons d'abord e_1, e_2, e_3 réels et $e_1 > e_3 > e_2$. La période

$$(6) \qquad 2\omega_1 = 2\int_{e_2}^{e_3} \frac{dz}{2\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}$$

est réelle, puisque les limites sont réelles et que, entre $z = e_2$ et $z = e_3$, le polynôme sous le radical reste positif.

De même la période

$$(7) \qquad 2\omega_2 = 2\int_{e_3}^{e_1} \frac{dz}{\sqrt{(z-e_1)(z-e_3)(z-e_3)}}$$

est purement imaginaire, puisque les limites sont réelles, et que, entre e_3 et e_1, le polynôme sous le radical reste négatif.

Ainsi, e_1, e_2, e_3 étant réels, il y a une période réelle, $2\omega_1$, et une période purement imaginaire, $2\omega_2$, formant un système primitif, c'est-à-dire telles que la fonction $p(u, 2\omega_1, 2\omega_2)$, construite avec ces périodes, vérifie la relation $p'^2 = 4p^3 - g_2\, p - g_3$.

Supposons maintenant e_1 seul réel, et e_2, e_3, imaginaires conjugués ; il y a encore une période réelle et une période purement imaginaire, mais elles ne forment pas un système primitif.

En effet, si l'on figure, dans le plan de la variable z, les trois points e_1, e_2, e_3, on a :

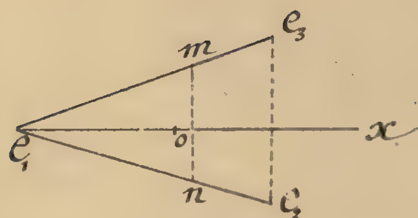
$$2\omega_3 = \int_{e_1}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

---

(1) On a d'après (2) :

$$u = \omega_1 + \int_{e_1}^{pu} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} \quad \ldots\ldots \text{(Voir Rem. II, n° 103)}$$

ce qui peut servir de définition à pu.



l'intégrale étant prise le long de la ligne droite $e_1\, e_2$; de même :

$$-2\omega_2 = \int_{e_1}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

Or en deux points m et n, situés l'un sur $e_1\, e_3$, l'autre sur $e_2\, e_3$, et ayant même abscisse, les valeurs de z, celles de dz, et celles de $\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}$ sont respectivement imaginaires conjuguées ; il en résulte que $2\omega_3$ et $-2\omega_2$ sont imaginaires conjuguées, c'est-à-dire que :

$$2\omega_3 = A + Bi,$$

$$-2\omega_2 = A - Bi.$$

Par suite, la période $2\omega_3 - 2\omega_2 = 2A$ est réelle, et la période $2\omega_3 + 2\omega_2 = 2Bi$ est purement imaginaire ; mais elles ne forment pas un système primitif, car les périodes $2A$ et $2Bi$ n'entraînent pas les périodes primitives $A + Bi$ et $A - Bi$.

Il importe d'observer que, d'après cela, la période réelle et la période purement imaginaire n'ont pas, la même expression dans le cas de e_1, e_2, e_3 réels que dans celui de e_1 seul réel.

119bis. – Formule d'homogénéité. – Cherchons les périodes de $p(u, \lambda e_2)$, c. à. d. de $p(u, \lambda^2 g_2, \lambda^3 g_3)$, λ étant une constante quelconque. On a, par exemple, d'après les formules (3) :

$$\omega_1' = \int_{\lambda e_2}^{\lambda e_3} \frac{dy}{2\sqrt{(y - \lambda e_1)\ldots\ldots}}\,;$$

ou en faisant le changement de variable $y = \lambda z$:

$$\omega_1' = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{e_2}^{e_3} \frac{dz}{2\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}} = \frac{\omega_1}{\sqrt{\lambda}}$$

Les périodes de $p(u, \lambda e_2)$ sont donc $\frac{\omega_1}{\sqrt{\lambda}}, \frac{\omega_2}{\sqrt{\lambda}}$; celles de $p\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}, \lambda e_2\right)$

sont donc ω_1 et ω_2. Les deux fonctions

$$p\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}, \lambda e_\alpha\right) \text{ et } \lambda p(u, e_\alpha)$$

ont dès lors les mêmes périodes et les mêmes pôles; autour du pôle $u=0$ on a:

$$p\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}, \lambda e_\alpha\right) = \frac{\lambda}{u^2} + * + u^2 (\quad)$$

$$\lambda p(u, e_\alpha) = \frac{\lambda}{u^2} + * + u^2 (\quad)$$

d'où l'on conclut, par un raisonnement souvent fait qu'on a identiquement

$$p\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}, \lambda e_\alpha\right) = \lambda p(u, e_\alpha)$$

ce qui s'écrit aussi:

$$p\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}, \lambda^2 g_2, \lambda^3 g_3\right) = \lambda p(u, g_2, g_3)$$

C'est la formule d'homogénéité de pu.

On a de même:

$$\zeta\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}, \lambda^2 g_2, \lambda^3 g_3\right) = \sqrt{\lambda}\, \zeta(u, g_2, g_3)$$

Car les deux membres, en vertu de la formule qui précède, ont même dérivée par rapport à u, et leur différence s'annule pour $u=0$.

De même enfin

$$\sigma\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}, \lambda^2 g_2, \lambda^3 g_3\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sigma(u, g_2, g_3)$$

Car les deux membres, en vertu de la formule d'homogénéité de ζ, ont même dérivée logarithmique par rapport à u, et même valeur principale pour $u=0$.

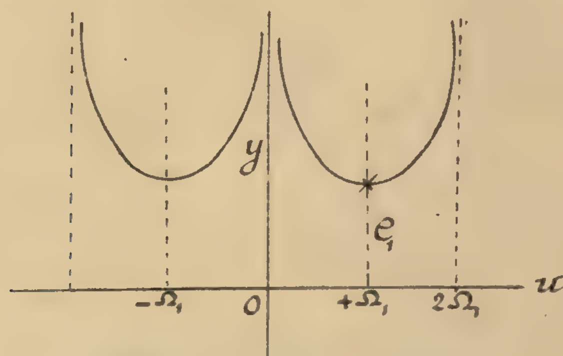
Étude de $p(u, e_\alpha)$ pour e_1, e_2, e_3 réels.

120. – 1° Supposons d'abord u réel. – Soit 2Ω, la période

réelle de pu ; $2\Omega_1 = 2\omega_1$ (Si e_1 étant seul réel, $2\Omega_1 = 2(\omega_3 - \omega_2)$).

Pour construire la courbe $y = pu$, il suffit de faire varier u de $-\Omega_1$ à $+\Omega_1$, intervalle d'une période ; et même de 0 à Ω_1, à cause de la parité de la fonction.

Pour $u = \varepsilon$, $pu = \frac{1}{u^2} + \ldots$ part de $+\infty$; pu commence par décroître. Le minimum a lieu pour $u = \Omega_1$, puisque les demi-périodes $\Omega_1 + 2K\Omega_1$ sont les seuls zéros réels de $p'u$. Ce minimum est $p\Omega_1 = e_1$. La courbe a la forme ci-contre.



($2\Omega_1$, période réelle de pu)

Elle se compose d'une infinité de branches identiques.

La forme de la courbe donne le signe à prendre pour $p'u$ dans la formule

$$p'u = \pm\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}\ ;$$

on voit par exemple que pour u compris entre 0 et Ω_1, ce qui est le cas général dans les calculs numériques, on doit prendre le signe $-$.

2° Supposons u purement imaginaire, $u = iv$. — La formule d'homogénéité, où $\lambda = -1$, donne :

$$p(-vi, -e_2) = -p(v, e_2)$$

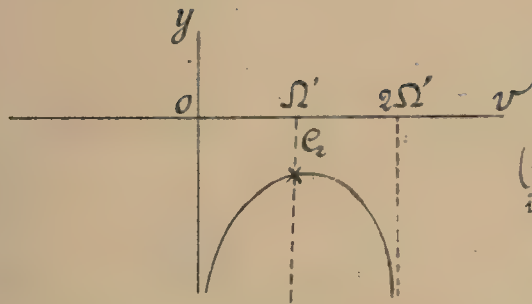
ou

$$p(vi, e_2) = -p(v, -e_2)$$

Cela montre que $p(vi, e_2)$ est réel ; la courbe $y = p(vi, e_2)$ c'est-à-dire

$$y = -p(v, -e_2)$$

se construit comme ci-dessus. La fonction $p(v, -e_2)$ admet en



($2\Omega' i$, période purement imaginaire de pu).

effet, puisque $-e_1 < -e_3 < -e_2$, la période réelle $2\Omega'$:

$$2\Omega' = 2\int_{-e_1}^{-e_3} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z \mp g_3}}$$

ou, faisant le changement de variable $z = -t$:

$$2\Omega' = 2\int_{e_3}^{e_1} \frac{dt}{i\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}$$

c'est-à-dire que $\Omega' i = \omega_2$, ω_2 étant la période purement imaginaire de $p(u, e_2)$ [équation (7)]. Il en résulte que y, c'est-à-dire $p(vi, e_2)$, varie de $-\infty$ à e_2.

La forme de la courbe donne le signe à prendre pour $p'(vi)$ dans la formule

$$p'(vi) = \pm i\sqrt{-4p^3 + g_2 p + g_3},$$

où la quantité sous le radical est réelle. Par exemple, pour v compris entre 0 et Ω', ce qui est le cas général des calculs numériques, on voit que $\frac{dy}{dv} = i\,p'(vi)$ est positif; on doit donc prendre le signe $-$.

3°. Supposons $u = v + iw$, v et w étant réels. La formule d'addition

$$p(v + iw) = \ldots\ldots$$

donnera $p(v+iw)$ quand on connaîtra pv, $p'v$, $p(iw)$, $p'(iw)$. On verra plus tard, dans le chapitre des calculs numériques, comment une seule table à double entrée permet d'obtenir toutes ces valeurs.

Remarque. — Les formules, déduites de celle du N° 112, (où $\Omega' i = \omega_2$, $\Omega_1 = \omega_1$):

$$p(u+\Omega' i) = e_2 + \frac{(e_2-e_3)(e_2-e_1)}{pu - e_2}$$

$$p(vi+\Omega_1) = e_1 + \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{p(vi)-e_1}$$

montrent que 1° u étant réel, $p(u+\Omega' i)$ varie de e_2 à $e_2 + \frac{(e_2-e_3)(e_2-e_1)}{e_1-e_2}$ c.à.d. de e_2 à e_3 ; et 2° v étant réel, $p(vi+\Omega_1)$ varie de e_1 à $e_1 + \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{e_2-e_1}$, c.à.d. de e_1 à e_3. En réunissant tous ces résultats, on voit que :

1) u étant réel, pu varie de $+\infty$ à e_1

2) u étant $iv+\Omega_1$ pu .... e_1 à e_3

3) u étant $u+\Omega' i$ pu .... e_3 à e_2

4) u étant iv pu .... e_2 à $-\infty$

Ce tableau montre que si pu est réel, u est nécessairement, (à des périodes près et au signe près) de l'une des quatre formes 1), 2), 3), 4).

Chapitre III.

Chapitre III.

Applications des fonctions elliptiques.

I. – Calcul des Intégrales elliptiques.

121. – L'importance des fonctions elliptiques dans les applications provient surtout de leur usage pour le calcul des intégrales qui dépendent de la racine carrée d'un polynôme du troisième ou du quatrième ordre, et qu'on a nommées Intégrales elliptiques. La forme générale de ces intégrales est (cours de 1ère année)

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)\sqrt{X}}\,dx,$$

P et Q étant des polynômes en x, et X un polynôme du quatrième ou du troisième degré.

Si X est d'ordre quatre on le ramènera à l'ordre trois par un des procédés qui vont être indiqués, et dont l'un a déjà été donné dans le cours de 1ère année (N° 152).

Cas du polynôme du quatrième ordre.

122. – Polynôme bicarré. – Soit l'intégrale

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)\sqrt{X}}\,dx\,; \;\ldots\ldots \text{où } X = mx^4 + nx^2 + p\,.$$

Multiplions, sous le signe $\int$, les deux termes de la fraction par le

polynôme $Q(-x)$; au dénominateur, le produit $Q(x)\,Q(-x)$ est un polynôme pair en x, c'est-à-dire un polynôme en x^2, $K(x^2)$; au numérateur, dans le produit $P(x)\,Q(-x)$, réunissons les termes de degrés pairs et ceux de degrés impairs en x, on aura :

$$\int \frac{P}{Q\sqrt{X}}\,dx = -\int \frac{G(x^2) + xH(x^2)}{K(x^2)}\;\frac{dx}{\sqrt{mx^4+nx^2+p}},$$

G, H, K étant des polynômes en x^2. Posons $x^2 = y$; il vient :

$$\int \frac{P}{Q\sqrt{X}}\,dx = -\int \frac{G(y)\,dy}{K(y)\sqrt{y(my^2+ny+p)}} + \frac{1}{2}\int \frac{H(y)\,dy}{K(y)\sqrt{my^2+ny+p}}.$$

Au deuxième membre, la seconde intégrale ne dépend que d'un radical portant sur un polynôme du second ordre : on sait donc la calculer pour les fonctions élémentaires (Cours de 1ère année, p. 117). La première intégrale est elliptique ; et le polynôme sous le radical : $y(my^2+ny+p)$ est du troisième ordre.

On aurait pu au lieu de poser $x^2 = y$, poser $x^2 = \frac{1}{z}$; les résultats eussent été analogues.

123. _ Polynôme général. _ Première méthode. _ Soit α une racine du polynôme X :

$$X = (x-\alpha)(mx^3+nx^2+px+q)$$

Dans l'intégrale :

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)\sqrt{X}}\,dx,$$

on posera :

$$y = \frac{1}{x-\alpha}\;; \text{ d'où } \ldots\ldots \begin{cases} x = \dfrac{\alpha y+1}{y} \\ dx = -\dfrac{dy}{y^2} \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\sqrt{X} = (x-\alpha)\sqrt{\frac{mx^3+nx^2+px+q}{x-\alpha}} = \frac{1}{y^2}\sqrt{m(\alpha y+1)^3+ny(\alpha y+1)^2+py^2(\alpha y+1)+qy^3}$$

et

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{dx}{\sqrt{X}} = -\int \frac{P\left(\frac{\alpha y+1}{y}\right)}{Q\left(\frac{\alpha y+1}{y}\right)} \quad \frac{dy}{\sqrt{m(\alpha y+1)^3 + \cdots\cdots + qy^3}} .$$

On est encore ramené au cas d'un radical portant sur un polynôme d'ordre trois.

Cette méthode convient quand α est une racine réelle du polynôme X ; les calculs précédents n'introduisent alors que des quantités réelles.

Deuxième méthode. – Supposons le polynôme X décomposé en deux facteurs réels du second degré, ce qui est toujours possible quand les coefficients de X sont réels :

$$X = (ax^2 + 2bx + c)(mx^2 + 2nx + p).$$

Si les quatre racines $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ du polynôme X sont réelles, on fera en sorte que les deux plus grandes, λ et μ, soient racines du premier trinôme, $ax^2 + bx + c$; si deux racines sont imaginaires conjuguées, elles seront nécessairement les racines d'un même trinôme.

Cela posé, on va chercher à effectuer un changement de variable de manière à ramener X à la forme bicarrée.

Distinguons deux cas.

a) Si on a :

$$an - bm = 0, \text{ on écrira :}$$

$$X = \frac{m}{a}(ax^2 + 2bx + c)\left(ax^2 + 2bx + \frac{pa}{m}\right)$$

et il suffira de poser :

$$x + \frac{b}{a} = y, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{pour avoir :}$$

$$X = ma\left(y^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2}\right)\left(y^2 + \frac{p}{m} - \frac{b^2}{a^2}\right)$$

ce qui est bien une forme bicarrée.

b) Si au contraire

$$an - bm \gtrless 0, \text{ on posera :}$$

$$x = \frac{\alpha y + \beta}{y+1};$$

α et β étant des constantes. Il vient :

$$\sqrt{X} = \frac{1}{(y+1)^2}\sqrt{\left[a(\alpha y+\beta)^2 + 2b(y+1)(\alpha y+\beta) + c(y+1)^2\right]\left[m(\alpha y+\beta)^2 + \cdots\right]}$$

Choisissons α et β de manière à annuler, sous le radical, le coefficient de y dans chacun des deux facteurs entre crochets ; le polynôme sous le radical sera bicarrée en y. On a ainsi :

$$a\alpha\beta + b(\alpha+\beta) + c = 0$$
$$m\alpha\beta + n(\alpha+\beta) + p = 0,$$

équations qui donnent $\alpha\beta$ et $\alpha+\beta$, car le déterminant $an - bm$ n'est pas nul. On en déduira les valeurs de α et β par une équation du second degré : je dis que ces valeurs seront réelles. On a en effet :

$$\alpha + \beta = \frac{cm - ap}{an - bm} \qquad \alpha\beta = \frac{bp - cn}{an - bm};$$

pour que α et β soient réels, il faut que :

$$(cm - ap)^2 - 4(bp - cn)(an - bm) \geqq 0$$

Or le premier membre de cette inégalité, égalé à zéro, exprimerait que les deux équations

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \quad ; \quad mx^2 + 2nx + p = 0$$

ont une racine commune. Si donc λ et μ sont les racines du premier trinôme, λ' et μ' celles du second, on aura :

$$(cm - ap)^2 - 4(bp - cn)(an - bm) = A(\lambda - \lambda')(\lambda - \mu')(\mu - \lambda')(\mu - \mu'),$$

A étant un coefficient qu'on démontre aisément être égal à $a^2 m^2$.

D'ailleurs, d'après les hypothèses faites plus haut, l'expression

$$a^2 m^2 (\lambda - \lambda')(\lambda - \mu')(\mu - \lambda')(\mu - \mu')$$

est positive : car, si les quatre racines $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ sont réelles, λ et μ sont, par hypothèse, les deux plus grandes ; si λ' et μ' sont imaginaires conjuguées, λ et μ étant réels, les facteurs $\lambda - \lambda', \lambda - \mu'$ et $\mu - \lambda', \mu - \mu'$ sont imaginaires conjugués et leur produit est positif ; enfin si λ et μ, λ' et μ' sont imaginaires conjugués, les facteurs $\lambda - \lambda', \mu - \mu'$ et $\lambda - \mu', \mu - \lambda'$ le sont également, de sorte que leur produit est encore positif.

On a ainsi ramené, par la substitution rationnelle et réelle, $x = \frac{\alpha y + \beta}{y+1}$, le polynôme sous le radical à être bicarrée :

$$\sqrt{X} = \frac{1}{(y+1)^2} \sqrt{My^4 + Ny^2 + R}$$

et on a

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)\sqrt{X}}\, dx = \int \frac{(\alpha - \beta)}{(y+1)^2} \; \frac{P\left(\frac{\alpha y + \beta}{y+1}\right)}{Q\left(\frac{\alpha y+\beta}{y+1}\right)} \; \frac{(y+1)^2 \, dy}{\sqrt{My^4 + Ny^2 + R}}$$

On passera ensuite au cas du polynôme du troisième ordre par la substitution $y^2 = z$, ou $y^2 = \frac{1}{z}$, comme au N° 122.

Troisième méthode. – Il existe une troisième méthode, qui ne suppose rien sur la décomposition du polynôme X en facteurs du premier et du second ordre. On la trouvera dans le Traité d'analyse de M. Jordan (Tome II, 2e Edition, p. 542).

Cas du polynôme du troisième ordre.

124. – Toute la question de l'intégration des différentielles elliptiques se réduit à intégrer l'expression

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

où le polynôme X est du troisième ordre : soit

$$X = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

On fera disparaître le terme en x^2 en posant

$$x = \lambda y - \frac{b}{3a},$$

λ étant une constante qu'on prendra généralement égale à ± 1, mais qu'il est parfois utile de laisser indéterminée pour simplifier, plus tard, les formules. Le polynôme X devient ainsi :

$$a\lambda^3 y^3 + my + n = \frac{a\lambda^3}{4}\left[4y^3 - g_2 y - g_3\right]$$

g_2 et g_3 étant des constantes ; l'intégrale proposée est alors (en ayant soin de choisir le signe de λ de manière que $a\lambda^3$ soit positif.)

$$\int \frac{R(y)}{S(y)} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}$$

En appliquant la méthode de réduction du cours de 1ère année (p. 136 et 137), on la ramène à une partie tout intégrée, et au calcul des trois intégrales de première, seconde et troisième espèces :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} \; ; \; \int \frac{y\,dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} \; ; \; \int \frac{dy}{(y-\alpha)\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}$$

On effectue l'intégration en faisant dans les trois intégrales, le changement de variable :

$$y = \wp(u, g_2, g_3) \quad \text{d'où}$$

$$dy = \wp' u \, du = \pm \sqrt{4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3}$$

le radical se trouve alors en facteur au numérateur et au dénominateur et les trois intégrales deviennent :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = \int du = u + \text{const}$$

$$\int \frac{y\,dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = \int pu.\,du = -\zeta u + \text{const}.$$

$$\int \frac{dy}{(y-a)\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = \int \frac{du}{pu - a}.$$

Pour calculer cette dernière, on appliquera la méthode d'Hermite (Nº 107). Soit $a = p(c)$, c, étant comme a, une constante.

Les pôles de $\frac{1}{pu - pc}$ sont les pôles simples $u = \pm c$; le développement autour du pôle $u = c$ s'obtient en posant $u = c + t$ ce qui donne :

$$\frac{1}{p(c+t) - pc} = \frac{1}{pc + tp'c + \cdots - pc},$$

le premier terme du développement est donc $\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{p'c}$; de même pour le pôle $u = -c$, on aurait $-\frac{1}{t}\frac{1}{p'c}$.
Par suite, la formule d'Hermite

$$\frac{1}{pu - pc} = \frac{1}{p'c}\zeta(u-c) - \frac{1}{p'c}\zeta(u+c) + \text{Const}.$$

La constante s'obtient en faisant $u = 0$, ce qui donne

$$0 = -\frac{2\zeta c}{p'c} + \text{const}; \quad \text{d'où}$$

$$\frac{1}{pu - pc} = \frac{-1}{p'c}\left[\zeta(u+c) - \zeta(u-c) - 2\zeta c\right]$$

formule obtenue autrement au Nº 110. En intégrant on a finalement :

$$\int \frac{du}{pu - pc} = -\frac{1}{p'c}\left[\log\sigma(u+c) - \log\sigma(u-c) - 2u\zeta c\right] + \text{const}.$$

Le problème de l'intégration des différentielles elliptiques est donc complètement résolu.

125. – Remarque. — Il arrive souvent que les racines du polynôme X sont en évidence :

$$X = A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

On pose alors, conformément au N° 124 :

$$x = \lambda y + \frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)$$

d'où

$$X = A\lambda^3 (y-e_\alpha)(y-e_\beta)(y-e_\gamma) \dots \quad \text{où} \quad \begin{cases} e_\alpha = \frac{1}{\lambda}\left[\alpha - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right] \\ e_\beta = \frac{1}{\lambda}\left[\beta - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right] \\ e_\gamma = \frac{1}{\lambda}\left[\gamma - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right] \end{cases}$$

et on intègrera en posant

$$y = \wp(u, e_\alpha, e_\beta, e_\gamma).$$

C'est la méthode générale ; seulement il n'y a pas besoin de calculer m et n, c.à.d. g_2 et g_3 ; on se sert des racines e_α au lieu de se servir des invariants.

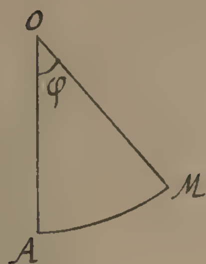
II. – Pendule simple.

Une des applications les plus simples des fonctions elliptiques est l'étude du mouvement du pendule.

Soit φ l'angle que fait, au temps t, la tige OM du pendule avec la verticale dirigée vers le bas : on suppose qu'à l'origine du mouvement, alors que l'angle φ était égal à φ_0, on ait imprimé au point pesant une vitesse initiale v_0. La longueur de la tige du pendule étant l, l'équation du mouvement est :

$$\frac{l}{g}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\sin\varphi.$$

Multipliant les deux membres par $\frac{d\varphi}{dt}$ et intégrant par rapport



à t, on obtient

(1) $$\frac{1}{2}\frac{l}{g}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \cos\varphi - m,$$

m étant une constante, qu'on détermine en écrivant que pour $\varphi = \varphi_0$, on a $l\frac{d\varphi}{dt} = v_0$: par suite

(2) $$m = \cos\varphi_0 - \frac{v_0^2}{2gl} \quad \ldots \text{(} m < 1 \text{ évidemment)}$$

L'équation (1) s'écrit :

$$\sqrt{\frac{2g}{l}}\,dt = \frac{d\varphi}{\pm\sqrt{\cos\varphi - m}}$$

Le second membre se ramène à la différentielle elliptique de première espèce en posant

$$\cos\varphi = x \;;$$

d'où :

$$\sqrt{\frac{2g}{l}}\,dt = \frac{dx}{\pm\sqrt{(1-x^2)(x-m)}}$$

Pour réduire à la forme normale posons :

$$x = -y + \frac{m}{3} \;; \qquad \text{il vient}$$

$$\sqrt{\frac{2g}{l}}\,dt = \pm\frac{dy}{\sqrt{\left(y-\frac{m}{3}+1\right)\left(y-\frac{m}{3}-1\right)\left(y+\frac{2m}{3}\right)}}$$

(3) $$e_\alpha = \frac{m}{3} - 1 \;; \qquad e_\beta = \frac{m}{3} + 1 \;; \qquad e_\gamma = -\frac{2m}{3}$$

et .... $y = p(u, e_\alpha, e_\beta, e_\gamma)$; on obtient :

$$\sqrt{\frac{2g}{l}}\,dt = \pm 2\,du \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{d'où :}$$

$$\pm u = \sqrt{\frac{g}{2l}}\,t + C$$

et enfin

$$\cos\varphi = x = -y + \frac{m}{3} = -p\left[\sqrt{\frac{g}{2l}}\,t + c\right] + \frac{m}{3}$$

Pour déterminer la constante c, comptons le temps à partir du moment où le pendule passe par la verticale, de O vers A : on aura $\varphi = 0$, pour $t = 0$; d'où :

$$p(c) = \frac{m}{3} - 1 = e_\alpha$$

$$\text{donc} \ldots\ldots \quad c = \pm\,\omega_\alpha + \text{Période} = \omega_\alpha + \text{Période}$$

L'équation définitive est donc :

$$\cos = \frac{m}{3} - p\left[\sqrt{\frac{g}{2l}}\,t + \omega_\alpha\right]$$

on peut remplacer $p\left(\sqrt{\frac{g}{2l}}\,t + \omega_\alpha\right)$ par sa valeur déduite du théorème d'addition (N° 112) :

$$\cos\varphi = \frac{m}{3} - e_\alpha - \frac{(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)}{p\left[\sqrt{\frac{g}{2l}}\,t\right] - e_\alpha}\,,$$

ou, en remplaçant les e par leurs valeurs ;

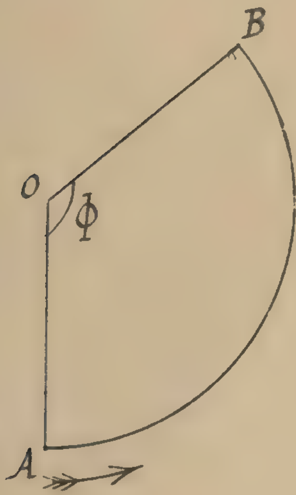
(4) $$\cos\varphi = 1 - \frac{2(1-m)}{p\left[\sqrt{\frac{g}{2l}}\,t\right] + 1 - \frac{m}{3}}$$

Discussion. — Les quantités e_α étant réelles, $p u$ admet une période réelle ; par conséquent le mouvement du pendule est périodique. Mais il est remarquable que l'expression de cette période varie selon les conditions initiales.

Considérons en effet les quantités e_α, e_β, e_γ et cherchons à les ranger par ordre de grandeur. Il est clair que $e_\beta > e_\alpha$; de même, dans tous les cas, $e_\gamma > e_\alpha$, car $e_\gamma - e_\alpha = 1 - m = (1 - \cos\varphi_0) + \frac{v_0^2}{2gl}$, quantité positive. Reste donc à comparer e_β et e_γ ; or $e_\beta - e_\gamma = m + 1 = 1 + \cos\varphi_0 - \frac{v_0^2}{2gl}$, quantité qui peut être positive ou négative.

Distinguons donc deux cas, selon que $m+1>0$ ou <0.

127. – Premier cas $m+1>0$. – L'ordre de grandeur croissante des racines e est $e_\alpha < e_\gamma < e_\beta$; soit $2\Omega_1$ la période réelle :



$$\Omega_1 = \int_{e_\alpha}^{e_\gamma} \frac{dz}{2\sqrt{(z-e_\alpha)(z-e_\gamma)(z-e_\beta)}} \quad \ldots\ldots (\text{N}^\circ 119)$$

Supposons que le mouvement du pendule, à l'instant $t=0$, s'effectue dans le sens de la flèche, et posons, pour un moment, $\theta = \sqrt{\frac{g}{2l}}\,t$. Quand θ croît de 0 à Ω_1, $p\theta$ décroît de $+\infty$ à e_β, c. à. d. d'après (4), que $\cos\varphi$ décroît de 1 à $1 - \dfrac{2(1-m)}{e_\beta + 1 - \frac{m}{3}} = m$, ou que φ croît de 0 à un angle Φ donné par

$$\cos\Phi = m .$$

Cet angle est réel $<\pi$, puisque $-1<m<1$, et puisque $\cos\varphi$ a décru constamment de 1 à m.

Si on fait croître ensuite θ de Ω_1 à $2\Omega_1$, $p\theta$ croît de e_β à $+\infty$, et d'après (4), $\cos\varphi$ repasse par les valeurs déjà prises jusqu'à 1, c. à. d. que le pendule revient en arrière, jusqu'en OA. Le mouvement s'effectue ensuite à gauche de OA, dans des conditions de symétrie évidentes, pour θ compris entre $2\Omega_1$ et $4\Omega_1$. A partir de $\theta = 4\Omega_1$, tout se reproduit périodiquement, c. à. d. que la période du mouvement pendulaire est $4\Omega_1$, pour la variable $\theta = \sqrt{\frac{g}{2l}}\,t$; la durée de la période est donc :

$$T = 4\sqrt{\frac{2l}{g}}\,\Omega_1$$

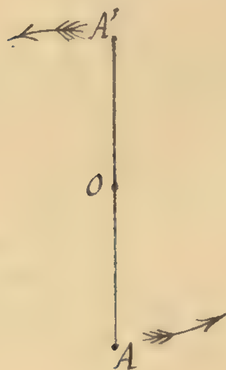
T est aussi le temps que le pendule, partant d'une quelconque de ses positions, met à y revenir pour la première fois, avec la vitesse dirigée dans le même sens.

128. – Deuxième cas. – $m+1<0$. – L'ordre de grandeur des

e est $e_\alpha < e_\beta < e_\gamma$; la période réelle, $2\Omega'_1$, est alors:

$$\Omega'_1 = \int_{e_\alpha}^{e_\beta} \frac{dz}{2\sqrt{(z-e_\alpha)(z-e_\beta)(z-e_\gamma)}}.$$

On voit comme plus haut que θ croissant à partir de 0 jusqu'à Ω'_1, $\cos\varphi$ décroît de 1 à $1 - \dfrac{2(1-m)}{e_\gamma + 1 - \frac{m}{3}} = -1$; par suite φ croît de 0



à π, c. à. d. que le pendule va de la position OA à la position opposée OA'. Si θ croît de Ω'_1, à $2\Omega'_1$, $\cos\varphi$ croît de -1 à $+1$, c. à. d. que le pendule va de OA' à OA, évidemment à gauche de la verticale. A partir de $\theta = 2\Omega'_1$, tout se reproduit périodiquement, c. à. d. que la durée de la période est

$$T = 2\sqrt{\frac{2l}{g}}\,\Omega'_1 .$$

III. — Cubiques planes.

---

129. — Les cubiques planes (c. à. d. les courbes du troisième ordre) se rattachent aux fonctions elliptiques par cet important théorème qu'on va établir:

Les coordonnées d'un point d'une cubique plane peuvent s'exprimer par des fonctions elliptiques d'un paramètre.

On sait en effet qu'une cubique plane générale admet des points d'inflexion (neuf, en général); prenons un de ces points comme origine des coordonnées, et la tangente en ce point comme axe des x; l'équation de la courbe est de la forme:

$$Ax^3 + Bx^2y + Cy^2x + Dy^3 + 2y(\alpha x + \beta y) + y = 0,$$

car y doit être en facteur dans les termes du second degré. Posons:

$$\frac{1}{y} = \eta ; \qquad \frac{x}{y} = \zeta ;$$

il vient en divisant le premier membre de l'équation par y^3 :

$$\eta^2 + 2\eta(\alpha\zeta + \beta) + A\zeta^3 + B\zeta^2 + C\zeta + D = 0 ;$$

ce qui s'écrit :

$$(\eta + \alpha\zeta + \beta)^2 = -A\zeta^3 + (\alpha^2 - B)\zeta^2 + (2\alpha\beta - C)\zeta + \beta^2 - D$$

Posons :

$$\zeta = mX + n ,$$

et déterminons m et n de manière que, dans le second membre, le terme en X^2 disparaisse, et que le coefficient du terme en X^3 soit égal à 4 ; on a :

$$\left[\eta + \alpha(mX+n) + \beta\right]^2 = 4X^3 - g_2 X - g_3 .$$

On peut alors poser :

$$X = p(u, g_2, g_3) ,$$

ce qui donne ...... $\eta + \alpha(mX+n) + \beta = p'u$;

d'où .... $\eta = p'u + \lambda\, pu + \mu$,

λ et μ étant des constantes. Remontant de X et η à ζ, x et y on a :

$$y = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{p'u + \lambda pu + \mu} \qquad x = y\zeta = y(mX+n) = \frac{mpu + n}{p'u + \lambda pu + \mu}$$

On a ainsi exprimé x et y en fonction elliptique du paramètre u ; ces formules sont comprises, comme cas-particuliers, dans les suivantes :

$$(0) \qquad x = \frac{\alpha p'u + \beta pu + \gamma}{ap'u + b pu + c} ; \qquad y = \frac{\alpha' p'u + \beta' pu + \gamma'}{ap'u + b pu + c}$$

Observons qu'à une valeur, u, du paramètre et aux valeurs u + Période correspond, par les formules (0), le même point x, y.

Inversement, je dis que la courbe que représentent ces deux équations, u étant un paramètre variable, est une cubique. En effet, une droite quelconque, $Ax + By + C = 0$, la coupe en des points dont les arguments, u, vérifient l'équation

$$A(\alpha p'u + \beta pu + \gamma) + B(\alpha' p'u + \cdots) + C(a p'u + \cdots) = 0 ;$$

le premier membre de cette équation est une fonction elliptique d'ordre 3, car elle n'admet, à des périodes près, que le pôle triple $u = 0$; elle a donc trois zéros ; la courbe étant ainsi coupée en trois points par une droite quelconque, et étant d'ailleurs algébrique (N° 92), est d'ordre trois.

Propriétés géométriques des cubiques planes.

130. _ Nous venons de voir que les arguments, u_1, u_2, u_3, des trois points où une droite quelconque rencontre la cubique (0) sont les zéros d'une fonction elliptique d'ordre trois, admettant le pôle triple $u = 0$; donc on a pour trois points en ligne droite (N° 90):

$$u_1 + u_2 + u_3 = \text{période}.$$

Inversement, si les arguments, u_1, u_2, u_3 de trois points de la cubique vérifient la relation $u_1 + u_2 + u_3 = \text{période}$, ces points sont en ligne droite : car la droite menée par u_1 et u_2 coupe la cubique en un nouveau point u' tel que $u_1 + u_2 + u'$ soit une période ; on aura donc $u_3 = u' + \text{période}$, c'est-à-dire que le point u' coïncidera géométriquement avec u_3.

De même, pour que six points, $u_1, u_2, \ldots u_6$ soient sur une conique, il faut et il suffit que

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_6 = \text{période}$$

De là se réduisent de nombreuses propriétés géométriques.

131. _ Par exemple : Si trois couples de points d'une cubique sont sur une conique, les trois cordes correspondantes coupent la cubique en trois nouveaux points qui sont en ligne droite.

Car si u_1, u_1' ; u_2, u_2' ; u_3, u_3' sont les points des trois

couples, les trois nouveaux points sont $-(u_1+u_1')$, $-(u_2+u_2')$, $-(u_3+u_3')$, et on a bien

$$-(u_1+u_1'+u_2+u_2'+u_3+u_3') = \text{période},$$

puisque les six points primitifs sont sur une conique.

Corollaires. – On peut supposer que la conique se réduit à deux droites, d'où un corollaire facile à énoncer ; si les deux droites sont confondues, on a cette proposition : Trois tangentes à une cubique dont les points de contact sont en ligne droite coupent la courbe en trois nouveaux points qui sont aussi en ligne droite ..... etc.

132. – Points d'inflexion. – En un point d'inflexion, u, passe une droite (la tangente) qui coupe la courbe en trois points confondus avec u ; donc :

$$3u = \text{période}$$

d'où : .....

$$u = \frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{3}$$

Il y a donc neuf points d'inflexion, obtenus en donnant à m_1, m_2 les valeurs 0, 1, 2 : car aux valeurs m_1, m_2 et m_1+3h, m_2+3k correspond le même point. Soient (m_1, m_2) et (m_1', m_2') deux de ces points : la droite qui les joint coupe la cubique en un nouveau point qui est aussi d'inflexion, car son argument est

$$\frac{-2(m_1+m_1')\omega_1 - 2(m_2+m_2')\omega_2}{3}.$$ car la somme des 3 argum.

Les points d'inflexion sont ainsi trois à trois, sur des droites, dont il passe évidemment 4 par chacun d'eux. On a ainsi, en tout, $9 \times 4 = 36$ droites, dont chacune est comptée trois fois : le nombre des droites est donc $\frac{36}{3} = 12$.

On verrait de même qu'il y a $6^2 = 36$ points sextactiques, c'est-à-dire où une conique a un contact du cinquième ordre avec la cubique ; parmi ces points figurent les points d'inflexion, pour lesquels la conique se réduit à la tangente comptée deux fois ; il reste donc 27 points sextactiques ; leurs arguments sont des sixièmes de période.

133. – Tangentes issues d'un point. – Les arguments, v, des

points de contact des tangentes menées à la cubique par un de ses points, u, vérifient l'équation :

$$2v + u = \text{Période}$$

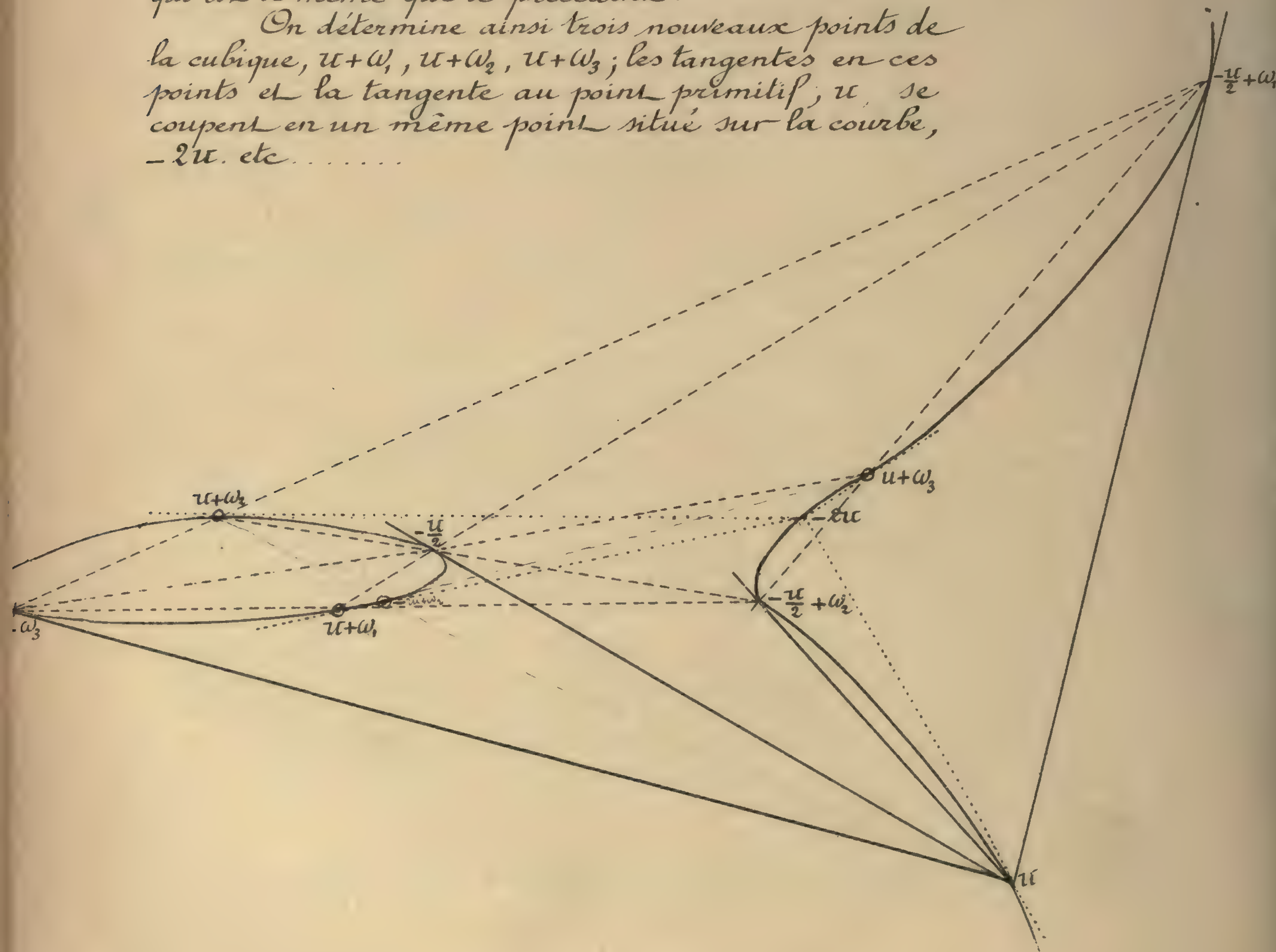
ou

$$v = -\frac{u}{2} + \frac{1}{2}\ \text{période}.$$

Il y a quatre demi-périodes distinctes aux périodes près, savoir : $0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$; donc quatre tangentes.

La droite qui joint deux quelconques des points de contact et celle qui joint les deux autres se rencontrent sur la cubique ; car la droite $\left(-\frac{u}{2}, -\frac{u}{2} + \omega_1\right)$, coupe encore la cubique au point $u + \omega_1$, et la droite $\left(-\frac{u}{2} + \omega_2, -\frac{u}{2} + \omega_3\right)$ la coupe au point $u - \omega_2 - \omega_3$ c. à. d. $u + \omega_1$, qui est le même que le précédent.

On détermine ainsi trois nouveaux points de la cubique, $u + \omega_1$, $u + \omega_2$, $u + \omega_3$; les tangentes en ces points et la tangente au point primitif, u, se coupent en un même point situé sur la courbe, $-2u$. etc ......



Intégration des différentielles abéliennes relatives à une cubique.

134. — On dit qu'une différentielle est abélienne relativement à une courbe algébrique si elle est de la forme :

$$F(x,y)\,dx,$$

F étant rationnel en x, y ; et y étant liée à x par l'équation $f(x,y)=0$ de la courbe. Pour une cubique, x et y étant des fonctions elliptiques d'un paramètre u, la différentielle abélienne prend la forme : $\varphi(u)\,du$, $\varphi(u)$ étant elliptique. On peut donc l'intégrer par la méthode de M. Hermite.

135. — Exemples. — 1° Les intégrales :

$$\int \frac{dx}{(x^3+ax^2+bx+c)^{\frac{1}{3}}}\,;\quad \int \frac{dx}{(x^3+ax^2+bx+c)^{\frac{2}{3}}}$$

se ramènent aux intégrales elliptiques ; car en posant

(1) $$y^3 = x^3+ax^2+bx+c$$

elles s'écrivent $\int \frac{dx}{y}$; $\int \frac{dx}{y^2}$; elles sont donc abéliennes relativement à la cubique (1). Pour les calculer, il faut exprimer les coordonnées, x et y, d'un point de (1) en fonction elliptique d'un paramètre ; or en décomposant le second membre en facteurs, l'équation (1) s'écrit :

(2) $$y^3 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma),$$

et un point d'inflexion de cette courbe est en évidence, le point $y=0$, $x=\alpha$, où la tangente est la droite $x-\alpha=0$. La méthode du N° 129 s'applique alors sans difficulté.

2° L'aire comprise entre un arc de cubique, les deux ordonnées extrêmes et l'axe des x a pour valeur :

$$\int y\,dx\,;$$

on saura donc la calculer par les fonctions elliptiques ; il en est de même de l'aire comprise entre un arc de cubique et les deux rayons

qui vont de l'origine des coordonnées aux extrémités de cet arc, car elle a pour expression

$$\frac{1}{2}\int(x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}xy - \int y\,dx$$

IV. – Courbes de genre un.

136. – On nomme genre d'une courbe indécomposable d'ordre n, la différence entre le nombre maximum de points doubles que comporte son degré (cours de 1ère année, N° 141) et le nombre effectif de ses points doubles. Si δ est ce dernier nombre, le genre est :

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \delta$$

137. – Les coordonnées des points d'une courbe de genre un, $f(x,y)=0$, s'expriment en fonction elliptique d'un paramètre.

En effet, les courbes adjointes, $\varphi=0$, d'ordre $n-2$, (c.à.d. les courbes d'ordre $n-2$ qui passent par les points doubles de la proposée supposée d'ordre n) dépendent, d'une manière linéaire et homogène de $\frac{1}{2}(n-1)n - \left[\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-1\right] = n$ coefficients[1]; celles de ces courbes qui passent par $n-3$ points fixes, pris arbitrairement sur la courbe de genre un, $f=0$, dépendent de $n-(n-3)=3$ coefficients, et leur équation est de la forme :

$$C_1\varphi_1(x,y) + C_2\varphi_2(x,y) + C_3\varphi_3(x,y) = 0\,.$$

Le nombre des points d'intersection mobiles d'une de ces courbes avec f est égal à $n(n-2) - [(n-1)(n-2)-2] - (n-3) = 3$[2]

---

[1] Car l'équation générale d'ordre $n-2$, en x et y, renferme, sous forme linéaire et homogène, $\frac{1}{2}(n-1)n$ coefficients, et les points doubles de la proposée sont en nombre égal à $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-1$, puisque le genre est 1.

[2] Car les points fixes d'intersection sont 1° les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-1$ points doubles, qui comptent chacun pour deux intersections ; 2° les $n-3$ points simples.

Posons

$$(R) \qquad \xi = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}(x,y); \qquad \eta = \frac{\varphi_3}{\varphi_1}(x,y).$$

Lorsque le point x, y décrit la courbe proposée $f(x,y)=0$, le point de coordonnées ξ, η décrit une courbe, $F(\xi,\eta)=0$, dont l'équation s'obtient par l'élimination de x, y entre la relation $f(x,y)=0$ et les relations (R). Je dis que cette courbe est du troisième ordre.

Car le nombre des points mobiles où elle est coupée par une droite quelconque, $C_2\xi + C_3\eta + C_1 = 0$, est celui des points mobiles, x, y qui vérifient les relations

$$f(x,y)=0 \text{ et } C_2\varphi_2(x,y)+C_3\varphi_3(x,y)+C_1\varphi_1(x,y)=0,$$

nombre égal à 3, comme on vient de le voir.

Par les relations (R), à chaque point x, y de $f(x,y)=0$, correspond un seul point ξ, η de la courbe $F(\xi,\eta)=0$; inversement, je dis qu'à un point ξ, η correspond un seul point, x, y. Car si, à un certain système de valeurs de ξ, η correspondaient deux points x_0, y_0 et x_1, y_1, on aurait

$$\xi = \frac{\varphi_2(x_1,y_1)}{\varphi_1(x_1,y_1)} = \frac{\varphi_2(x_0,y_0)}{\varphi_1(x_0,y_0)}; \qquad \eta = \frac{\varphi_3(x_1,y_1)}{\varphi_1(x_1,y_1)} = \frac{\varphi_3(x_0,y_0)}{\varphi_1(x_0,y_0)};$$

d'où

$$\frac{\varphi_1(x_1,y_1)}{\varphi_1(x_0,y_0)} = \frac{\varphi_2(x_1,y_1)}{\varphi_2(x_0,y_0)} = \frac{\varphi_3(x_1,y_1)}{\varphi_3(x_0,y_0)}$$

D'après cela, celles des courbes adjointes $C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + C_3\varphi_3 = 0$ qui passent par x_0, y_0 passeraient par x_1, y_1; en sorte que ces courbes, qui dépendent linéairement d'un paramètre, couperaient f en un seul point mobile; les coordonnées d'un point de la courbe $f=0$ s'exprimeraient dès lors en fonction rationnelle du paramètre, (Cours de 1ère année, N° 142) d'où l'on déduirait que cette courbe est unicursale, c. à. d. de genre zéro. (Cours de 1ère année, N° 143).

Donc à un point ξ, η de la cubique $F=0$ correspond un seul point, x, y de $f=0$; c'est-à-dire que les trois équations:

$\xi = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}(x,y)$; $\eta = \frac{\varphi_3}{\varphi_1}(x,y)$; $f(x,y) = 0$ ont, en x, y, une et une seule solution commune. Par suite d'après la théorie de l'élimination, les quantités x, y s'exprimeront rationnellement en ξ, η; d'ailleurs ξ, η, coordonnées d'un point d'une courbe du troisième ordre s'exprimant (N.° 129) en fonction elliptique d'un paramètre, u, les quantités x, y seront aussi elliptiques en u. c.q.f.d.

138. — Intégration des différentielles abéliennes appartenant à une courbe de genre un. — Il résulte de là que, si la courbe $f(x,y) = 0$ est de genre un, on saura intégrer toute différentielle abélienne lui appartenant : $\psi(x,y)\,dx$. Il suffira de remplacer x et y dans la différentielle par leurs valeurs en fonction elliptique d'un paramètre, et on sera ramené à intégrer une fonction elliptique, ce qu'on sait faire par la méthode de M. Hermite. En particulier on saura évaluer les aires limitées par des arcs de courbes de genre 1.

Chapitre IV.

Chapitre IV.

Calculs numériques.

139. – On va indiquer dans ce chapitre, la méthode à suivre pour pousser jusqu'au bout les calculs numériques des intégrales elliptiques réelles.

Le problème est de calculer l'intégrale

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{dx}{\sqrt{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+F}}$$

On commence par ramener le polynôme sous le radical au troisième degré, s'il n'était pas déjà de ce degré (ce qui se fait sans introduire d'imaginaires) : on peut donc supposer $A=0$. On peut supposer B positif, car s'il ne l'était pas, il suffirait de faire le changement de variable $x=-y$. Faisant sortir B du radical, on est ainsi ramené au calcul d'une intégrale de la forme

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{dx}{\sqrt{x^3+mx^2+nx+p}}$$

où tous les coefficients sont réels, ainsi que les limites x_0 et x_1. Avant d'appliquer la méthode analytique générale indiquée au N° 124, (où l'on commence par faire disparaître le terme en x^2), il conviendra, au point de vue des calculs numériques de distinguer trois cas.

1° Les trois racines du polynôme x^3+mx^2+nx+p sont réelles, et les limites x_0, x_1 sont supérieures à la plus grande racine.

2° Les racines du polynôme sont réelles, mais les limites ne sont pas supérieures à la plus grande.

3° Le polynôme x^3+mx^2+nx+p n'a qu'une racine réelle.

Les deux derniers cas se ramèneront au premier, chacun par un changement de variable, de la manière suivante.

Transformation relative au troisième cas.

140. — Soit

$$x^3+mx^2+nx+p=(x-h)(x^2+ax+b)$$

h étant la racine réelle, et les racines de x^2+ax+b étant imaginaires. On a donc :

$$a^2-4b<0$$

On fera, dans l'intégrale (2), le changement de variable réel :

$$y=\frac{x^2+ax+b}{x-h}$$

d'où :

$$x^2+x(a-y)+b+hy=0$$

$$(3) \qquad x=\frac{1}{2}\left[y-a+\varepsilon\sqrt{y^2-2y(a+2h)+a^2-4b}\right]=\frac{1}{2}\left(y-a+\varepsilon\sqrt{Y}\right)$$

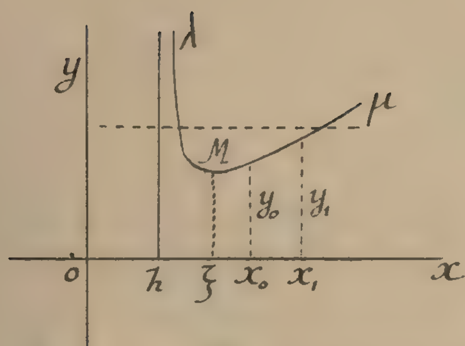
$\sqrt{Y}$ représentant le radical en y, et $\varepsilon=\pm 1$.

Il s'agit tout d'abord de fixer le signe à choisir devant $\sqrt{Y}$. Considérons à cet effet la courbe (hyperbole).

$$y=\frac{x^2+ax+b}{x-h},$$

à droite de l'asymptote $x=h$ (car pour que le radical $\sqrt{(x-h)(x^2+ax+b)}$ soit réel, il faut que les limites de l'intégrale (2) soient supérieures à h).

Soient x_0 et x_1 les limites de cette intégrale ; désignons par ξ l'abscisse du point M, qui correspond au minimum de



l'ordonnée. A une valeur de y correspondent, sur l'hyperbole, deux valeurs de x; on obtient l'x du point situé à droite de M en prenant dans (3), $\varepsilon = +1$; l'x du point situé à gauche en prenant $\varepsilon = -1$. Il résulte de là que si les limites x_0 et x_1 sont supérieures à ξ, on devra prendre $\varepsilon = +1$; si elles sont inférieures à ξ, $\varepsilon = -1$.

Enfin si elles comprennent ξ, on décomposera l'intégrale (1) en deux autres:

$$\int_{x_0}^{\xi} + \int_{\xi}^{x_1} ;$$

dans la première ε sera -1, et dans la seconde $\varepsilon = +1$.

On a ainsi déterminé le signe à choisir devant $\sqrt{X}$; le calcul s'achève ensuite aisément.

De la valeur de x en fonction de y, on tire dx:

$$dx = \frac{dy}{2}\left[1 + \frac{y - a - 2h}{\varepsilon\sqrt{Y}}\right]; \text{ on a ensuite :}$$

$$\sqrt{x^3 + mx^2 + nx + p} = (x - h)\sqrt{\frac{x^2 + ax + b}{x - h}} = \frac{1}{2}\sqrt{y}\left[y - a - 2h + \varepsilon\sqrt{Y}\right]$$

ce qui donne:

$$\frac{dx}{\sqrt{x^3 + mx^2 + nx + p}} = \frac{dy}{\sqrt{y}}\,\frac{1}{\varepsilon\sqrt{Y}}$$

Portant les valeurs ci-dessus dans l'intégrale (2) celle-ci devient en désignant par y_0 et y_1 les limites nouvelles en y:

$$\int_{y_0}^{y_1} \frac{P}{Q}\left(\frac{y - a + \varepsilon\sqrt{Y}}{2}\right)\frac{dy}{\varepsilon\sqrt{Yy}}$$

Or la fonction rationnelle, $\frac{P}{Q}$, de $\frac{1}{2}\left(y - a + \varepsilon\sqrt{Y}\right)$ se met sous la forme (cours de 1ère année, n° 154):

$$\frac{A + B\varepsilon\sqrt{Y}}{C} \quad \ldots\ldots\ldots \text{ A, B, C étant des polynômes en } y.$$

L'intégrale proposée devient donc :

$$\int_{y_0}^{y_1} \frac{A}{C} \frac{dy}{\varepsilon\sqrt{Yy}} + \int_{y_0}^{y_1} \frac{B}{C} \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

La deuxième intégrale se ramène aux fonctions élémentaires par la substitution $y = z^2$; la première est elliptique : le polynôme sous le radical, Yy est de troisième ordre :

$$Yy = y\left[y^2 - 2y(a+2h) + a^2 - 4b\right].$$

Il a ses trois racines réelles, car $a^2 - 4b$ est négatif, par hypothèse.

D'ailleurs les limites y_0 et y_1 de l'intégrale

$$\int_{y_0}^{y_1} \frac{A}{C} \frac{dy}{\sqrt{Yy}}$$

sont supérieures à la plus grande racine du polynôme Yy, c'est-à-dire la racine positive de $y^2 - 2y(a+2h) + (a^2 - 4b) = 0$. Cette racine en effet, d'après l'expression (3) de x, est l'ordonnée du point M, et y_0, y_1 sont les ordonnées de deux points de la branche d'hyperbole $\lambda M \mu$, ce qui établit la proposition.

Le troisième cas est ainsi ramené au premier.

Transformation relative au deuxième cas.

141. – On a : $x^3 + mx^2 + nx + p = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ ..... $\alpha > \beta > \gamma$, α, β, γ étant réels. Pour que l'intégrale

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}}$$

soit réelle, il faut que x_0 et x_1 soient compris simultanément dans un des intervalles $\gamma — \beta$ et $\alpha — +\infty$. Par hypothèse x_0 et x_1 ne sont pas tous deux supérieurs à α ; ils sont donc entre γ et β. On fera en ce cas le changement de variable :

$$x = \gamma + \frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{y-\gamma}.$$

Quand x va de γ à β, y va de $+\infty$ à α ; les limites nouvelles, y_0 et y_1 sont donc supérieures à α. Or on a :

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = \frac{(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2}{(y-\gamma)^3}(y-\alpha)(y-\beta)$$

$$dx = -\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{(y-\gamma)^2}\,dy$$

L'intégrale (2) devient ainsi :

$$\int_{y_0}^{y_1} \frac{R(y)}{S(y)} \frac{dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)}}$$

les limites étant maintenant supérieures à α. On est encore ramené au premier cas.

Calculs définitifs.

---

142. — Donc, finalement la question revient à calculer

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}}$$

où $\alpha > \beta > \gamma$ et $x_0\, x_1 > \alpha$. On applique maintenant la méthode générale en posant $x = y + \frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)$, de manière à faire disparaître le terme du second ordre sous le radical, et les nouvelles limites, y_0, y_1, restent évidemment supérieures à la plus grande racine du polynome en y sous le radical.

On a ainsi à évaluer (en récrivant x au lieu de y)

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{dx}{\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}, \text{ où } \begin{cases} e_1 > e_3 > e_2 \\ e_1+e_2+e_3 = 0 \\ x_0, x_1 > e_1 \end{cases}$$

intégrale qui se décompose (Cours de 1ère Année, p. 136 et 137) en intégrales de première, seconde et troisième espèces.

143. — Calcul de l'intégrale de première espèce. — Cette intégrale est

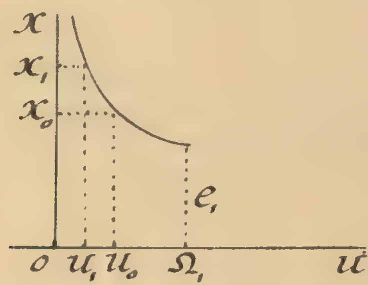
$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}} \qquad (x_0 < x_1)$$

On y pose, suivant la méthode générale, $x = p(u, e_1, e_2, e_3)$, d'où

$$dx = p'u \cdot du$$

$$\pm p'u = 2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}$$

Pour déterminer le signe, supposons $x_0 < x_1$: quand $x (= pu)$ croît de x_0 à x_1, la forme de la courbe $x = pu$ montre que u décroît de u_0 à u_1 ; $p'u$ est donc négatif, et il faut prendre le signe —. D'ailleurs u_0 et u_1 sont positifs et inférieurs à la demi période réelle, Ω_1.



L'intégrale proposée devient ainsi

$$\int_{u_1}^{u_0} du = u_0 - u_1$$

Calculons u_0 et u_1. Cela revient à chercher la valeur u_0, positive et inférieure à Ω_1, qui vérifie l'équation

$$pu_0 = x_0 \; ; \; \ldots\ldots\ldots \; x_0 \text{ étant donné.}$$

on se servira pour cela de la Table III, extraite d'une table plus complète de Legendre. Cette table à double entrée donne les valeurs de v quand on suppose connu $sn\,(v, k)$. Soit, comme au N° 116

$$sn\, v = \sqrt{e_1 - e_2} \; ; \qquad u = \frac{v}{\sqrt{e_1 - e_2}}$$

$$k^2 = \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}$$

On pose : $\quad k = \sin\theta \; ; \quad sn\, v = \sin\varphi$

ce qui est possible, car $k < 1$, et $\operatorname{Sn} v < 1$, puisque pu ($= x_0$) est supposé supérieur à e_1. On a ainsi pour θ et φ deux angles compris entre 0 et 90° : la table III donne alors, pour des valeurs données de θ et de φ, une valeur de v, c. à. d. une valeur de v quand on se donne $\operatorname{Sn} v$ et K^2. Par suite, pu_0 étant donné : $pu_0 = x_0$, on posera :

$$\sin\varphi = +\sqrt{e_1 - e_2}\,\frac{1}{+\sqrt{x_0 - e_2}}$$

$$\sin\theta = +\sqrt{\frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}}$$

et la Table III donnera $u_0\sqrt{e_1 - e_2}$ pour les valeurs ainsi déterminées de θ et de φ ; d'où u_0. On aura de même u_1.

144. – Calcul de l'intégrale de seconde espèce. – Cette intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{x\,dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}$$

devient, par la substitution $x = p(u, e_\alpha)$:

$$\int_{u_1}^{u_0} pu\,du = \zeta u_1 - \zeta u_0\ ,$$

u_1 et u_0 étant les mêmes que ci-dessus.

Il faut donc calculer ζv, v étant donné ; plus généralement, on va indiquer le moyen de calculer σv, ζv, et pv, quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire de v ce qui est fréquemment utile.

On commence, pour cela, par calculer les périodes de pu : les e_α étant réels, il y a (N° 119) une période réelle, $2\Omega_1$, et une période purement imaginaire, $2\Omega' i$, lesquelles forment un système primitif ; de plus, puisque $2\Omega_1$ et $2\Omega' i$ sont $2\omega_1$ et $2\omega_2$:

$$p(\Omega_1) = e_1 \quad ; \quad p(\Omega' i) = e_2\,.$$

145. – Calcul des périodes et de q. – La fonction $\operatorname{Sn} u$ admet (N° 116) les périodes :

$$2\omega_2\sqrt{e_1-e_2}\ ,\ \ 4\omega_1\sqrt{e_1-e_2}\ ; \qquad \text{c'est-à-dire :}$$

$$2\Omega' i\sqrt{e_1-e_2}\ ;\ \ 4\Omega_1\sqrt{e_1-e_2}$$

Le quart, K, de la période réelle de $\operatorname{Sn} u$ est fournie par la Table I ; pour chaque valeur de $k = \operatorname{Sin}\theta$, c'est-à-dire de :

$$\operatorname{Sin}\theta = \sqrt{\frac{e_3-e_2}{e_1-e_2}}\ ,$$

la Table I donne un nombre K, d'où on tire Ω_1, par la relation $\Omega_1 = \dfrac{K}{\sqrt{e_1-e_2}}$.

La période imaginaire, $2\Omega' i$, se calcule à l'aide de la Table II qui donne, pour chaque valeur de l'angle θ, le logarithme vulgaire de la quantité

$$q = e^{-\pi\frac{\Omega'}{\Omega_1}}$$

On conçoit qu'une table à simple entrée suffise : car une table à simple entrée donnerait le rapport des périodes de $\operatorname{Sn} u$, puisque celles-ci ne dépendent que d'un seul paramètre, k ; or le rapport des périodes de $\operatorname{Sn} u$ est

$\dfrac{2\Omega' i\sqrt{e_1-e_2}}{4\Omega_1\sqrt{e_1-e_2}} = \dfrac{\Omega' i}{2\Omega_1}$, en sorte qu'une table à simple entrée donnera le rapport $\dfrac{\Omega'}{\Omega_1}$, ou $e^{-\pi\frac{\Omega'}{\Omega_1}}$.

On pourra ainsi, connaissant q et Ω_1 calculer Ω' ; (1) mais généralement c'est de q seul qu'on a besoin.

146. – Calcul des fonctions thêta, σ, ζ et p. – Pour calculer σ, ζ et p, on passe par l'intermédiaire des séries thêta, qui sont très

---

(1) $2\Omega'$, étant (N° 120, 2°) la période réelle de $p(u, -e_1, -e_2, -e_3)$, peut aussi se calculer à l'aide de Table I. On cherchera, dans cette Table, le nombre K' qui correspond à l'angle θ' défini par

$$\operatorname{Sin}\theta' = \sqrt{\frac{-e_3+e_1}{-e_2+e_1}}\ ,$$

et on aura $\Omega' = \dfrac{K'}{\sqrt{-e_2+e_1}}$. Il est à observer que l'angle θ' est le complément de l'angle θ.

convergentes. On a posé :

$$\begin{cases} \theta(v) = \frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m q^{(m+\frac{1}{2})^2} e^{(2m+1)\frac{i\pi v}{2\omega_1}} = 2\sum_{0}^{\infty}(-1)^m q^{(m+\frac{1}{2})^2}\sin(2m+1)\frac{\pi v}{2\omega_1} \\ q = e^{\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}} \end{cases}$$

Nous pouvons, puisque $2\omega_1$ et $2\omega_2$ sont deux périodes quelconques formant un système primitif de pu, prendre :

$\omega_1 = \Omega_1$; $\omega_2 = \Omega' i$; le rapport $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ aura bien sa partie imaginaire positive, et on aura :

$$q = e^{\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}} = e^{-\pi \frac{\Omega'}{\Omega_1}}$$

q est donc la quantité considérée plus haut, que donne la Table II. On peut ainsi, q et ω_1 étant connus, calculer $\theta(v)$ quand v est donné.

Calcul de σv. – On a (N° 96)

$$\sigma v = 2A\omega_1 e^{\frac{\eta_1 v^2}{2\omega_1}}\theta(v)$$

$\omega_1 = \Omega_1$ et $\theta(v)$ étant connus, il faut, pour avoir σv ; calculer A et η_1. Or (N° 96, (2') et (3')) :

$$\frac{1}{A} = 2\pi\left[q^{\frac{1}{4}} - 3q^{\frac{9}{4}} + 5q^{\frac{25}{4}} - \dots\right]$$

$$12\eta_1\Omega_1 = \pi^2 \frac{q^{\frac{1}{4}} - 3^3 q^{\frac{9}{4}} + 5^3 q^{\frac{25}{4}} \dots\dots}{q^{\frac{1}{4}} - 3q^{\frac{9}{4}} + 5q^{\frac{25}{4}} \dots\dots}$$

ce qui donne A et η_1, puisque l'on a Ω_1 et q.

Calcul de ζv. – On a, par définition :

$$\zeta v = \frac{\sigma' v}{\sigma v} = \frac{\eta_1 v}{\Omega_1} + \frac{\theta'(v)}{\theta(v)}$$

formule où tout est connu, sauf $\theta'(v)$, qu'on calcule en dérivant la série $\theta(v)$:

$$\theta'(v) = \frac{\pi}{\Omega_1}\sum_{0}^{\infty}(-1)^m q^{(m+\frac{1}{2})^2}(2m+1)\cos(2m+1)\frac{\pi v}{2\Omega_1}.$$

Calcul de pv. – On a

$$pv = -\zeta' v = -\frac{\eta}{\Omega_1} - \frac{\theta(v)\,\theta''(v) - \theta'^2(v)}{\theta^2(v)},$$

où $\theta''(v)$ est la série dérivée de $\theta'(v)$.

147. – Remarque I. – On peut encore faire le calcul de pu à l'aide des tables, quelque soit u.

En effet, supposons d'abord u réel ; on peut le supposer compris entre $-\Omega_1$ et $+\Omega_1$, puisqu'on a le droit de retrancher de u un nombre entier de périodes, $2m_1\Omega_1$, sans changer pu. Comme pu est une fonction paire, on est ainsi ramené à calculer pu, u étant compris entre 0 et Ω_1.

La table III permet de résoudre le problème : on posera

$$v = u\sqrt{e_1 - e_2}, \qquad \sin\theta = \sqrt{\frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}}$$

on cherchera v dans la table, dans la colonne qui correspond à l'angle θ ; on lira en regard une valeur de φ, et on aura :

$$pu - e_2 = \frac{e_1 - e_2}{\sin^2\varphi}$$

Si u est purement imaginaire, $u = iw$, on aura (N° 120)

$$p(wi, e_2) = -p(w, -e_2);$$

et la table permettra de calculer le second membre, ce qui donnera le premier.

Enfin si $u = w + it$, la formule d'addition donnera $p(w+it)$ connaissant pw et $p(it)$ (voir N° 120, 3°).

148. – Remarque II. – Inversement si pu est réel et donné, $pu = x_0$, on peut toujours calculer u pour les tables.

1° Si x_0 est compris entre $+\infty$ et e_1, l'équation $pu = x_0$ se résout directement par la Table III, comme on l'a dit plus haut (N° 125).

2° Si x_0 est compris e_2 et $-\infty$, u est de la forme iw, w étant réel (N° 120); la relation :

$$p(Wi, e_2) = -p(W, -e_2) = x_0$$

permettra de même de calculer W, puisque $-x_0$ est compris entre $+\infty$ et $-e_2$, qui est la plus grande des racines $-e_2$.

3° Si x_0 est compris entre e_2 et e_3, u est de la forme $Wi + \Omega_1$, (N° 120) W étant réel, on a alors :

$$p(W + \Omega' i) = x_0 = e_2 + \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{pW - e_2}$$

d'où on tirera pour pW une valeur comprise e_1 et $+\infty$; et par suite on aura W comme plus haut.

4° Enfin si x_0 est compris entre e_3 et e_1, u est de la forme $Wi + \Omega_1$, (N° 120) W étant réel, et l'équation

$$p(Wi + \Omega_1) = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{p(Wi) - e_1} = x_0$$

donnera pour $p(Wi)$ une valeur comprise entre e_2 et $-\infty$, d'où on tirera W comme dans le cas 2°.

149. – Calcul de l'intégrale de troisième espèce. –

Cette intégrale $\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}$ se ramène, par la substitution $x = p(u, e_2)$, à

$$\int_{u_1}^{u_0} \frac{du}{pu - a}$$

On peut la calculer à l'aides des Tables si a est réel. En ce cas, en posant

$$a = pc$$

les Tables permettront de trouver une valeur de c, comme on l'a vu plus haut; l'intégrale est alors (N° 124)

$$-\frac{1}{p'c}\left[\log \frac{\sigma(u+c)}{\sigma(u-c)} - 2u\zeta c\right]_{u_1}^{u_0}$$

Tout peut se calculer dans cette expression, puisque u_0, u, et c sont connus et que σ et ζ s'obtiennent comme il est dit ci-dessus.

Dans le cas où a ne serait pas réel, (ce qui peut se présenter dans les applications, puisque a est une racine du dénominateur $Q(x)$ de l'expression $\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{X}}$) il faudrait avoir recours à une méthode plus compliqué permettant de résoudre l'équation $pc = a$: On trouvera cette méthode dans le Cours d'Analyse de M. Jordan.

Troisième Partie.

Troisième Partie

Équations différentielles.

Chapitre I.

Équations du premier ordre.

I. – Définitions et généralités.

150. – On nomme équation différentielle d'ordre n une relation entre une variable, une fonction de cette variable et les dérivées des divers ordres de cette fonction jusqu'à l'ordre n, inclusivement. Si x est la variable et y la fonction, l'équation différentielle est de la forme :

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

Résolvons cette équation par rapport à $\frac{d^ny}{dx^n}$:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Imaginons que nous nous donnions les valeurs de $y, \frac{dy}{dx}, \dots\dots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ pour $x = x_0$; l'équation précédente nous fait connaître la valeur de $\frac{d^n y}{dx^n}$, et en décrivant cette équation par rapport à x, nous connaîtrons successivement les valeurs de toutes les dérivées de y pour $x = x_0$. Appliquant alors à y le développement de Taylor, nous obtiendrons l'expression de cette fonction sous la forme :

$$y = y_0 + (x - x_0)\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \frac{(x - x_0)^2}{1.2.}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \dots\dots$$

Le second membre renferme n constantes arbitraires, à savoir $y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \dots \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0$; on voit ainsi que la fonction la plus générale, y, qui satisfait à une équation différentielle d'ordre n doit renfermer n constantes arbitraires. Il resterait, il est vrai, pour compléter ce raisonnement, à établir la convergence de la série considérée plus haut; on indiquera plus tard les résultats obtenus par Cauchy sur cette question.

151. – Pour une équation du premier ordre :

$$(1) \qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

l'intégrale ou solution générale renferme une constante arbitraire, et est de la forme :

$$(2) \qquad \Phi(x, y, C) = 0$$

Inversement, l'intégrale générale étant donnée, on peut former comme il suit, l'équation différentielle à laquelle satisfait y. Dérivons l'équation (2), par rapport à la variable indépendante, x :

$$(3) \qquad \Phi'_x + \frac{dy}{dx}\,\Phi'_y = 0\ ;$$

et éliminons C entre (2) et (3); nous obtenons une relation :

$$(4) \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

que je dis être identique à la proposée (1).

En effet, d'après l'hypothèse et d'après la formation de (4), les équations (1) et (4) sont vérifiées par la fonction y, de x, définie par la relation (2), quelle que soit la constante C; si elles n'étaient pas identiques, en éliminant entre elles $\frac{dy}{dx}$, on obtiendrait une relation, $\varphi(x,y)=0$, vérifiée encore par la même fonction, y. Mais en choisissant convenablement la constante C, dans (2), on peut faire en sorte que, pour une valeur donnée de x, y ait une valeur arbitraire, c'est-à-dire qu'il ne peut exister de relation, $\varphi(x,y)=0$, entre x et y. Il faut donc que les équations (1) et (4) soient les mêmes.

152. – L'équation différentielle proposée, (1), a-t-elle d'autres solutions que la fonction y définie par (2) : $\Phi(x,y,C)=0$?

L'équation proposée étant, comme on vient de le voir, le résultat de l'élimination de C entre les deux équations :

$$(2) \qquad \Phi(x, y, C) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et}$$

$$(3) \qquad \Phi'_x + \frac{dy}{dx}\,\Phi'_y = 0,$$

peut être remplacée par ces deux équations, où les inconnues sont y et C; en d'autres termes, intégrer la proposée (1) revient à trouver deux fonctions, y et C, de la variable x, vérifiant (2) et (3). Or si on dérive (2) par rapport à x, il vient :

$$\Phi'_x + \frac{dy}{dx}\,\Phi'_y + \frac{dC}{dx}\,\Phi'_C = 0,$$

équation qui, en tenant compte de (3), se réduit à

$$(5) \qquad \frac{dC}{dx}\,\Phi'_C = 0,$$

et le système des équations (2) et (5) est évidemment équivalent au système (2) et (3). On a donc finalement à trouver deux fonctions, y et C, de x, vérifiant (2) et (5).

Or on peut satisfaire à (5) de deux manières.

1° En posant $\frac{dC}{dx} = 0$, d'où C = constante, ce qui donne l'intégrale générale : $\phi(x, y, \text{const}) = 0$.

2° En posant $\phi'_c = 0$. Les inconnues, y et C, sont alors définies par les deux équations :

$$\phi(x, y, C) = 0 \; ; \qquad \phi'_c = 0 \; ;$$

l'élimination de C conduit à une relation $\psi(x, y) = 0$, qui donne y en fonction de x. Cette solution, y, ne renferme pas de constante arbitraire ; elle se nomme la solution singulière de l'équation différentielle proposée. La solution générale et la solution singulière sont, d'après ce qui précède, les seules solutions de la proposée.

153. – Ces résultats s'interprètent géométriquement.

Si x et y sont les coordonnées d'un point du plan, chaque intégrale ou solution, dite particulière,

$$\phi(x, y, C) = 0$$

où l'on donne à la constante C une valeur particulière, représente une courbe ; l'intégrale ou solution générale est représentée par l'ensemble de ces courbes, dites courbes intégrales ; la solution singulière, définie par les équations $\phi(x, y, C) = 0$; $\phi'_c = 0$, est l'enveloppe des courbes intégrales.

Il est évident a priori que l'enveloppe de ces courbes doit être une solution de l'équation différentielle : car, en un point quelconque, x, y, de l'enveloppe, celle-ci touche une des enveloppées, de sorte que $\frac{dy}{dx}$ est le même pour les deux courbes. Or, pour l'enveloppée, et par suite pour l'enveloppe, on a $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, ce qui établit la proposition.

154. – Remarque. – Supposons que l'on ait obtenu sous deux formes différentes

$$\varphi(x, y) = C \; ; \quad \varphi_1(x, y) = C_1 \; ,$$

la solution générale d'une équation différentielle du premier ordre entre x et y : je dis que $\varphi_1(x, y)$ est fonction de $\varphi(x, y)$. En effet, si on prend comme variables x et $\varphi(x, y)$ à la place de x, y, $\varphi_1(x, y)$ devient une fonction de x et de $\varphi(x, y)$: $\varphi_1(x, y) = f(x, \varphi)$.

Mais, en vertu de l'hypothèse, lorsque y vérifie l'équation différentielle proposée, φ est constant et réciproquement; et il en est de même de φ_1, c'est-à-dire que φ_1 est constant lorsque φ est constant. Or pour que $\varphi_1 = f(x, \varphi)$ reste constant en même temps que φ, il faut évidemment que f ne dépende que de φ, c'est-à-dire soit de la forme $f(\varphi)$. On a donc bien

$$\varphi_1 = f(\varphi).$$

Voici une application de cette remarque.

Soit l'équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

On l'intègre immédiatement en remontant aux primitives des deux différentielles:

$$\text{arc Sin}\, x + \text{arc Sin}\, y = C_1$$

On peut obtenir l'intégrale sous une autre forme, algébrique en x et y, en écrivant:

$$dx\sqrt{1-y^2} + dy\sqrt{1-x^2} = 0 \quad ;$$

d'où, en intégrant chaque terme par parties:

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} + \int\left(\frac{xy\,dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{xy\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) = C$$

La quantité sous le signe $\int$ est nulle en vertu de l'équation différentielle elle-même; il reste donc:

$$(10) \qquad x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C,$$

seconde forme de la solution générale de (9). Donc, en vertu de la Remarque:

$$\text{arc Sin}\, x + \text{arc Sin}\, y = f\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

Pour déterminer la fonction inconnue f, faisons $y = 0$: le premier membre est arc Sin x; le second est $f(x)$; donc f est un arc Sin, et

il vient :

$$\text{arc Sin}\, x + \text{arc Sin}\, y = \text{arc Sin}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right);$$

ce qu'on peut écrire, en posant arc Sin $x = u$; arc Sin $y = v$:

$$u + v = \text{arc Sin}\left(\text{Sin}\, u \cos v + \text{Sin}\, v \cos u\right);$$

c'est la formule d'addition bien connue de la fonction Sin.

On trouverait de même la formule d'addition du log : $\log x + \log y = \log xy$, en intégrant sous deux formes l'équation

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0, \quad \text{ou} \quad x\,dy + y\,dx = 0$$

qui donne évidemment

$$\log x + \log y = C_1, \text{ et } xy = C$$

d'où : $\log x + \log y = f(xy)$.... et on voit que f est un log en faisant $y = 1$.

II. – Equations du premier ordre qu'on sait intégrer.

On ne sait intégrer qu'un petit nombre de types d'équations du premier ordre : on va les indiquer successivement :

1° Equations à variables séparées.

---

155. – Elles sont du type

$$XY + X_1 Y_1 \frac{dy}{dx} = 0,$$

où X, X_1 sont fonctions de x seul ; Y, Y_1, fonctions de y seul.

On peut écrire :

$$\frac{X}{X_1}dx + \frac{Y_1}{Y}dy = 0,$$

et en intégrant

$$\int \frac{X}{X_1}dx + \int \frac{Y_1}{Y}dy = \text{const.}$$

On a ainsi une relation entre x et y, renfermant une constante arbitraire ; c'est l'intégrale générale.

2°. — Équations homogènes.

---

156. — Ce sont celles du type :

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Changeons d'inconnue en posant $y = ux$; d'où :

$$dy = u\,dx + x\,du$$

On a alors :

$$u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u) ;$$

On peut séparer les variables en écrivant :

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

Intégrant, on a :

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \log x + \text{const.}$$

c'est-à-dire

$$\Phi(u) = \log x + \text{const.}$$

ou :

$$\log x = \Phi\left(\frac{y}{x}\right) + \text{const.}$$

C'est la solution générale.

157. — Remarque. — Elle peut s'écrire :

$$(H) \qquad x = Ce^{\phi\left(\frac{y}{x}\right)}; \quad \text{ou} \quad x = C\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Cette équation représente évidemment des courbes homothétiques entre elles par rapport à l'origine : c'est là une propriété intéressante des courbes intégrales d'une équation homogène du premier ordre. Réciproquement, toute famille de courbes homothétiques par rapport à l'origine satisfait à une équation homogène, car en résolvant l'équation (H) par rapport à $\frac{1}{c}$ et dérivant ensuite par rapport à la variable indépendante x, on obtient :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\psi\left(\frac{y}{x}\right)\right] = 0 \text{ ; c'est-à-dire tous calculs faits :}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}{\psi'\left(\frac{y}{x}\right)},$$

équation dont le second membre est bien une fonction de $\frac{y}{x}$.[1] C. q. f. d.

3° Equations réductibles aux équations homogènes.

---

158. — Ce sont celles de la forme :

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right) \ldots \ldots (a, b, \ldots c' = \text{const})$$

Si $ab' - ba'$ n'est pas nul, on posera, en changeant à la fois la variable et la fonction :

$$(1) \qquad ax+by+c = \eta \; ; \qquad a'x+b'y+c' = \xi$$

d'où

$$a\,dx + b\,dy = d\eta \qquad a'dx + b'dy = d\xi$$

et on tirera de là (puisque $ab' - ba' \gtrless 0$) :

---

(1) Ce dernier point était évident géométriquement : car les tangentes aux courbes homothétiques considérées, en des points situés sur un même rayon vecteur issu de l'origine, sont parallèles ; c'est-à-dire que, pour ces courbes, $\frac{dy}{dx}$, ne dépend que de $\frac{y}{x}$.

$$dx = A\,d\xi + B\,d\eta\,; \qquad dy = A'\,d\xi + B'\,d\eta$$

et l'équation différentielle devient :

$$\frac{A'\,d\xi + B'\,d\eta}{A\,d\xi + B\,d\eta} = \varphi\left(\frac{\eta}{\xi}\right);$$

d'où

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \psi\left(\frac{\eta}{\xi}\right),$$

équation homogène, dans l'intégrale de laquelle on remplacera η et ξ par leurs valeurs (1) pour avoir l'intégrale générale de la proposée.

Si $ab' - ba' = 0$, on posera, en changeant simplement de fonction inconnue, et en conservant la variable, x :

(2) $$ax + by + c = \eta$$

d'où

$$a'x + b'y + c' = \frac{a'}{a}(\eta - c) + c'$$

et :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left[\frac{d\eta}{dx} - a\right]$$

Portant ces valeurs dans l'équation différentielle proposée, on obtient :

$$\frac{d\eta}{dx} - a = b\varphi\left(\frac{\eta}{\frac{a'}{a}(\eta - c) + c'}\right) = \psi(\eta)$$

d'où

$$dx = \frac{d\eta}{a + \psi(\eta)}$$

Les variables étant séparées, on peut intégrer :

$$x = \int \frac{d\eta}{a + \psi(\eta)} + \text{const.} = \Phi(\eta) + \text{const.}$$

Remplaçant ensuite, dans le second membre, η par sa valeur (2), on aura l'intégrale générale de la proposée.

4° Équations linéaires.

159. — On nomme ainsi celles qui sont linéaires par rapport à y et $\frac{dy}{dx}$, et de la forme :

(3) $$\frac{dy}{dx} + Py + Q = 0,$$

P et Q étant des fonctions de x.

Pour intégrer (3), posons $y = uv$, u et v étant deux nouvelles inconnues, dont nous aurons le droit de particulariser une ; l'équation (3) devient :

(4) $$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + Puv + Q = 0$$

Annulons le coefficient de u, ce qui particularisera v[1] ; on a :

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0 ;$$

d'où :

$$\frac{dv}{v} + P\,dx = 0$$

et

$$\log v = \log C - \int P\,dx$$

(5) $$v = Ce^{-\int P dx}$$

Il reste, dans l'équation (4), les termes qui ne contient pas u, en facteur, c'est-à-dire

$$v\frac{du}{dx} + Q = 0 ;$$

d'où

$$du = -\frac{Q}{v}\,dx$$

v étant une fonction connue de x, (5), les variables sont séparées ; intégrons :

$$u = -\int \frac{Q}{v}\,dx + C' = -\int \frac{Q}{C}\, e^{\int P dx}\,dx + C'$$

---

[1] Cette méthode qui semble artificielle, n'est, comme on le verra plus tard, qu'un cas particulier d'une méthode générale, applicable à toute une classe d'équations différentielles.

et on a, pour y :

$$(6) \qquad y = uv = -e^{-\int P dx}\left[\int Q e^{\int P dx} dx\right] + c'' e^{-\int P dx} \quad \ldots\ldots (c'' = cc')$$

La constante C a disparu ; il reste la constante arbitraire C''. On pourra donc, dans les calculs, ne pas introduire C en le faisant dès le début égal à 1. Ceci est d'ailleurs évident, car on n'a besoin que d'un seul facteur v, propre à simplifier l'équation proposée.

160. – Exemple. – Intégrer :

$$\frac{dy}{dx} - y - x^2 = 0.$$

Posons $y = uv$:

$$u\left[\frac{dv}{dx} - v\right] + v\frac{du}{dx} - x^2 = 0.$$

Annulant le coefficient de u, on a :

$$\frac{dv}{dx} - v = 0 \,; \qquad \text{d'où} \quad \begin{cases} \frac{dv}{v} = dx \,; \\ \log v = x \\ v = e^x \end{cases}$$

et

$$v\frac{du}{dx} - x^2 = 0 \,; \qquad \text{d'où :} \quad \begin{cases} du = x^2 e^{-x} dx \\ u = \int x^2 e^{-x} dx + \text{const.} \end{cases}$$

Donc enfin, l'intégrale cherchée est :

$$y = uv = e^x \int x^2 e^{-x} dx + Ce^x$$

La quadrature s'effectue aisément ; intégrant par parties on a :

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x} dx$$
$$= -x^2 e^{-x} + 2\left[-xe^{-x} + \int e^{-x} dx\right]$$
$$= \left[-x^2 - 2x - 2\right] e^{-x}$$

d'où

$$y = -(x^2+2x+2) + Ce^x.$$

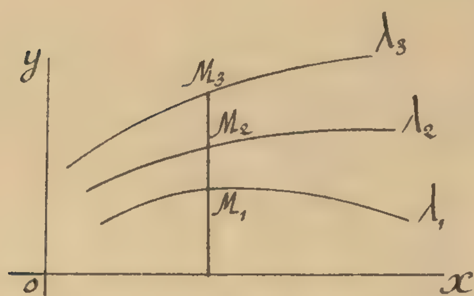
161. – Remarque. D'après la formule (6) en désignant par λ la constante arbitraire, la solution générale de l'équation linéaire est de la forme :

$$y = A + B\lambda,$$

A et B étant des fonctions de x. Soient y_1, y_2, y_3 trois solutions particulières, correspondant aux valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de la constante ; on a, pour une même valeur de la variable x :

$$\frac{y_3-y_2}{y_1-y_2} = \frac{(A+B\lambda_3)-(A+B\lambda_2)}{(A+B\lambda_1)-(A+B\lambda_2)} = \frac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}$$

Le rapport qui figure au premier membre est donc indépendant de x. C'est une propriété géométrique des courbes intégrales de l'équation linéaire : considérons les trois courbes intégrales qui correspondent aux valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de λ ; une sécante mobile, parallèle à Oy, les coupe en des points M_1, M_2, M_3, et on a :



$$\frac{y_3-y_2}{y_1-y_2} = \frac{M_2M_3}{M_2M_1} = \text{const} ;$$

c'est-à-dire que les trois courbes déterminent, sur les parallèles à Oy, des segments proportionnels.

5° Equations de Bernoulli.

---

162. – Leur type est :

$$\frac{dy}{dx} + Py + Qy^n = 0,$$

P et Q étant des fonctions de x, et n une constante. Pour intégrer,

divisons par y^n :

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + P\frac{1}{y^{n-1}} + Q = 0 .$$

Prenons pour inconnue $\frac{1}{y^{n-1}}$, en posant

$$\frac{1}{y^{n-1}} = z ; \qquad d'où : \frac{dy}{y^n} = -\frac{1}{n-1}\, dz .$$

L'équation devient alors :

$$-\frac{1}{n-1}\frac{dz}{dx} + Pz + Q = 0$$

C'est une équation linéaire en z et $\frac{dz}{dx}$, que l'on sait intégrer (N° 159).

6° Equations de Riccati.

163. _ Ce sont les équations de la forme :

$$\frac{dy}{dx} + R + Py + Qy^2 = 0$$

R, P, Q étant des fonctions de x. On sait les intégrer quand on en connaît une solution particulière ; soit en effet y_1 cette solution, posons

$$y = y_1 + z ;$$

l'équation devient :

$$\frac{dz}{dx} + \left(\frac{dy_1}{dx} + R + Py_1 + Qy_1^2\right) + Pz + 2Qy_1 z + Qz^2 = 0$$

or, par l'hypothèse :

$$\frac{dy_1}{dx} + R + Py_1 + Qy_1^2 = 0 ;$$

il reste donc :

$$\frac{dz}{dx} + z\left(P + 2Qy_1\right) + Qz^2 = 0 ;$$

équation de Bernouilli, qu'on ramène à une équation linéaire en posant $z = \frac{1}{u}$.

Pour intégrer l'équation Riccati, on posera donc tout

de suite :

$$y = y_1 + \frac{1}{u}$$

et on obtiendra une équation linéaire en u.

164. – Remarque. – D'après cela, u étant solution d'une équation linéaire est de la forme :

$$u = A + B\lambda ,$$

λ étant la constante arbitraire, et A, B des fonctions de x. On a donc, pour la solution, y, de l'équation de Riccati, la forme :

$$(6 \text{ bis}) \qquad y = y_1 + \frac{1}{u} = \frac{y_1(A+B\lambda)+1}{A+B\lambda} = \frac{M+N\lambda}{A+B\lambda} ;$$

M, N, A, B étant des fonctions de x. La constante entre donc linéairement au numérateur et au dénominateur de y. De là une conséquence intéressante.

Considérons quatre solutions particulières de l'équation de Riccati, correspondant aux valeurs $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de la constante ; le rapport anharmonique de ces solutions, y_0, y_1, y_2, y_3, pour une même valeur de x, est, par définition, l'expression :

$$\frac{y_3 - y_0}{y_1 - y_0} : \frac{y_3 - y_2}{y_1 - y_2} ;$$

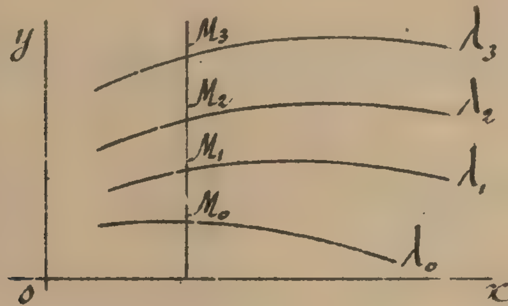
si on y remplace les y par leurs valeurs (6 bis) on trouve, par un calcul facile et d'ailleurs connu, que ce rapport anharmonique devient :

$$\frac{\lambda_3 - \lambda_0}{\lambda_1 - \lambda_0} : \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} ;$$

les M, N, A, B ayant disparu. Il est donc indépendant de x. Ainsi :

Le rapport anharmonique de quatre solutions de l'équation de Riccati, pour une même valeur de la variable, est constant ; il est égal à celui des quatre valeurs de la constante arbitraire qui correspondent à ces solutions.

Géométriquement, si l'on considère, dans le plan, les quatre courbes intégrales (en x, y) qui correspondent aux quatre solutions, le rapport anharmonique des quatre points où ces courbes sont coupées par une sécante mobile, parallèle à Oy est constant, c. à d. que :



$$\frac{M_3 M_0}{M_1 M_0} : \frac{M_3 M_2}{M_1 M_2} = \text{const}$$

7° Équations de Lagrange.

165. — Elles sont linéaires par rapport à x et y ; leur forme est :

$$y + x\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Posons :

$$\frac{dy}{dx} = p \;; \qquad \text{on a :}$$

(7) $$y + x\varphi(p) + \psi(p) = 0$$

Dérivons par rapport à x :

$$p + \varphi(p) + \left[x\varphi'(p) + \psi'(p)\right]\frac{dp}{dx} = 0 .$$

Cette équation, si on considère x comme l'inconnue, et p comme la variable, est une équation linéaire. Elle s'écrit en effet :

$$\frac{dx}{dp}\left[p + \varphi(p)\right] + x\varphi'(p) + \psi'(p) = 0 .$$

On saura donc l'intégrer, ce qui donnera x en fonction de p, ou p en fonction de x : remplaçant p par cette valeur dans l'équation primitive (7), on aura la relation cherchée entre y et x. On pourrait aussi remplacer, dans (7), x par sa valeur

en fonction de p, et on aurait x et y exprimés en fonction d'une même variable auxiliaire, p, ce qui définit la courbe intégrale.

8° Equations de Clairaut.

---

166. _ Elles sont comprises, comme cas particuliers, dans celles de Lagrange; leur type est:

$$(8) \qquad y = x\frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Dérivons encore par rapport à x; il vient:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2}\left[x + \psi'\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]$$

ce qui se décompose en deux:

1ère solution: $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; d'où : $\frac{dy}{dx} = C$

et, par l'équation proposée, (8):

$$y = cx + \psi(c)$$

C'est la solution générale; on l'obtient en remplaçant, dans l'équation différentielle, $\frac{dy}{dx}$ par c. Les courbes intégrales sont des droites.

2ème solution: $x + \psi'\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$;

équation qui, combinée avec la proposée (8), donne par l'élimination de $\frac{dy}{dx}$ une relation entre x et y sans constante arbitraire. C'est la solution singulière : elle représente évidemment, d'après son mode de formation, l'enveloppe des droites fournies par l'intégrale générale.

---

167. _ Ce sont là, à peu près tous les types d'équations différentielles du premier ordre que l'on sait intégrer; il est à remarquer que, sauf dans les types de Lagrange et de Clairaut, la dérivée $\frac{dy}{dx}$ figure linéairement.

Soit par exemple l'une ou l'autre des équations :

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \; ; \quad \text{ou} \quad f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \; ;$$

qui, si on peut les résoudre par rapport à $\frac{dy}{dx}$, rentrent dans le types à variables séparées :

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) \qquad \text{ou :} \qquad \frac{dy}{dx} = \varphi(y)$$

d'où :

$$y = \int \varphi(x)\, dx + \text{const.} \qquad\qquad x = \int \frac{dy}{\varphi(y)} + \text{const.}$$

Mais si la résolution par rapport à $\frac{dy}{dx}$ est impossible, on ne pourra expliciter les calculs.

Il y a toutefois deux cas où cette résolution préalable ne sera pas nécessaire.

168. _ Premier cas. _ On peut résoudre l'équation différentielle

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad \text{ou } f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

par rapport à x ou y. On a ainsi, en posant $\frac{dy}{dx} = p$:

	ou
(9) $x = \varphi(p)$	(9) $y = \varphi(p)$
d'où : $dx = \varphi'(p)\, dp$	$dy = \varphi'(p)\, dp$
$dy = p\, dx = p\varphi'(p)\, dp$	$dx = \frac{dy}{p} = \frac{\varphi'(p)}{p}\, dp$
(10) $y = \int p\varphi'(p)\, dp + \text{const.}$	(10) $x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}\, dp + \text{const.}$

Dans les deux cas, les équations (9) et (10) donneront x et y exprimés en fonction du paramètre p et d'une constante, ce qui définit la courbe intégrale générale.

169. _ Second cas. _ La courbe :

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad \text{ou} \quad f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \, ,$$

x et $\frac{dy}{dx}$ (ou y et $\frac{dy}{dx}$) étant les coordonnées courantes, est de genre zéro ou de genre un.

On pourra alors exprimer x et $\frac{dy}{dx}$ dans le premier cas, y et $\frac{dy}{dx}$ dans le second, en fonction rationnelle ou elliptique d'un paramètre, u :

$$(11)\quad \begin{cases} x = \varphi(u) \\ \frac{dy}{dx} = \psi(u) \end{cases}$$

on en conclut :

$$dx = \varphi'(u)\,du$$

$$dy = \psi'(u)\,dx = \psi(u)\varphi'(u)\,du$$

$$(12)\quad y = \int \psi(u)\varphi'(u)\,du + \text{const.}$$

ou :

$$(11)\quad \begin{cases} y = \varphi(u) \\ \frac{dy}{dx} = \psi(u) \end{cases}$$

$$dy = \varphi'(u)\,du$$

$$dx = \frac{dy}{\psi(u)} = \frac{\varphi'(u)}{\psi(u)}\,du$$

$$(12)\quad x = \int \frac{\varphi'(u)}{\psi(u)}\,du + \text{const.}$$

Dans les deux cas, x et y, par (11) et (12), seront encore exprimés en fonction du paramètre u et de la constante : les deux intégrations indiquées dans (12) portent sur des fonctions rationnelles ou elliptiques et peuvent dès lors s'effectuer.

Remarques générales. — 1° Pour intégrer les équations homogènes, les équations linéaires, celles de Bernoulli et de Riccati, il n'est pas nécessaire de ramener le coefficient de $\frac{dy}{dx}$ à être égal à l'unité ou à une constante, ainsi que nous l'avons supposé pour simplifier les écritures. Dans la pratique on appliquera les méthodes d'intégration indiquées, sans prendre cette précaution préalable. Au contraire, dans l'équation de Lagrange, il faut que le coefficient de y soit l'unité ou une constante.

2° On ne devra pas oublier que x peut être considéré comme l'inconnue et y comme la variable indépendante, ce qui peut faire rentrer dans les types intégrales des équations qui, au premier coup d'œil, en paraissent éloignées. Ainsi l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A}{Bx + C},$$

où A, B, C sont des fonctions de y, est une équation linéaire en x, puisqu'on l'écrit :

$$A\frac{dx}{dy} = Bx + C .$$

III. – Équations générales du premier ordre ; divers artifices d'intégration.

---

170. – Si une équation différentielle du premier ordre ne rentre pas dans un des types précédents, on ne saura généralement pas l'intégrer ; on sera réduit à essayer divers artifices. Nous allons en indiquer trois dont le succès d'ailleurs est toujours incertain.

Procédé de la dérivation.

171 – a). Soit

$$f(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

l'équation proposée. Dérivons par rapport à la variable indépendante, x ; on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} + y''\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 . \tag{2}$$

On essaiera de combiner les relations (1) et (2) de manière à obtenir une équation dont le premier membre soit, à un facteur près, la dérivée exacte d'une fonction de x, y, y' ; c'est-à-dire de la forme

$$\theta(x, y, y')\frac{d}{dx}\varphi(x, y, y') = 0$$

On en déduit alors :

$$\varphi(x, y, y') = \text{const} ; \tag{3}$$

et en éliminant y' entre (3) et la proposée (1), on aura l'intégrale générale cherchée.

La solution $\theta(x, y, y') = 0$, combinée avec (1), donnera, par-

élimination de y', une intégrale sans constante arbitraire, qui sera l'intégrale singulière ou un solution étrangère.

b). On peut encore appliquer autrement, et d'une manière plus précise, le procédé de dérivation; résolvons la proposée (1) par rapport à y:

(4) $$y = \varphi(x,p) \ldots\ldots\ldots \quad \text{étant posé } \frac{dy}{dx} = p.$$

Dérivons:

(5) $$p = \varphi'_x + \varphi'_p \frac{dp}{dx}$$

équation différentielle entre p et x, qui pourra être plus facile à intégrer que la proposée. Si on peut on tirer p en fonction de x, l'équation (4) donnera y. (C'est la méthode qu'on a suivie pour les équations de Lagrange; (5) est alors une équation linéaire en x et $\frac{dx}{dp}$, et peut par suite s'intégrer). Même procédé en résolvant par rapport à x, et en considérant y comme la variable indépendante.

Procédé du facteur intégrant.

172. – L'équation différentielle étant mise sous la forme:

(6) $$M\,dx + N\,dy = 0,$$

(M et N sont des fonctions de x, y) Euler s'est proposé de déterminer un facteur, μ, tel que l'expression

$$\mu\,(M\,dx + N\,dy)$$

soit une différentielle exacte, x et y étant considérés comme deux variables indépendantes. Si l'on peut trouver un tel facteur, on aura, identiquement:

$$\mu\,(M\,dx + N\,dy) = du$$

et l'équation proposée (6) s'écrira:

$$\frac{1}{\mu}\,du = 0$$

On y satisfera en posant

$du = 0$, d'où $u(x,y) = \text{const}$, intégrale générale,

ou

$\frac{1}{\mu} = 0$, solution singulière ou étrangère.

Tout revient donc à trouver un facteur μ. Or la condition pour que $\mu(M\,dx + N\,dy)$ soit différentielle exacte est (N° 11)

(7) $$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\ ; \qquad \text{ou :}$$

(7 bis) $$M\frac{\partial\mu}{\partial y} - N\frac{\partial\mu}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = 0$$

C'est une équation aux dérivées partielles, généralement plus difficile à intégrer que la proposée (6). Si on peut en obtenir une solution particulière, μ, la fonction $u(x,y)$ sera donnée par la formule (N° 11) :

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x}\mu M\,dx + \int_{y_0}^{y}(\mu N)_0\,dy$$

$(\mu N)_0$ étant ce que devient μN pour $x = x_0$; et la solution générale de (6) sera connue : $u = \text{const}$.

173. – Le facteur intégrant existe-t-il ? C'est demander si l'équation aux dérivées partielles (7) ou (7 bis) a des solutions : or nous verrons plus tard qu'une équation aux dérivées partielles admet une solution générale, (laquelle renferme une fonction arbitraire) ; il y a donc toujours des facteurs intégrants.

On peut le voir autrement : soit en effet $\phi(x, y, c) = 0$ la solution générale de l'équation différentielle proposée (6), $M\,dx + N\,dy = 0$. En résolvant par rapport à c, cette solution s'écrit :

(8) $$c = \varphi(x,y)$$

d'où, par dérivation :

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy\ ,$$

équation différentielle à laquelle satisfait la fonction y, définie par (8), et qui doit, par suite, être identique à la proposée (N° 151). On a donc identiquement, c'est-à-dire quels que soient x et y :

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{M} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{N}\ .$$

Soit $\mu(x,y)$ la valeur commune de ces rapports, il vient :

$$\mu M = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad ; \quad \mu N = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

d'où identiquement :

$$\mu (M\,dx + N\,dy) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = d\varphi$$

μ est donc un facteur intégrant.[1] C.q.f.d.

174. – Quand on connaît un facteur intégrant d'une équation du premier ordre, on peut trouver tous les autres.

Soient : μ le facteur connu, μ' un quelconque des autres. Posons

$$\mu' = \mu\theta$$

et déterminons θ. Par hypothèse on a :

$$\mu (M dx + N dy) = du \tag{9}$$

$$\mu\theta (M dx + N dy) = dv = \theta\, du$$

v est une fonction inconnue de x et de y ; u étant également fonction (connue) de x, y, on peut regarder v comme fonction de x et de u, pris pour variables indépendantes ; on a alors :

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial u} du$$

comparant à

$$dv = \theta\, du$$

On en conclut :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{\partial v}{\partial u} = \theta .$$

La première de ces relations montre que v est constant par rapport à x, c. à. d. ne dépend que de u ; la seconde $\frac{\partial v}{\partial u} = \theta$, montre alors que θ est aussi une fonction de u seul,

---

(1) On voit ainsi qu'étant donnée une expression de la forme $\alpha(u,v)du + \beta(u,v)dv$, il existe toujours un facteur, $\mu(u,v)$, tel que $\mu(\alpha du + \beta dv)$ soit la différentielle exacte d'une fonction des deux variables u, v. C'est ce qu'on avait admis sans démonstration dans le cours de 1ère Année, p. 311.

$\theta = \varphi(u)$, et on a $\mu' = \mu\varphi(u)$.

Réciproquement, μ étant facteur intégrant, $\mu\varphi(u)$, où $\varphi(u)$ est une fonction quelconque de u, est aussi facteur intégrant ; car on déduit de l'équation (9)

$$(9) \qquad \mu(M dx + N dy) = du$$

celle ci :

$$\mu\varphi(u)\left[M dx + N dy\right] = \varphi(u)\, du,$$

dont le second membre est bien une différentielle exacte (de $\int_{u_0}^{u} \varphi(u) du$).

Donc μ étant un facteur intégrant, et du la différentielle exacte correspondante, tous les autres facteurs sont de la forme $\mu\varphi(u)$, et réciproquement.

175. – On pourrait intégrer, par le procédé du facteur, les équations linéaires :

$$dy + (Py + Q)\, dx = 0,$$

intégrées autrement au N° 159 : il existe en effet un facteur intégrant, μ, fonction de x seul, et facile à déterminer. Car, la condition (7) est ici :

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\partial}{\partial y}\, \mu\,(Py + Q)$$

c'est-à-dire puisque μ, P, Q sont supposés fonctions de x seul, et par suite indépendants de y :

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu P; \text{ d'où } \begin{cases} \dfrac{d\mu}{\mu} = P\, dx \\ \mu = e^{\int P dx} \end{cases}$$

La méthode du N° 159 est d'ailleurs préférable à celle du facteur.

Voici un autre exemple, dans lequel l'emploi du facteur intégrant est vraiment utile ; soit à intégrer l'équation :

$$(10) \qquad ay\, dx + bx\, dy + x^m y^n (\alpha y\, dx + \beta x\, dy) = 0.$$

Le facteur $\frac{1}{xy}$ rend intégrable le premier terme, $ay\, dx + bx\, dy$, qui devient la différentielle de $\log(x^a y^b)$; les facteurs

intégrants de ce terme sont compris dans la formule :

$$\frac{1}{xy}\varphi(x^a y^b)$$

De même le facteur $\frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}$ rend intégrable le second terme : $x^m y^n(\alpha y\,dx + \beta x\,dy)$, qui devient la différentielle de $\log(x^\alpha y^\beta)$; les autres facteurs intégrants de ce terme seront

$$\frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}\psi(x^\alpha y^\beta).$$

S'il existe un facteur intégrant commun aux deux termes, ce sera un facteur intégrant de leur somme, c'est-à-dire de l'équation proposée (10) : or prenons pour φ une puissance d'ordre λ, pour ψ une puissance d'ordre μ ; on pourra identifier les deux facteurs :

$$\frac{1}{xy}(x^a y^b)^\lambda \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}(x^\alpha y^\beta)^\mu$$

en choisissant λ et μ tels qu'on ait :

$$a\lambda = \alpha\mu - m$$

$$b\lambda = \beta\mu - n.$$

On aura ainsi un facteur intégrant de (10).

Les équations en λ et μ sont incompatibles si $a\beta - b\alpha = 0$; mais en ce cas la proposée (10) s'écrit :

$$\left[ay\,dx + bx\,dy\right]\left[1 + \frac{\alpha}{a}x^m y^n\right] = 0$$

et s'intègre immédiatement ; car le premier facteur, égalé à zéro est une équation à variables séparées, dont la solution est : $x^a y^b = \text{const.}$

Procédé du changement de variable.

176. – On peut parfois, par un changement d'inconnue, ramener à un type intégrable une équation qui en semblait très éloignée : il est évidemment impossible de donner à ce sujet des règles générales ; on se bornera à un exemple.

Soit l'équation :

$$\frac{dy}{dx} = (Py + Q)\sqrt{1+y^2} ,$$

où P et Q sont des fonctions de x, qui ne rentre dans aucun des huit types du paragraphe précédent. Il est assez naturel d'essayer de la transformer en faisant disparaître le radical : il faudrait, pour cela, exprimer y et $\sqrt{1+y^2}$ rationnellement en fonction d'une nouvelle inconnue. Or on a vu dans le cours de 1ère année (N° 133 et suivants) que ce problème est possible, et se résout en particulier (N° 135) par le changement de variable :

$$y = \frac{1-t^2}{2t} \; ; \ldots\ldots \text{d'où} \;\; \sqrt{1+y^2} = \frac{1+t^2}{2t}$$

et........

$$dy = -\frac{1}{2}\,\frac{1+t^2}{t^2}\,dt$$

Portons ces valeurs dans l'équation différentielle proposée ; elle devient :

$$-\frac{1}{2}\,\frac{1+t^2}{t^2}\,\frac{dt}{dx} = \left[P\frac{1-t^2}{2t} + Q\right]\frac{1+t^2}{2t} ,$$

c. à. d.

$$\frac{dt}{dx} + \frac{P}{2}(1-t^2) + Qt = 0 ,$$

équation de Riccati, qu'on pourrait intégrer si on en connaissait une solution particulière.

IV. Applications

IV. – Applications.

177. – Tous les problèmes de Géométrie où il s'agit de déterminer une courbe, dans le plan ou sur une surface donnée, par une propriété de ses tangentes, conduisent évidemment à des équations différentielles du premier ordre ; on va en donner quelques exemples.

Problème des trajectoires.

178. – Étant donnée une famille de courbes

(1) $$F(x, y, C) = 0$$

trouver les courbes qui coupent sous un angle donné, V, toutes les courbes de la famille.

Soit x, y un point d'une des trajectoires ; pour la courbe de la famille (1) qui y passe, C est déterminé par l'équation :

(2) $$F(x, y, c) = 0$$

et le coefficient angulaire de la tangente à cette courbe en x, y est $-\frac{(F'_x)}{(F'_y)}$, les parenthèses indiquant que C a été remplacé par sa valeur tirée de (2). Le coefficient angulaire de la tangente à la trajectoire au même point étant $\frac{dy}{dx}$, on aura :

$$tg\, V = \frac{\frac{dy}{dx} + \frac{(F'_x)}{(F'_y)}}{1 - \frac{dy}{dx}\frac{(F'_x)}{(F'_y)}}$$

C'est l'équation différentielle des trajectoires. On peut évidemment dire, sous une autre forme, qu'elle s'obtient par élimination de C entre les deux équations :

(3) $$F(x, y, c) = 0 \quad ; \quad tg\, V = \frac{\frac{dy}{dx} + \frac{F'_x}{F'_y}}{1 - \frac{dy}{dx}\frac{F'_x}{F'_y}}$$

Pour les trajectoires orthogonales, $tg\, V = \infty$, et l'équation s'obtient

en éliminant c entre :

(4) $$F(x,y,c)=0\ ; \qquad F'_x \frac{dy}{dx} - F'_y = 0\ .$$

179. – Exemple I. – Trajectoires obliques des courbes $y = Cx^m$. – Ces courbes sont homothétiques les unes des autres par rapport à l'origine ; leurs trajectoires jouiront évidemment de la même propriété ; c'est-à-dire que leur équation différentielle sera homogène (N° 157).

Cette équation différentielle s'obtient en effet (N° 178) en éliminant C entre

$$y = Cx^m\ ; \qquad tg\, V = \frac{y' - mCx^{m-1}}{1 + my'Cx^{m-1}}$$

ce qui donne :

$$tg\, V\left(1 + my'\frac{y}{x}\right) = y' - m\frac{y}{x}\ ,$$

équation homogène. Pour l'intégrer, posons (N° 156) :

$$y = ux$$

on a

$$tg\, V\left[1 + mu(u'x + u)\right] = u'x + u - mu$$

c'est-à-dire

$$x\frac{du}{dx}(mu\, tg\, V - 1) = u(1-m) - tg\, V(1 + mu^2)$$

et en séparant les variables :

$$\frac{dx}{x} = du\frac{-mu\, tg\, V + 1}{mu^2\, tg\, V + u(m-1) + tg\, V}\ .$$

Faisons l'intégration dans le cas de $m = 1$; les courbes proposées sont alors des droites issues de l'origine. On a :

$$\text{Const} + \log x = \int \frac{du}{tg\, V}\,\frac{1 - u\, tg\, V}{1 + u^2} = \frac{1}{tg\, V}\,\text{arc}\, tg\, u - \frac{1}{2}\log(1 + u^2)$$

ce qui s'écrit :

$$x\sqrt{1 + u^2} = Ce^{\frac{\text{arc}\, tg\, u}{tg\, V}}$$

Remplaçant u par $\frac{y}{x}$, on aurait l'équation des trajectoires ;

il vaut mieux employer les coordonnées polaires, en posant $x = \rho \cos\omega$; $y = \rho \sin\omega$, ce qui donne $u = \operatorname{tg}\omega$, ou arc $\operatorname{tg} u = \omega$; il vient ainsi :

$$\rho = Ce^{\frac{\omega}{3V}}$$

équation de spirales logarithmiques ayant l'origine pour pôle.

Exemple II. – Trajectoires orthogonales des tangentes à une courbe. (Développantes). – Soit :

$$x = -cy + \varphi(c)$$

l'équation générale de ces tangentes; il faut éliminer c entre cette équation et

$$\frac{dy}{dx} - c = 0$$

ce qui donne :

$$x = -y\frac{dy}{dx} + \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

équation de Lagrange. Pour l'intégrer posons $\frac{dy}{dx} = p$, et résolvons par rapport à y :

$$y = -\frac{x}{p} + \frac{\varphi(p)}{p}$$

ou, en posant pour simplifier $\frac{\varphi(p)}{p} = \psi(p)$:

$$(e) \qquad y = -\frac{x}{p} + \psi(p)$$

Dérivons par rapport à x (N° 165) :

$$p = -\frac{1}{p} + \frac{dp}{dx}\left[\frac{x}{p^2} + \psi'(p)\right]$$

ou :

$$\frac{dx}{dp}(p^2+1)p - x - p^2\psi'(p) = 0,$$

équation linéaire en x, qu'on intégrera en faisant (N° 159)

$$x = uv \qquad \frac{dv}{dp}(p^2+1)p - v = 0 \qquad v\frac{du}{dp}(p^2+1)p - p^2\psi'(p) = 0.$$

On en tire :

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dp}{p(p^2+1)} = \int dp\left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right] = \log p - \frac{1}{2}\log(p^2+1)$$

$$v = \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}$$

d'où :

$$\frac{du}{dp}(p^2+1)^{\frac{1}{2}} p^2 = p^2 \psi'(p)$$

$$u = \int \frac{\psi'(p)\,dp}{\sqrt{p^2+1}} + c$$

$$x = uv = \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} \int \frac{\psi'(p)\,dp}{\sqrt{p^2+1}} + c\,\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}$$

et, en se reportant à l'équation primitive :

$$y = -\frac{x}{p} + \psi(p) = -\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \int \frac{\psi'(p)\,dp}{\sqrt{p^2+1}} - \frac{c}{\sqrt{p^2+1}} + \psi(p).$$

Les deux dernières équations définissent, pour la courbe générale cherchée, les coordonnées x, y, d'un point en fonction d'un paramètre, p ; le problème est théoriquement résolu, il ne reste qu'une quadrature à effectuer.

180. — Le problème des trajectoires se traite de même sur une surface. Cherchons, comme exemple les trajectoires obliques des méridiens d'une surface de révolution.

La surface étant représentée paramétriquement par :

$$(R)\quad \left.\begin{aligned} x &= r\cos\omega \\ y &= r\sin\omega \\ z &= f(r) \end{aligned}\right\}$$

[L'axe est Oz ; la méridienne dans le plan zOx est $z = f(x)$].

les méridiens ont pour équation $\omega =$ const ; donc, en un point (r, ω) la tangente au méridien a pour paramètres directeurs :

$$\begin{aligned} &dr.\cos\omega \\ &dr\sin\omega, \quad \text{c.à.d.}\quad \cos\omega,\ \sin\omega,\ f'(r). \\ &dr\, f'(r) \end{aligned}$$

Soient dx, dy, dz les paramètres de la tangente à la trajectoire ; on a :

$$dx = dr\cos\omega - r\sin\omega\, d\omega$$
$$dy = dr\sin\omega + r\cos\omega\, d\omega$$
$$dz = f'(r)\, dr$$

Ecrivant que les deux directions font l'angle V, on obtient :

$$\cos V = \frac{dx\cos\omega + dy\sin\omega + dz\, f'(r)}{\sqrt{1+f'^2(r)}\ \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

c'est-à-dire :

$$\cos V = \frac{dr\left[1+f'^2(r)\right]}{\sqrt{1+f'^2}\ \sqrt{dr^2\left[1+f'^2(r)\right]+r^2 d\omega^2}}$$

ou :

$$dr^2\left[1+f'^2(r)\right]\sin^2 V = r^2 d\omega^2 \cos^2 V$$

On peut séparer les variables :

$$\frac{dr\sqrt{1+f'^2(r)}}{r} = d\omega\ \mathrm{cotg}\, V$$

d'où en intégrant

$$\int \frac{dr\sqrt{1+f'^2(r)}}{r} = \omega\ \mathrm{cotg}\, V + \mathrm{Const.}$$

C'est, en se rappelant la signification géométrique de r et ω, l'équation de la projection des trajectoires sur le plan des xy, en coordonnées polaires.

On vérifie immédiatement que ce résultat coïncide avec celui que donnerait la carte de Mercator (Cours de 1ère année, N° 314). Dans cette carte, qui conserve les angles, les méridiens sont représentés par des parallèles à Oy ; le point (x', y') du plan qui correspond au point (r, ω) de la surface est :

$$x' = \omega \quad ; \qquad y' = \int \frac{dr}{r}\sqrt{1+f'^2(r)}\ ;$$

Les trajectoires des méridiens sont alors représentées sur le plan

par des droites parallèles entre elles, de coefficient angulaire cotg V: $y' = \operatorname{cotg} V . x' + \text{const}$; leur équation, sur la surface, est donc :

$$\int \frac{dr}{r} \sqrt{1+f'^2(r)} = \omega \operatorname{cotg} V + \text{Const},$$

comme on vient de le trouver directement.

Lignes de Courbure.

181. — On a vu dans le cours de 1ère Année, (N° 295) que les lignes de courbure d'une surface s'obtiennent en intégrant l'équation aux directions principales : c'est une équation différentielle du premier ordre. On a déjà (cours de 1ère Année N° 298) donné des exemples dans lesquels l'équation différentielle est du type à variables séparées ; en voici d'autres.

1° Quadriques à centre : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Prenons x et y comme variables indépendantes, z comme fonction de x, y : l'équation différentielle des lignes de courbure est (N° 294) :

$$(E) \qquad \begin{vmatrix} 1+p^2 & pq & 1+q^2 \\ r & s & t \\ dy^2 & -dx\,dy & dx^2 \end{vmatrix} = 0$$

On calcule p et q en dérivant l'équation de la surface par rapport à x, puis par rapport à y :

$$p = -\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z} \; ; \qquad q = -\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}$$

et par de nouvelles dérivations, en tenant compte de l'équation de la surface :

$$r = \frac{c^4}{a^2b^2}\frac{y^2-b^2}{z^3} \; ; \qquad s = -\frac{c^4}{a^2b^2}\frac{xy}{z^3} \; ; \qquad t = \frac{c^4}{a^2b^2}\frac{x^2-a^2}{z^3}$$

Portant ces valeurs dans (E), on obtient après réductions, et en tenant

toujours compte de l'équation de la quadrique, l'équation différentielle :

$$xy\frac{c^2-b^2}{b^2}dy^2+\left(\frac{c^2-a^2}{a^2}x^2-\frac{c^2-b^2}{b^2}y^2+a^2-b^2\right)dx\,dy-xy\frac{c^2-a^2}{a^2}dx^2=0$$

ou :

$$(7)\qquad Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(x^2-Ay^2-B\right)\frac{dy}{dx}-xy=0$$

en posant pour abréger

$$A=\frac{a^2}{b^2}\,\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}\,;\qquad B=a^2\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}$$

C'est une équation différentielle qui ne rentre dans aucun des cas intégrables. Monge a observé qu'on peut l'intégrer par la méthode de dérivation (N°. 171, a); nous indiquerons de préférence une autre méthode, plus rationnelle.

Si on multiplie par y le premier membre de l'équation à intégrer (7), on voit que y ne figure que dans les combinaisons y et $y\frac{dy}{dx}$; il est donc indiqué de prendre y^2 comme inconnue. Ainsi, on posera $y^2=u$ et, à cause de la symétrie que présente l'équation, $x^2=v$. On a alors :

$$y\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}\frac{du}{dv}:\frac{dx}{dv}=\frac{1}{2}\frac{du}{dv}\cdot 2\sqrt{v},$$

et l'équation (7) devient :

$$A\sqrt{v}\cdot v\left(\frac{du}{dv}\right)^2+\left(v-Au-B\right)\frac{du}{dv}\sqrt{v}-u\sqrt{v}=0\,;$$

en divisant par $\sqrt{v}$ il reste une équation linéaire en u et v (type de Lagrange); résolvons-la donc par rapport à l'inconnue u, on trouve :

$$u=\frac{vu'(Au'+1)-Bu'}{Au'+1}=vu'-B\frac{u'}{Au'+1}$$

où $u'=\frac{du}{dv}$: C'est une équation de Clairaut, dans l'intégrale générale s'obtient (N°. 166) en remplaçant u' par la constante arbitraire λ; on a donc, pour la relation cherchée entre u et v :

$$u=\lambda v-\frac{B\lambda}{A\lambda+1}\,;$$ et, en revenant à x et y :

(8) $$y^2 = \lambda x^2 - \frac{B\lambda}{A\lambda+1}.$$

Telle est l'équation des projections des lignes de courbure sur le plan des $x\,y$: elle représente des coniques. Les lignes de courbure sont donc algébriques ; on peut aussi en déduire qu'elles sont à l'intersection de la quadrique proposée avec les quadriques homofocales $\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} + \frac{z^2}{c^2+\mu} = 1$.

2° Paraboloïde : $2z = a'x^2 + b'y^2$,

on a :

$$p = a'x\,; \quad q = b'y \quad r = a'\,; \quad s = 0\,; \quad t = b'$$

et l'équation des lignes de courbure, prise sous la forme (E) est :

$$a'b'^2 xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left[b' - a' + a'^2 b' x^2 - a' b'^2 y^2\right]\frac{dy}{dx} - a'^2 b' xy = 0$$

C'est une équation de la forme (7) ; il suffit de poser $A = -\frac{b'}{a'}$; $B = \frac{a'-b'}{a'^2 b'}$.
L'intégrale générale est donc, d'après (8) :

$$y^2 = \lambda x^2 + \frac{b'-a'}{a'b'}\,\frac{\lambda}{a'+b'\lambda}.$$

Les projections des lignes de courbure sont encore des coniques, et ces lignes sont algébriques.

182.– Coordonnées elliptiques.– Considérons deux lignes de courbure de l'ellipsoïde, correspondant aux valeurs λ et μ de la constante arbitraire :

$$y^2 = \lambda x^2 - \frac{B\lambda}{A\lambda+1}$$

$$y^2 = \mu x^2 - \frac{B\mu}{A\mu+1}$$

Ces lignes se coupent sur l'ellipsoïde, en des points dont les coordonnées x et y sont données par les deux équations ci-dessus, et dont les z se tirent, en fonction de x et y, de l'équation de

l'ellipsoïde. On exprime ainsi les coordonnées x, y, z, d'un point de l'ellipsoïde, en fonction de deux paramètres λ et μ : les courbes $\lambda =$ const. sont les lignes de courbure d'un système, les courbes $\mu =$ const. celles de l'autre.

Il est préférable, pour la symétrie, de faire un changement de variables en posant

$$A\lambda + 1 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - u}$$

$$A\mu + 1 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - v} \quad ;$$

en faisant les calculs, on trouve ainsi pour x, y, et z, en fonction des nouveaux paramètres u et v :

$$x = a\sqrt{\frac{(a^2-u)(a^2-v)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}$$

$$y = b\sqrt{\frac{(b^2-u)(b^2-v)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}} \qquad (a^2 > b^2 > c^2)$$

$$z = c\sqrt{\frac{(c^2-u)(c^2-v)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}} \quad ;$$

les courbes $u =$ const et $v =$ const. sont les lignes de courbure, puisque u est fonction de λ seul, et v fonction de μ seul.

C'est ce qu'on appelle le système de coordonnées elliptiques sur l'ellipsoïde.

Observons qu'on obtient tous les points réels de la surface en faisant varier v de c^2 à b^2 et u de b^2 à a^2 ; les points qui correspondent à $u = v = b^2$ sont les quatre ombilics réels.

Le $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ a pour expression

$$ds^2 = (u-v)\left[\frac{u}{4(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)}\,du^2 - \frac{v}{4(a^2-v)(b^2-v)(c^2-v)}\,dv^2\right]$$

Remarque. — On a indiqué dans le cours de 1ère Année N° 310, la manière d'obtenir une représentation conforme d'une surface sur un plan. La méthode consistait à décomposer en deux facteurs du premier degré le trinôme qui donne le ds^2 :

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = (\alpha\,du + \beta\,dv)(\alpha_1\,du + \beta_1\,dv),$$

α_1 et β_1 étant nécessairement imaginaires conjugués de α et β. On cherche ensuite un facteur μ tel que $\mu(\alpha\,du + \beta\,dv)$ soit une différentielle exacte, $d\varphi$; et si φ_1 est l'imaginaire conjuguée de φ, on obtient une représentation conforme en faisant correspondre au point (u, v) de la surface le point du plan de coordonnées (rectangulaires)

$$u' = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1)\ ; \qquad v' = \frac{1}{2i}(\varphi - \varphi_1).$$

Tout revient ainsi à trouver un facteur intégrant, μ de l'équation différentielle $\alpha\,du + \beta\,dv = 0$, c. à. d. à trouver l'intégrale générale $\varphi = \text{const.}$ de cette équation ; ou encore à intégrer l'équation $ds^2 = 0$. Sous une forme géométrique :

Le problème de la recherche, sur une surface, des lignes de longueur nulle et celui de la représentation conforme de la surface sur un plan sont équivalents.

Les lignes de longueur nulle ont pour équation, d'après ce qui précède, $\varphi = \text{const}$; $\varphi_1 = \text{const}$; elles forment deux séries imaginaires conjuguées l'une de l'autre.

Pour l'Ellipsoïde, l'expression du ds^2 en coordonnées elliptiques donne la solution immédiate du problème. On a en effet :

$$ds^2 = \frac{(u-v)}{4}\left[\sqrt{\frac{u}{(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)}}\,du + i\sqrt{\frac{v}{(a^2-v)(b^2-v)(v-c^2)}}\,dv\right]\left[\sqrt{\frac{u}{(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)}}\,du - i\sqrt{\frac{v}{(a^2-v)(b^2-v)(v-c^2)}}\,dv\right]$$

et les lignes de longueur nulle ont pour équation :

$$\int \frac{\sqrt{u}\,du}{\sqrt{(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)}} \pm i \int \frac{\sqrt{v}\,dv}{\sqrt{(a^2-v)(b^2-v)(v-c^2)}} = \text{Const}\ ;$$

les quantités sous les radicaux étant $\geqq 0$, puisque $a^2 \geqq u \geqq b^2$ et $b^2 \geqq v \geqq c^2$.

En prenant successivement le signe + et le signe –, le premier membre donne les deux fonctions φ et φ_1, d'où l'on déduit une représentation conforme de l'ellipsoïde sur le plan. On est ainsi ramené à des intégrales elliptiques.

Sans les calculer, observons que $\varphi = F(u) + i f(v)$; $\varphi_1 = F(u) - i f(v)$; $F(u)$ étant l'intégrale en u, $f(v)$ l'intégrale en v; d'où

$$u' = F(u)\,; \quad v' = f(v).$$

Les lignes de courbure d'une série (u = const), sont donc représentées sur le plan par des droites parallèles à un des axes de coordonnées, celle de la seconde série (v = const) par des droites parallèles à l'autre axe.

On en déduit, par exemple, que les trajectoires sous un angle V des lignes de courbure v = const ont pour équation sur le plan.

$$v' = u' \operatorname{tg} V + C, \quad \text{c. à. d.} \int \frac{v\,dv}{\sqrt{v(a^2-v)(b^2-v)(v-c^2)}} = \operatorname{tg} V \int \frac{u\,du}{\sqrt{u(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)}} + C,$$

sur l'ellipsoïde.

Lignes asymptotiques.

183. – Les lignes asymptotiques d'une surface, donnée sous la forme $x = x(u,v)$; $y = y(u,v)$; $z = z(u,v)$, s'obtiennent (Cours de 1ère Année, N°: 296) en intégrant l'équation différentielle :

$$(9) \qquad R + 2S\frac{dv}{du} + T\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0\,,$$

qui est du premier ordre. Rappelons que R, S, T sont des fonctions de u, v, dont les valeurs proportionnelles sont respectivement :

$$A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\,; \quad A\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \ldots\ldots\,; \quad A\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \ldots\ldots$$

A, B, C désignant les coefficients du plan tangent: $\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$; ....

Exemple. – Lignes asymptotiques des surfaces réglées. – Une droite de l'espace :

$$(10) \qquad \begin{aligned} x &= a_1 u + b_1 \\ y &= a_2 u + b_2 \\ z &= a_3 u + b_3 \end{aligned}$$

engendrera une surface si a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 sont des fonctions d'une même variable, v. Les équations (10) définissent donc paramétriquement les coordonnées des points d'une surface réglée, en fonction des deux paramètres u et v. On a alors :

$$A = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = u(a_2 a_3' - a_3 a_2') + a_2 b_3' - a_3 b_2'$$

$$B = \dots\dots\dots\dots = u(a_3 a_1' - a_1 a_3') + a_3 b_1' - a_1 b_3'$$

$$C = \dots\dots\dots\dots = u(a_1 a_2' - a_2 a_1') + a_1 b_2' - a_2 b_1'$$

a_1', b_1', ... étant les dérivées de a_1, b_1, ... par rapport à v.
On calcule sans difficulté $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ .... $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$, et on obtient les valeurs proportionnelles de R, S, T, qui sont de la forme :

$$0\ ;\quad f(v)^{(1)}\ ;\quad u^2\varphi(v) + u\,\psi(v) + \chi(v)$$

f, φ, ψ, χ étant des fonctions de v qu'il est inutile d'écrire tout au long. L'équation différentielle (9) s'écrit donc :

$$(11)\qquad \frac{dv}{du}\left[2f(v) + \left[u^2\varphi(v) + u\,\psi(v) + \chi(v)\right]\frac{dv}{du}\right] = 0$$

Elle se décompose en deux : 1° $\frac{dv}{du} = 0$; d'où $v = \text{const.}$ Les lignes correspondantes sur la surface sont les génératrices rectilignes, solution évidente du problème (Cours de 1ère année ; N° 298, 3°). — 2° :

$$\frac{du}{dv} = Mu^2 + Nu + P,$$

M, N, P étant des fonctions de v. C'est une équation de Riccati, qu'on ne sait intégrer que si on en connaît une solution particulière. Mais on en déduit une propriété géométrique intéressante des lignes asymptotiques de la seconde série. D'après la Remarque du N° 164, le rapport anharmonique de quatre solutions u de l'équation de Riccati, pour une même valeur quelconque de la variable v, est constant ; c. à d. que le rapport anharmonique des quatre valeurs de u qui correspondent

(1) Car dans la valeur proportionnelle de S, le coefficient de u est $a_1'(a_2 a_3' - a_3 a_2') + \dots + \dots = 0$.

aux points où une même génératrice rectiligne mobile (v= const) coupe quatre lignes asymptotiques fixes est constant. Or, sur une droite donnée sur la forme (10), le rapport anharmonique des quatre valeurs du paramètre u qui correspondent à quatre points de cette droite, est égal au rapport anharmonique de ces quatre points (par ex. au rapport anharmonique de leurs abscisses); donc:

Quatre lignes asymptotiques d'une surface réglée coupent une génératrice rectiligne en quatre points, dont le rapport anharmonique est constant quand la génératrice varie.

Remarque. — Si la surface réglée admet une droite, en dehors des génératrices rectilignes (si celles-ci, par exemple rencontrent une droite fixe) cette droite est une ligne asymptotique, et fournit une solution particulière de l'équation de Riccati qui peut dès lors s'intégrer.

V. — Equation d'Euler.

---

184. — On nomme équation d'Euler l'équation différentielle du premier ordre.

$$(1) \qquad \frac{dx}{\sqrt{Ax^4+2Bx^3+Cx^2+2Dx+E}} \pm \frac{dy}{\sqrt{Ay^4+2By^3+Cy^2+2Dy+E}} = 0$$

Elle s'intègre immédiatement par quadratures, puisque les variables sont séparées; la solution se présente ainsi sous la forme:

$$F(x) \pm F(y) = \text{Const.}$$

$F(x)$ et $F(y)$ étant des fonctions transcendantes. Euler a observé que la solution générale de (1) peut aussi se mettre sous une forme algébrique par rapport à x et y; et, de la comparaison des deux formes de la solution, il a déduit un théorème d'addition, par la voie suivie au N° 154. Pour trouver l'intégrale algébrique, on s'appuiera sur un Lemme.

Lemme.

185. — Soit S une conique ; les coordonnées cartésiennes d'un de ses points peuvent, comme on sait, s'exprimer en fonction d'un paramètre ou argument, t, sous la forme

$$(S) \qquad x = \frac{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}{a_3 t^2 + b_3 t + c_3} \quad ; \qquad y = \frac{a_2 t^2 + b_2 t + c_2}{a_3 t^2 + b_3 t + c_3}$$

les a, b, c étant des constantes. A une valeur de t ne correspond qu'un seul point de la conique et inversement à un point de la conique ne correspond qu'une valeur de t.[1]

Cela posé soit T une seconde conique ayant pour équation $T(x,y)=0$, ou, en introduisant pour l'homogénéité une variable z, $T(x,y,z)=0$. Désignons par $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ les arguments t des quatre points où cette conique coupe S ; ils sont racines de l'équation :

$$(T) \qquad T(a_1 t^2 + b_1 t + c_1,\ a_2 t^2 + \cdots,\ a_3 t^2 + \cdots) = 0$$

que nous écrivons plus simplement $T(t) = 0$.

L'équation de T, si on rapporte la conique à deux tangentes et à la corde des contacts, peut se mettre sous la forme :

$$(1') \qquad T = B^2 - AC = 0 ,$$

A, B, C étant linéaires et homogènes en x, y, z. L'équation d'une tangente quelconque de cette courbe sera :

$$(2') \qquad \lambda^2 A + 2\lambda B + C = 0$$

λ étant un paramètre variable (car l'enveloppe des droites (2') est la conique (1')).

Cherchons les arguments, t, des points où cette tangente coupe la première conique, S : ce sont les deux racines de l'équation :

$$(3') \qquad f(t) = \lambda^2 A(t) + 2\lambda B(t) + C(t) = 0 ,$$

---

[1] t est, par exemple, le coefficient angulaire de la droite qui joint le point x, y à un point fixe de la conique.

où $A(t)$, ... désignent ce que deviennent A, ... quand on y remplace x; y; z par $a_1 t^2 + b_1 t + c_1$; $a_2 t^2 + \cdots$; $a_3 t^2 + \cdots\cdot$

Soient t et t_1 les deux racines de (3'); si on fait varier infiniment peu la tangente (2') en remplaçant λ par $\lambda + d\lambda$, t_1 et t_2 éprouvent des variations dt_1 et dt_2 qu'on obtient en différentiant (3'). Désignons, pour abréger, par $f(t)$ le premier membre de (3'), on a ainsi :

$$dt_1 f'(t_1) + 2d\lambda\left[\lambda A(t_1) + B(t_1)\right] = 0$$

$$dt_2 f'(t_2) + 2d\lambda\left[\lambda A(t_2) + B(t_2)\right] = 0$$

d'où l'on conclut :

$$\frac{dt_1}{\lambda A(t_1) + B(t_1)} + \frac{dt_2}{\lambda A(t_2) + B(t_2)} = -2d\lambda\left[\frac{1}{f'(t_1)} + \frac{1}{f'(t_2)}\right]$$

Or

$$f(t) = \alpha(t - t_1)\ (t - t_2),$$

α étant une constante par rapport à t; donc :

$$f'(t_1) = \alpha(t_1 - t_2); \quad f'(t_2) = \alpha\ (t_2 - t_1),$$

et par suite :

(4') $$\frac{dt_1}{\lambda A(t_1) + B(t_1)} + \frac{dt_2}{\lambda A(t_2) + B(t_2)} = 0$$

Mais en vertu de l'équation (3'): $\lambda^2 A(t) + 2\lambda B(t) + C(t) = 0$, à laquelle satisfont t_1 et t_2, on a :

$$\lambda A(t_1) + B(t_1) = \pm\sqrt{B^2(t_1) - A(t_1)C(t_1)}$$

$$\lambda A(t_2) + B(t_2) = \pm\sqrt{B^2(t_2) - A(t_2)C(t_2)}$$

et l'équation (4') devient :

(5') $$\frac{dt_1}{\sqrt{B^2(t_1) - A(t_1)C(t_1)}} \pm \frac{dt_2}{\sqrt{B^2(t_2) - A(t_2)C(t_2)}} = 0$$

ou, en observant que $B^2(t) - A(t)\,C(t)$ n'est autre chose que $T(t)$ [équations (1') et (T')], c'est-à-dire à un facteur constant près, le polynôme $(t-\tau_0)(t-\tau_1)(t-\tau_2)(t-\tau_3)$, on aura finalement :

$$(6') \qquad \frac{dt_1}{\sqrt{(t_1-\tau_0)(t_1-\tau_1)(t_1-\tau_2)(t_1-\tau_3)}} \pm \frac{dt_2}{\sqrt{(t_2-\tau_0)(t_2-\tau_1)(t_2-\tau_2)(t_2-\tau_3)}} = 0$$

Ainsi les arguments, t_1 et t_2, des deux points où une même tangente de la conique T' coupe la conique S satisfont à la relation différentielle (6'); $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ sont les arguments des points où S est rencontrée par T. C'est le Lemme analytique dont nous avons besoin pour intégrer l'équation d'Euler.

Observons que si on remplace T par une autre conique T', coupant S aux mêmes points, c'est-à-dire aux 4 points dont les arguments sont $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3$, la relation (6') subsiste, en supposant que t_1 et t_2 y désignent les arguments des deux points où une même tangente de T' coupe S.

Intégration algébrique de l'équation d'Euler.

186. – Cela posé écrivons l'équation d'Euler en mettant t_1 et t_2 à la place de x, y et en posant $T(t) = At^4 + 2Bt^3 + Ct^2 + 2Dt + E$:

$$(2) \qquad \frac{dt_1}{\sqrt{T(t_1)}} \pm \frac{dt_2}{\sqrt{T(t_2)}} = 0$$

D'après le lemme, si S est une conique, représentée paramétriquement par les formules (S) et si T'' désigne une seconde conique, passant par les quatre points de S dont les arguments, t, sont les racines de l'équation $T(t) = 0$, une tangente mobile de T'' coupe S en deux points dont les arguments, t_1 et t_2, vérifient l'équation différentielle (2). Donc, on obtiendra une solution de l'équation (2) en écrivant que la droite qui joint les deux points d'arguments t_1 et t_2, sur la conique S, touche une conique, T'' coupant S aux quatre points dont les arguments annulent $T(t)$.

L'équation de cette conique, T'', contient une constante arbitraire, puisque les coniques menées par quatre points sont en nombre simplement infini : la relation obtenue par cette méthode entre t_1 et t_2 renfermera donc une constante arbitraire,

et sera dès lors l'intégrale générale de (2) : d'ailleurs, toutes les opérations à effectuer étant algébriques, cette intégrale sera algébrique en t_1 et t_2.

Cette méthode permet de choisir à volonté la conique S et sa représentation paramétrique ; à chaque choix correspondra une forme algébrique différente de la solution de l'équation d'Euler, ces formes étant d'ailleurs équivalentes entre elles.

Prenons pour S la parabole $y = x^2$, représentée paramétriquement par les équations

$$x = t \qquad y = t^2$$

La droite qui joint les points d'arguments t_1 et t_2 sur cette courbe a pour équation :

$$y = x(t_1 + t_2) - t_1 t_2$$

ou, en posant pour abréger

$$t_1 + t_2 = s ; \quad t_1 t_2 = p \quad :$$

(3)
$$y = sx - p$$

Les quatre points de la parabole dont les arguments sont racines de l'équation :

$$T(t) = At^4 + 2Bt^3 + Ct^2 + 2Dt + E = 0$$

sont évidemment sur la conique :

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dx + E = 0 ;$$ [1]

donc l'équation générale des coniques, T', menées par ces quatre points est :

(4)
$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dx + E + 2\lambda(x^2 - y) = 0,$$

λ étant un paramètre arbitraire. D'après ce qui précède, la

(1) Car en faisant dans l'équation de la conique $x = t$, $y = t^2$ on retrouve l'équation $T(t) = 0$.

solution de l'équation d'Euler (relation entre t_1 et t_2, ou entre S et p) s'obtiendra en écrivant que la droite (3) touche la conique (4), c'est-à-dire en exprimant que l'équation aux x des points de rencontre a une racine double. Cette équation étant :

$$x^2(AS^2+2Bs+C+2\lambda)-2x\left[Asp+Bp-D+\lambda s\right]+Ap^2+2\lambda p+E=0$$

la relation cherchée entre S et p sera :

$$(Asp+Bp-D+\lambda S)^2-(As^2+2Bs+C+2\lambda)(Ap^2+2\lambda p+E)=0$$

ou, en ordonnant par rapport à la constante arbitraire, λ :

$$(5) \qquad \lambda^2(S^2-4p)-2\lambda\left[Ap^2+Bsp+Cp+Ds+E\right]+(B^2-AC)p^2-2ADsp$$
$$-AEs^2-2BDp-2BEs+D^2-CE=0.$$

Telle est, en supposant S et p remplacés par t_1+t_2 et $t_1 t_2$, la solution générale, sous forme algébrique, de l'équation d'Euler (2).

Autres formes de l'intégrale algébrique.

187. – Résolvons l'équation (5) par rapport à la constante λ ; il vient :

$$\lambda=\frac{Ap^2+Bsp+Cp+Ds+E\pm\sqrt{\mathcal{F}(s,p)}}{S^2-4p}$$

ce qui est une nouvelle forme de l'intégrale (5). La quantité sous le radical, $\mathcal{F}(s,p)$, polynôme en S et p, a une expression remarquable, qu'on peut découvrir a priori, sans calcul. Observons à cet effet que $\mathcal{F}(S,p)$ est aussi un polynôme en t_1 et t_2 ; égalé à zéro, il représente la condition pour que l'équation (5), considérée comme équation en λ, ait ses deux racines égales. Or, géométriquement, l'équation (5) exprime que la conique (4) touche la droite (3) ; donc considérée comme équation en λ, elle a pour racines les deux valeurs de λ qui correspondent aux deux coniques T', du faisceau (4), qui touchent la droite (3). En d'autres termes, la condition $\mathcal{F}(s,p)=0$ exprime que les deux coniques du faisceau (4) qui touchent la droite (3) sont confondues.

Or, il est clair que ces deux coniques seront confondues si la droite (3) passe par un des quatre points fixes communs

aux coniques du faisceau (4) : car il n'y a qu'une conique passant par quatre points et touchant en un d'eux une droite donnée. D'ailleurs, la droite (3) coupe S aux points d'arguments t_1 et t_2 ; et les quatre points fixes sont les points de S qui ont pour arguments les racines de l'équation $T(t) = 0$: il en résulte que la droite (3) passera par un de ces points si t_1 ou t_2 est racine de cette équation, c'est-à-dire si $T(t_1)$ ou $T(t_2)$ est nul.

En d'autres termes, lorsque le produit $T(t_1)\,T(t_2)$ sera nul, l'équation (5), en λ, aura une racine double, c'est-à-dire que le polynôme $F(s,p)$ est divisible par $T(t_1)\,T(t_2)$; donc :

$$F(s,p) = T(t_1)\,T(t_2)\,\varphi(t_1, t_2) ;$$

φ étant un polynôme en t_1, t_2. D'ailleurs, en formant $F(s,p)$, on a :

$$F(s,p) = A^2 p^4 + \dots\dots = A^2 t_1^4 t_2^4 + \dots$$

et $A^2 t_1^4 t_2^4$ est le terme du degré le plus élevé dans F par rapport à t_1 et t_2. Comme dans le produit $T(t_1)\,T(t_2)$ le premier terme est $At_1^4 \cdot At_2^4 = A^2 t_1^4 t_2^4$, on voit que $\varphi(t_1, t_2)$ est nécessairement égal à l'unité. Donc :

$$F(s,p) = T(t_1)\,T(t_2),$$

ce qu'on pourrait vérifier par un calcul direct.

On a donc, pour nouvelle forme de l'intégrale (5) de l'équation d'Euler (2) :

$$(6) \qquad \lambda = \frac{Ap^2 + Bsp + Cp + Ds + E \pm \sqrt{T(t_1)\,T(t_2)}}{s^2 - 4p} \text{ (1)}$$

(1) Note non indiquée au cours.

On peut encore mettre l'équation (6) sous une autre forme, plus simple.

Multiplions les deux membres de (6) par 2 ; retranchons et ajoutons au numérateur la quantité $T(t_1) + T(t_2)$; il vient :

$$2\lambda = \frac{-T(t_1) - T(t_2) + 2Ap^2 + 2Bsp + 2Cp + 2Ds + 2E + \left[\sqrt{T(t_1)} \pm \sqrt{T(t_2)}\right]^2}{s^2 - 4p}$$

Or on a, au numérateur :

Conséquences analytiques.

188. – On peut déduire de là, comme au N° 154, un théorème d'addition de fonctions elliptiques. Soit par exemple l'équation d'Euler :

$$(1'') \qquad \frac{dx}{\sqrt{x^4+2x}} + \frac{dy}{\sqrt{y^4+2y}} = c$$

Posons

$$(2'') \qquad F(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x^4+2x}}, \text{ de telle sorte que } F(0)=0.$$

L'intégrale générale de (1'') sera :

$$F(x)+F(y)=C_1.$$

L'intégrale sera également, d'après (6) :

$$\lambda = \frac{x^2y^2+x+y \pm \sqrt{T(x)T(y)}}{(x-y)^2}$$

Donc, en vertu de la Remarque du N° 154 :

$$F(x)+F(y) = f\left[\frac{x^2y^2+x+y \pm \sqrt{T(x)T(y)}}{(x-y)^2}\right]$$

Pour déterminer la fonction f, faisons $y=0$ dans cette équation ; il

---

Suite de la note page 200.

$$-T(t_1)-T(t_2)+2Ap^2+2Bsp+2Cp+2Ds+2E = -A\left[t_1^4+t_2^4-2t_1^2t_2^2\right]$$
$$-2B\left[t_1^3+t_2^3-t_1t_2(t_1+t_2)\right]$$
$$-C\left[t_1^2+t_2^2-2t_1t_2\right]-2D\left[t_1+t_2-t_1-t_2\right]-2E+2E$$
$$= -A(t_1+t_2)^2(t_1-t_2)^2-2B(t_1+t_2)(t_1-t_2)^2-C(t_1-t_2)^2$$

d'où, en observant qu'au dénominateur $S^2-4p=(t_1+t_2)^2-4t_1t_2=(t_1-t_2)^2$:

$$2\lambda+A(t_1+t_2)^2+2B(t_1+t_2)+C = \left[\frac{\sqrt{T(t_1)} \pm \sqrt{T(t_2)}}{t_1-t_2}\right]^2$$

forme de l'intégrale due à Lagrange.

vient, puisque $F(y)=0$:

$$F(x)=f\left(\frac{1}{x}\right) ; \quad \text{ou} \quad f(u)=F\left(\frac{1}{u}\right) ;$$

ce qui donne

$$(3'') \qquad F(x)+F(y)=F\left[\frac{(x-y)^2}{x^2y^2+x+y\pm\sqrt{T(x)T(y)}}\right]$$

Introduisons la fonction inverse de $F(x)$, c'est-à-dire posons

$$F(x)=u, \ldots\ldots \text{d'où} \quad x=\varphi(u) ;$$

$\varphi(u)$ est elliptique en u, comme on l'établira plus tard, par une méthode pareille à celle du N.º 80 ; en posant de même

$$F(y)=v \ldots\ldots\ldots \quad y=\varphi(v),$$

et en observant que, d'après (2'') on a $du=\dfrac{dx}{\sqrt{T(x)}}$, d'où $\sqrt{T(x)}=\dfrac{dx}{du}=\varphi'(u)$, on obtient, en substituant dans (3''), la formule d'addition de $\varphi(u)$:

$$u+v=F\left[\frac{[\varphi(u)-\varphi(v)]^2}{\varphi^2(u)\varphi^2(v)+\varphi(u)+\varphi(v)\pm\varphi'(u)\varphi'(v)}\right] ; \quad \text{c. à. d.} :$$

$$\varphi(u+v)=\frac{[\varphi(u)-\varphi(v)]^2}{\varphi^2(u)\varphi^2(v)+\varphi(u)+\varphi(v)\pm\varphi'(u)\varphi'(v)}$$

On déterminera le signe à prendre devant $\varphi'(u)\,\varphi'(v)$ en faisant $u=v$: le premier membre n'est pas nul ; pour que le second membre soit $\gtrless 0$, il faut évidemment que le dénominateur s'annule comme le fait le numérateur pour $u=v$, ce qui donne

$$\varphi^4(u)+2\varphi(u)\pm\varphi'^2(u)=0 \ ;$$

et comme $\varphi'(u)=\sqrt{T(x)}=\sqrt{T[\varphi(u)]}$; d'où $\varphi'^2=\varphi^4(u)+2\varphi(u)$, il faut prendre le signe $-$.(1)

---

(1) En se servant de la forme de l'intégrale due à Lagrange, on établirait de même la formule d'addition de pu.

Conséquences géométriques.

189. – Donnons au Lemme du N° 185 une autre forme en introduisant les fonctions elliptiques.

A cet effet, ramenons le radical $\sqrt{(t-\tau_0)(t-\tau_1)(t-\tau_2)(t-\tau_3)}$ à la forme normale en posant (N°s 123 et 124) :

$$(7') \qquad \theta = \frac{1}{t-\tau_0} + h \; ; \quad \text{d'où} \quad t = \tau_0 + \frac{1}{\theta - h} \, ,$$

h étant une constante. Les valeurs de θ qui correspondent aux valeurs $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ de t sont :

$$\theta = \infty \; ; \quad h + \frac{1}{t-\tau_0} \; ; \quad h + \frac{1}{\tau_2 - \tau_0} \; ; \quad h + \frac{1}{\tau_3 - \tau_0} \, .$$

Nous choisirons ensuite h de manière que la somme des trois dernières quantités, que nous appellerons e_1, e_2, e_3 soit nulle ; on a :

$$\frac{dt}{\sqrt{(t-\tau_0)(t-\tau_1)(t-\tau_2)(t-\tau_3)}} = \frac{-d\theta}{(\theta-h)^2\sqrt{\dfrac{[(\tau_0-\tau_1)(\theta-h)+1][(\tau_0-\tau_2)(\theta-h)+1][(\tau_0-\tau_3)(\theta+h)+1]}{(\theta-h)^4}}} = \frac{k\,d\theta}{2\sqrt{(\theta-e_1)(\theta-e_2)(\theta-e_3)}}$$

k étant une constante. Si donc θ_1 et θ_2 sont les valeurs de θ qui correspondent aux valeurs t_1 et t_2 de t, l'équation (6') s'écrit :

$$\frac{d\theta_1}{2\sqrt{(\theta_1-e_1)(\theta_1-e_2)(\theta_1-e_3)}} \pm \frac{d\theta_2}{2\sqrt{(\theta_2-e_1)(\theta_2-e_2)(\theta_2-e_3)}} = 0 \, ;$$

ou en posant

$$(8') \qquad \theta = p(u, e_1, e_2, e_3) :$$

et en appelant u_1 et u_2 les valeurs de u qui correspondent aux valeurs θ_1 et θ_2 de θ :

$$(9') \qquad \pm\, du_1 + du_2 = 0$$

En vertu des équations (S) et transformations (7') et (8'), à une valeur de pu correspond un seul point de S, et à un point de S, une seule valeur de pu, c'est-à-dire deux arguments elliptiques u (à des périodes près), égaux et de signe contraire. Les arguments u des deux points où S est coupée par une même tangente de T vérifient donc la relation différentielle (9'), qui, intégrée, donne :

$$(10') \qquad \pm u_1 + u_2 = C$$

C étant une constante : si u_1 est donné, on en déduit, pour u_2, les deux valeurs $C-u_1$ et $C+u_1$, qui correspondent aux deux tangentes menées à T par le point d'argument u_1 sur S.

Théorème de Poncelet. – La relation (10') conduit immédiatement à un théorème célèbre dû à Poncelet. Partons en effet d'un point quelconque de S, d'argument u_1 ; menons de ce point une tangente à T, celle, par exemple, qui coupe de nouveau S au point u_2, tel que :

$$u_2 - u_1 = C \ ; \ \text{ou} \ u_2 = u_1 + C$$

La seconde tangente menée de u_2 à T coupe S en un nouveau point, u_3, tel que

$$u_3 = u_2 + C = u_1 + 2C ,$$

et ainsi de suite. On obtient de la sorte sur S des points :

$$u_1 \ ; \ u_1 + C \ ; \quad u_1 + 2C \ ; \ u_1 + 3C \ ; \ \ldots\ldots \ u_1 + nC \ ; \ldots\ldots$$

formant les sommets successifs d'une ligne polygonale dont les côtés touchent T : pour que la ligne se ferme, avec n côtés, il faut que le $(n+1)^{\text{ième}}$ sommet coïncide avec u_1, c'est-à-dire que l'on ait :

$$u_1 + nC = u_1 + \text{période}^{(1)}$$

d'où :

$$nC = \text{période}.$$

Cette condition est indépendante du point initial u_1 ; si elle est vérifiée, la ligne polygonale se fermera toujours, quelque soit le point de départ, sinon elle ne se fermera jamais.

Donc :

---

(1) Le point $-u$ étant, sur S, le même que le point u, on aurait pu aussi écrire :

$$u_1 + nC = -u_1 + \text{période}.$$

Mais en ce cas on n'aurait pas un véritable polygone. Le deuxième sommet, $u_1 + C$, coïnciderait en effet avec le $n^{\text{ième}}$, $u_1 + (n-1)C$, car en vertu de l'équation précédente : $\quad u_1 + (n-1)C = -(u+C) + \text{période},$

et ainsi de suite : on trouverait donc une ligne polygonale repliée sur elle-même.

Deux coniques étant données, il n'existe pas, en général, de polygone de n côtés inscrit à l'une et circonscrit à l'autre; si un tel polygone existe, il y en a une infinité d'autres [1].



Chapitre II.

[1] On pourra se reporter au Cours de 1ère Division, 1895-96, pour les développements et corollaires de ce théorème.

Chapitre II.

Équations différentielles d'ordre quelconque.

I. – Cas de réductibilité des équations différentielles.

190. – Il n'y a pas de méthode pour intégrer une équation différentielle générale d'ordre n, on ne peut que signaler certains cas, où il est possible de réduire l'ordre de l'équation, c'est-à-dire de la ramener à une autre, d'ordre inférieur.

Premier cas.

191. – La fonction inconnue et ses $k-1$ premières dérivées ne figurent pas dans l'équation qui est de la forme :

$$f\left(x, \frac{d^k y}{dx^k}, \dots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0.$$

Il suffit évidemment de prendre pour nouvelle inconnue $\frac{d^k y}{dx^k} = u$; on a :

$$f\left(x, u, \frac{du}{dx}, \dots \frac{d^{n-k} u}{dx^{n-k}}\right) = 0,$$

équation, dont l'ordre est inférieur de k unités à celui de la proposée. Si on peut l'intégrer, on aura : $\frac{d^k y}{dx^k} = u(x)$; d'où :

$$\frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}} = \int u\,dx;$$

$$\frac{d^{k-2} y}{dx^{k-2}} = \int dx \int u\,dx; \dots\dots \text{etc}$$

L'inconnue y s'obtiendra donc par K quadratures successives, introduisant chacune une nouvelle constante ; avec les $n-K$ constantes que renferme u, on aura bien des n constantes requises pour l'intégrale générale y.

On peut d'ailleurs remplacer les K quadratures successives par une seule.

Soit en effet, d'une manière générale, à intégrer l'équation :

(1) $$\frac{d^m Y}{dx^m} = \varphi(x)$$

On considère la fonction :

$$y = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^x \varphi(z)(x-z)^{m-1}dz \, ;$$

je dis qu'elle vérifie (1). En effet, en appliquant la règle de dérivation sous le signe $\int$, on a :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(m-2)!}\int_0^x \varphi(z)(x-z)^{m-2}dz + \frac{1}{(m-1)!}\Big[\varphi(z)(x-z)^{m-1}\Big]_{z=x}$$

Le second terme est nul ; on a de même :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(m-3)!}\int_0^x \varphi(z)(x-z)^{m-3}dz$$

. . . .

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = 1.\int_0^x \varphi(z)\,dz$$

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \varphi(x)$$

Si donc on désigne par Y l'intégrale générale de (1), et qu'on pose :

$$Y = y + u,$$

u étant l'inconnue nouvelle, on aura :

$$\frac{d^m y}{dx^m} + \frac{d^m u}{dx^m} = \varphi(x), \quad d'où : \frac{d^m u}{dx^m} = 0\,,$$

et par suite :

$$u = C_1 x^{m-1} + C_2 x^{m-2} + \cdots + C_{m-1}x + C_m\,.$$

L'intégrale générale de (1) est donc :

$$Y = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^x \varphi(z)(x-z)^{m-1}dz + P_{m-1}(x)$$

$P_{m-1}(x)$ étant un polynôme arbitraire en x, d'ordre $m-1$.

Deuxième cas.

192. _ La variable x ne figure pas dans l'équation :

(2) $$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

On ramène ce cas au précédent en prenant x comme inconnue et y comme variable, car on obtient ainsi une équation où l'inconnue ne figure pas. Les formules qui expriment les dérivées de y (y', y'',...) par rapport à x, en fonction des dérivées de x par rapport à y (x', x'',...) se trouvent aisément, en observant que $\frac{dy}{dx}$ c.à.d. y', est l'inverse de $\frac{dx}{dy}$, c.à.d. x'. On a ainsi :

$$y' = \frac{1}{x'} \; ; \; y'' = \frac{d}{dx} y' = \frac{dy}{dx} \times \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{x'}\right) = \frac{1}{x'} \times \frac{-x''}{x'^2} = \frac{-x''}{x'^3}$$

$$y''' = \frac{d}{dx} y'' = \frac{1}{x'} \frac{d}{dy}\left(\frac{-x''}{x'^3}\right) = \frac{-x'x''' + 3x''^2}{x'^5} \dots \text{etc}$$

Autre méthode applicable surtout si l'ordre de l'équation (2) est peu élevé : on prend y comme variable et $\frac{dy}{dx}$ comme inconnue. Posons donc :

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

et cherchons à exprimer $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$ en fonction de $p, \frac{dp}{dy}, \dots$ On a :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{\left(\frac{dy}{p}\right)} = p\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = p\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2$$

et ainsi de suite : $\frac{d^ny}{dx^n}$ s'exprimera en fonction de p et de ses $(n-1)$ premières dérivées par rapport à y. Portant ces valeurs dans la proposée (2) on aura une équation d'ordre $(n-1)$ en p ; si on peut l'intégrer, soit

$$p = \varphi(y)$$

la solution générale, renfermant $(n-1)$ constantes ; on aura :

$$dx = \frac{dy}{p}, \quad \text{d'où} \quad x = \int \frac{dy}{f(y)} + \text{const};$$

ce qui donne l'intégrale générale de (?) avec les n constantes nécessaires.

Troisième cas.

193. — L'équation est homogène par rapport à y et à ses dérivées (c'est-à-dire ne change pas si on remplace y par λy, x étant inaltéré).

On pose :

$$y = e^z; \qquad \text{d'où :}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^z \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^z \left[\frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right] \ldots\ldots\ldots \text{etc}$$

Substituons ces valeurs dans la proposée : e^z sera en facteur dans tous les termes, à une certaine puissance, en raison de l'homogénéité ; après suppression de ce facteur, l'équation ne contiendra plus z, car, dans y et ses dérivées, z ne figure que sous la forme e^z. On trouvera ainsi une relation de la forme :

$$f\left(x, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots \frac{d^nz}{dx^n}\right) = 0$$

équation d'ordre $n-1$ par rapport à $\frac{dz}{dx}$. (Premier cas).

Quatrième cas.

194. — L'équation est homogène par rapport à $x, y, dx, d^2y, \ldots d^ny$, c'est-à-dire ne change pas quand on remplace x par λx et y par λy. (Généralisation des équations homogènes du premier ordre). Pour intégrer, on pose :

$$y = ux,$$

u étant l'inconnue nouvelle.

L'équation différentielle obtenue en u ne change pas, d'après ce qui précède, quand on remplace x par λx, u restant

inaltéré : si donc on prend u pour variable et x pour inconnue, l'équation différentielle en x sera homogène par rapport à x et à ses dérivées, ce qui est le troisième cas de réduction.

II. – Applications.

195. – C'est surtout pour les équations différentielles du second ordre que les procédés ci-dessus de réduction sont importants : dans le cas où ils sont applicables, ils conduisent à des équations du premier ordre, qu'on peut parfois intégrer, ainsi que la mécanique en présente de nombreux exemples. On donnera ici d'autres exemples, empruntés à des problèmes géométriques.

Questions diverses.

196. – Courbe élastique. – Trouver une courbe plane, (passant par l'origine) dont le rayon de courbure soit inversement proportionnel à l'ordonnée.

L'équation du problème est :

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{a^2}{2y} ;$$

elle ne contient pas x (second cas de réduction) ; on posera donc :

$$y' = p ; \qquad y'' = p\,\frac{dp}{dy}$$

d'où :

$$\frac{p\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2y}{a^2}\,dy$$

Les variables sont séparées ; intégrons :

(3) $$-\frac{1}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y^2 - C}{a^2} \quad \ldots\ldots (C \text{ constante arbitraire}).$$

ce qui donne

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a^4-(y^2-c)^2}{(y^2-c)^2}}$$

$$dx = \pm \frac{(y^2-c)dy}{\sqrt{a^4-(y^2-c)^2}}$$

on est ramené à une différentielle elliptique, le polynôme sous le radical est bicarré. Posons alors

(4) $$y^2 - c = -u$$

d'où :

$$dx = \pm \frac{u\,du}{2\sqrt{(u-c)(u^2-a^4)}}$$

On introduit les fonctions elliptiques en posant.

$$u = pv + \frac{1}{3}c\ ; \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} e_\alpha = c - \frac{1}{3}c = \frac{2}{3}c \\ e_\beta = a^2 - \frac{1}{3}c \\ e_\gamma = -a^2 - \frac{1}{3}c \end{cases}$$

et en intégrant

$$\pm x = \int \left(pv + \frac{1}{3}c\right) dv = -\zeta v + \frac{c}{3} v + \text{Const}$$

en y joignant (4)

$$y = \sqrt{c-u} = \sqrt{\frac{2}{3}c - pv} = \sqrt{e_\alpha - pv}$$

on a x et y exprimés en fonction d'un paramètre, v ; ce qui définit la courbe.

Ecrivons que la courbe passe par l'origine, c'est-à-dire que $x = 0$ pour $y = 0$: y s'annule pour $v = \omega_\alpha$; on aura donc :

$$0 = -\zeta\omega_\alpha + \frac{c}{3}\omega_\alpha + \text{const}$$; ce qui détermine la constante.

et par suite :

$$\begin{cases} \pm x = -(\zeta v - \zeta\omega_\alpha) + \frac{c}{3}(v - \omega_\alpha) \\ y = \sqrt{e_\alpha - pv} \end{cases}$$

Il sera plus commode de prendre pour paramètre $v - \omega_2 = t$; en appliquant les formules $p(t+\omega_2)\dots$ (N° 112) et $\zeta(t+\omega_2)\dots$ (N° 110), il vient :

$$\pm x = -\zeta t - \frac{1}{2}\,\frac{p't}{pt-e_2} + \frac{c}{3}\,t$$

$$y = \sqrt{\frac{(e_2-e_1)(e_3-e_2)}{pt-e_2}} = \frac{\sqrt{(a^2+c)(a^2-c)}}{\sigma_{20}(t)}$$

On peut prendre devant x le signe $+$; le signe $-$ donnerait la courbe symétrique par rapport à Oy ; de même pour y.

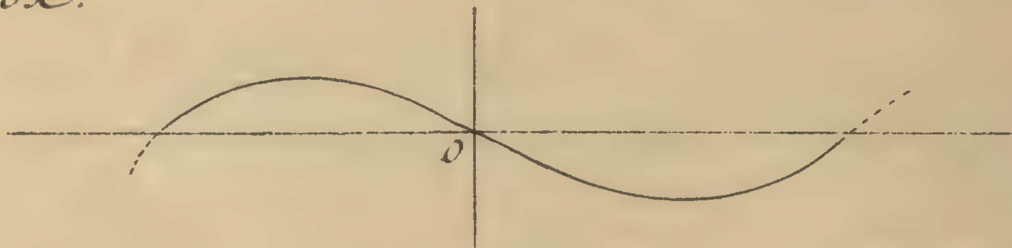
Observons que C est réel, comme le montre l'équation (3), lorsque la courbe est réelle. Pour que x soit réel, il faut alors que t le soit, sinon le terme $\frac{C}{3}t$ donnerait une quantité imaginaire qui ne pourrait évidemment se réduire avec les autres termes de x ; t étant réel, $pt - e_2$ est positif (car $pt \geqq e_1$), et y sera réel si $(a^2+c)(a^2-c) > 0$, c. à d. si c est compris entre $-a^2$ et $+a^2$.

Cette condition étant supposée remplie, il est aisé de construire la courbe.

Pour $t=0$, y et x sont nuls, comme on l'a vu ; y s'annule en outre pour $t = 2m_1\Omega_1$, $2\Omega_1$ étant la période réelle de pt. Comme on a, $e_3 > e_2 > e_1$, en vertu de l'hypothèse faite en C, $2\Omega_1 = 2\omega_3$.

D'ailleurs en changeant t en $t + 4\Omega_1$, y ne change pas (car $\sigma_{20}(u+4\omega_3) = \sigma_{20}(u)\dots$ N° 115), et x augmente de $-4\eta_3 + \frac{4C}{3}\Omega_1$

(car $\zeta(u+2\omega_3) = \zeta u + 2\eta_3$, ... N° 98). Il en résulte que la courbe se compose d'une infinité d'arcs se produisant périodiquement, parallèlement à Ox.



L'origine est un centre, car si on change t en $-t$, x et y changent de signe ; il en est de même de tous les points où la courbe coupe Ox.

197. – Trouver une courbe dont le rayon de courbure soit égal au rayon vecteur. – L'équation du problème est :

(5)
$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \sqrt{x^2+y^2}$$

ou :

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y} = \sqrt{x^2+y^2} \;;$$

équation homogène en x, y, dx, dy, d^2y (quatrième cas de réduction). Posons donc dans (5),

$$y = ux\,;$$

il vient :

$$\frac{\left[1+(u'x+u)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{u''x+2u'} = x\sqrt{1+u^2}$$

Prenons, selon la règle, u comme variable, x comme fonction : $u'_x = \frac{1}{x'_u}$; $u'' = \frac{-x''}{x'^3}$:

$$\frac{\left[x'^2+(x+ux')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{2x'^2-xx''} = x\sqrt{1+u^2} \;;$$

équation qui rentre dans le 3ème cas de réduction, et où l'on posera $x = e^z$, d'où :

$$\frac{\left[z'^2+(1+uz')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{z'^2-z''} = \sqrt{1+u^2}$$

En prenant z' pour inconnue : $z'_u = t$, on a l'équation du premier ordre :

$$(t'-t^2)\sqrt{1+u^2}+\left[t^2+(1+tu)^2\right]^{\frac{3}{2}} = 0\,,$$

qui ne rentre dans aucun des types intégrables. Divisons par t^2 :

$$\left[\frac{t'}{t^2}-1\right]\sqrt{1+u^2}+t\left[1+\left(u+\frac{1}{t}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = 0$$

On voit apparaître $u+\frac{1}{t}$ et sa dérivée $1-\frac{t'}{t^2}$; posons donc :

(6) $$u+\frac{1}{t} = v\,; \quad \ldots\ldots \text{ l'équation devient :}$$

$$\frac{dv}{du}\sqrt{1+u^2} - \frac{1}{v-u}\left[1+v^2\right]^{\frac{3}{2}} = 0$$

ou, en prenant u pour inconnue, v pour variable :

$$\frac{du}{dv}\left(1+v^2\right)^{\frac{3}{2}}+\left(u-v\right)\sqrt{1+u^2}=0$$

C'est une équation d'un type que nous savons ramener au type de Riccati par un changement d'inconnue (N° 176) en posant :

$$(7)\qquad u=\frac{1-\theta^2}{2\theta}\ ;\quad \sqrt{1+u^2}=\frac{1+\theta^2}{2\theta}\ ;\quad du=-\frac{1}{2}\,\frac{1+\theta^2}{\theta^2}\,d\theta$$

et l'équation devient, après réductions :

$$(8)\qquad 2\frac{d\theta}{dv}\left(1+v^2\right)^{\frac{3}{2}}+\theta^2+2\theta v-1=0$$

équation de Riccati en θ.

Pour l'intégrer il faudrait en connaître une solution particulière. Or une solution du problème proposée est évidemment la circonférence $x^2+y^2=R^2$; partant de cette valeur de y, et descendant la série des calculs, on trouve :

$$\sqrt{R^2-x^2}=ux\ \ldots\ldots\ x\sqrt{1+u^2}=R\ \ldots\ldots\ e^z\sqrt{1+u^2}=R\ \ldots\ldots\ z=\log R-\frac{1}{2}\log(1+u^2)$$

$$z'_u=t=\frac{-u}{1+u^2}\qquad v=u+\frac{1}{t}=u-\frac{1+u^2}{u}=-\frac{1}{u}\,.$$

Finalement, en remplaçant u par sa valeur (7) en θ, on a :

$$\frac{2\theta}{\theta^2-1}=v\ ;\qquad \text{d'où :}\quad \theta=\frac{1\pm\sqrt{1+v^2}}{v}$$

ce qui donne pour θ deux valeurs, et l'on vérifie que la racine correspondant au signe + est solution de (8) ; on pose alors dans (8), selon la méthode générale :

$$\theta=\frac{1+\sqrt{1+v^2}}{v}+\frac{1}{\zeta}\,,$$

pour obtenir une équation linéaire en ζ (N°) qu'on sait intégrer. Le problème est donc théoriquement résolu ; mais on est ainsi conduit à des formules compliquées.

La méthode la plus simple pour le traiter consisterait à employer les coordonnées polaires, ρ et ω, en faisant usage de l'expression du rayon de courbure donnée au N° 256 bis du cours de 1ère année. On aurait ainsi :

$$\frac{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}=\rho\,, \ldots\ldots\ \left(\rho'=\frac{d\rho}{d\omega}\ ,\ \rho''=\frac{d^2\rho}{d\omega^2}\right);$$

équation où la variable manque ... ... (2e cas de réduction) etc...

Lignes géodésiques.

---

198. – On appelle lignes géodésiques d'une surface les lignes, tracées sur cette surface, et dont le plan osculateur en chaque point est normal à la surface en ce point.

Elles jouissent d'une importante propriété : le plus court chemin entre deux points, sur la surface, est une géodésique. La démonstration rigoureuse nécessite l'emploi du calcul des variations ; mais on va établir que, si le plus court chemin existe, ce ne peut être qu'une ligne géodésique.

En effet, la ligne qui est le plus court chemin entre deux points de la surface est aussi le plus court chemin entre deux points quelconques pris sur la ligne ; en particulier, entre deux points infiniment voisins M et M'. Mais on a (Cours de 1ère Année, N° 274):

$$\text{arc } MM' - \text{corde } MM' = \frac{1}{24}K^2.(\text{Corde } MM')^3,$$

en se bornant à la valeur principale : K est la courbure de la ligne au point M. On voit ainsi que, les points M et M' étant donnés, l'arc MM' sera minimum lorsque K sera minimum, c.à.d. lorsque le rayon de courbure $\left(\frac{1}{K}\right)$ sera maximum. Or le rayon de courbure en M d'une ligne tracée sur la surface étant, d'après Meusnier, la projection sur le plan osculateur du rayon de courbure de la section normale menée par la même tangente, il en résulte que, pour une tangente donnée, MM', le maximum de $\frac{1}{K}$ aura lieu lorsque le plan osculateur contiendra la normale. Cette élégante démonstration est due à M. Joseph Bertrand.

C. Q. f. d.

199. – L'équation différentielle des lignes géodésiques de la surface

(1) $\quad x=x(u,v)\ ;\qquad y=y(u,v)\ ;\qquad z=z(u,v)$

s'obtient comme il suit. Une ligne tracée sur la surface est définie par les équations (1) où l'on regarde u et v comme fonctions d'une même variable, (t); le plan osculateur en un point x, y, z de la ligne est :

$$0 = \begin{vmatrix} X-x & x' & x'' \\ Y-y & y' & y'' \\ Z-z & z' & z'' \end{vmatrix} \quad ; \quad \text{ou :} \quad 0 = \begin{vmatrix} X-x & dx & d^2x \\ Y-y & dy & d^2y \\ Z-z & dz & d^2z \end{vmatrix}$$

$dx, d^2x, \dots$ étant les différentielles de $x, \dots$, c. à. d. :

$$(2) \qquad \begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv \\ d^2x &= \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial x}{\partial u}d^2u + \frac{\partial x}{\partial v}d^2v. \end{aligned}$$

Écrivons que ce plan contient la normale $\frac{X-x}{A} = \frac{Y-y}{B} = \frac{Z-z}{C}$, c. à. d. lui est parallèle ; on a :

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} A & dx & d^2x \\ B & dy & d^2y \\ C & dz & d^2z \end{vmatrix} = 0$$

Cette équation se met sous une autre forme : multiplions les lignes respectivement par $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ et ajoutons : nous obtenons, puisque $A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial y}{\partial u} + C\frac{\partial z}{\partial u} \equiv 0$, (Cours de 1ère Année, p. 277) la ligne nouvelle :

$$0, \qquad dx\frac{\partial x}{\partial u} + dy\frac{\partial y}{\partial u} + dz\frac{\partial z}{\partial u} ; \qquad d^2x\frac{\partial x}{\partial u} + \dots\dots$$

qui peut remplacer une de celles du déterminant. De même en multipliant par $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ et ajoutant, on obtient la ligne

$$0, \qquad dx\frac{\partial x}{\partial v} + dy\frac{\partial y}{\partial v} + dz\frac{\partial z}{\partial v} ; \quad d^2x\frac{\partial x}{\partial v} + \dots\dots$$

Le déterminant est donc, à un facteur près :

$$(3^{bis})\qquad \begin{vmatrix} A & C & 0 \\ dx & dx\frac{\partial x}{\partial u}+dy\frac{\partial y}{\partial u}+dz\frac{\partial z}{\partial u} & dx\frac{\partial x}{\partial v}+\cdots \\ d^2x & d^2x\frac{\partial x}{\partial u}+\cdots\cdots & d^2x\frac{\partial x}{\partial v}+\cdots \end{vmatrix}=0,$$

ce qui donne, pour l'équation cherchée, le mineur encadré, égalé à zéro.

Or rappelons-nous les notations (Cours de 1ère Année, N° 279).

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\ ;\quad F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\cdots\cdots;\quad G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\cdots;$$

l'équation (3bis) s'écrit : en remplaçant $dx,\ldots d^2x,\ldots$ par leurs valeurs (2):

$$0=\begin{vmatrix} Edu+Fdv & Ed^2u+Fd^2v+du^2\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right]+2du\,dv\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\right]+dv^2\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right] \\ Fdu+Gdv & Fd^2u+Gd^2v+dv^2\left[\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right]+\cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}$$

en écrivant $\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right]$ pour la somme $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$; etc...

Or :

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u};\qquad \left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\right]=\frac{1}{2}\frac{dE}{dv};$$

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right]=\frac{\partial F}{\partial v}-\left[\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\right]=\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u};\ \text{etc}\ldots\ldots$$

ce qui donne, pour équation finale :

$$0=\begin{vmatrix} Edu+Fdv & Ed^2u+Fd^2v+\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}du^2+\frac{\partial E}{\partial v}du\,dv+\left[\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right]dv^2 \\ Fdu+Gdv & Fd^2u+Gd^2v+\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}dv^2+\frac{\partial G}{\partial u}du\,dv+\left[\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right]du^2 \end{vmatrix}$$

C'est l'équation différentielle des lignes géodésiques ; pour la mettre sous la forme ordinaire, on peut prendre u pour variable

indépendante et v pour fonction inconnue, ce qui donne $d^2u = 0$. Il vient ainsi, en divisant la première colonne par du, la seconde par du^2, et posant $\frac{dv}{du} = v'$; $\frac{d^2v}{du^2} = v''$:

$$(4) \quad \begin{vmatrix} E + Fv' & Fv'' + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} + \frac{\partial E}{\partial v} v' + \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right) v'^2 \\ F + Gv' & Gv'' + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v} v'^2 + \frac{\partial G}{\partial u} v' + \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right) \end{vmatrix} = 0$$

Développons : le terme en $v'v''$ disparaît, et il reste une équation du type :

$$(5) \qquad v'' = A + Bv' + Cv'^2 + Dv'^3,$$

A, B, C, D étant des fonctions de u, v (comme les E, F, G).
C'est une équation différentielle du second ordre, qu'on ne sait pas intégrer en général, mais qui a donné lieu à de nombreux et importants travaux, surtout dans des cas particuliers.

200. - Remarque I. - Si la surface est donnée sous la forme $z = f(x, y)$, on obtiendra l'équation différentielle des géodésiques en faisant, dans (4), $u = x$, $v = y$, $E = 1 + p^2$, $F = pq$; $G = 1 + q^2$ (cours de 1ère année, N° 280). Il est plus simple de partir directement de l'équation (3) :

$$\begin{vmatrix} A & dx & d^2x \\ B & dy & d^2y \\ C & dz & d^2z \end{vmatrix} = 0$$

où l'on fait $A = p$; $B = q$; $C = -1$;

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

$$d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 + p\,d^2x + q\,d^2y,$$

suivant les notations habituelles. Si on prend x comme variable indépendante sur la géodésique, $d^2x = 0$, et il reste

$$0 = \begin{vmatrix} p & dx & 0 \\ q & dy & d^2y \\ -1 & p\,dx + q\,dy & r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 + q\,d^2y \end{vmatrix}$$

Multipliant la première ligne par $-p$, la seconde par $-q$, et les ajoutant à la troisième, on a :

$$\begin{vmatrix} p & dx & 0 \\ q & dy & d^2y \\ -1-p^2-q^2 & 0 & r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 \end{vmatrix} = 0$$

ou :

$$(6) \qquad \frac{d^2y}{dx^2}\left[1+p^2+q^2\right] - \left[r + 2s\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\left[p\frac{dy}{dx} - q\right] = 0,$$

Équation différentielle du second ordre, du même type que (5).

Remarque II. — L'équation différentielle (4) ne dépend que des coefficients E, F, G du ds^2 de la surface, à toutes les surfaces pour lesquelles E, F, G sont les mêmes, c. à. d. à l'ensemble des surfaces applicables les unes sur les autres (Cours de 1ère Année, N° 302) correspond donc la même équation différentielle des géodésiques. Ce point était évident a priori : supposons en effet ces surfaces déterminées paramétriquement en fonction de deux paramètres u, v, de manière que E, F, G soient les mêmes pour toutes (N° 302, Remarque), les courbes définies sur chacune d'elles par une même équation $\varphi(u,v)=0$ s'appliqueront les unes sur les autres, et réciproquement : les géodésiques, qui, évidemment s'appliquent les unes sur les autres auront donc la même équation générale, et par suite la même équation différentielle.

Remarque III. — Si le ds^2 sur une surface est donné sous la forme :

$$(7) \qquad ds^2 = du^2 + G\,dv^2,$$

c. à d. si $E = 1$; $F = 0$; l'équation différentielle (4) des géodésiques devient :

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}v'^2 \\ Gv' & Gv'' + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}v'^2 + \frac{\partial G}{\partial u}v' \end{vmatrix} = 0$$

et on aperçoit immédiatement la solution particulière $v'=0$, c.à.d $v=$ const. En d'autres termes les courbes, en nombre simplement infini, $v=$ const sont des géodésiques ; ce ne sont pas toutes les géodésiques, qui sont en nombre doublement infini. Les courbes $u=$ const sont, puisque $F=0$ (cours de 1ère année, N° 281), les trajectoires orthogonales de la famille de géodésiques $v=$ const.

201. – La proposition réciproque de la Remarque III conduit à des propriétés de géodésiques tout à fait analogues à celles des droites dans le plan.

Considérons en effet une famille simplement infinie de géodésiques, et prenons ces lignes pour lignes de coordonnées d'une série, $v=$ const ; prenons leurs trajectoires orthogonales pour lignes coordonnées de l'autre série, $u=$ const. On aura, sur la surface

$$dS^2 = E\,du^2 + G\,dv^2, \quad \ldots\ \text{car } F=0 \text{ à cause de l'orthogonalité.}$$

Il faut que l'équation différentielle (4) des géodésiques soit vérifiée pour $v=$ const, ce qui donne, en y faisant : $v'=v''=0$ et $F=0$.

$$0 = \begin{vmatrix} E & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} \\ 0 & -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}E\frac{\partial E}{\partial v} \quad \text{c. à. d.} \quad \frac{\partial E}{\partial v} = 0.^{(1)}$$

E est donc une fonction de u seul, que je désignerai par $f^2(u)$. On a ainsi :

$$dS^2 = f^2(u)\,du^2 + G\,dv^2,$$

et en posant

$$f(u) = U; \quad \text{on a :} \quad dS^2 = dU^2 + G\,dv^2$$

les lignes $U=$ const. sont les mêmes que les lignes $u=$ const. c.à.d. les trajectoires orthogonales des géodésiques considérées ; l'arc compris sur une de ces géodésiques entre les deux courbes $U=U_0$ et $U=U_1$ sera donné par

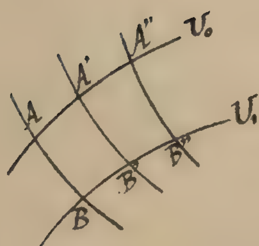
$$dS = \sqrt{dU^2 + G\,dv^2}, \quad \text{où l'on fait } dv=0, \text{ puisqu'on est sur une courbe } v= \text{const} ;$$

---

(1) car E ne peut être nul, sans quoi, sur les lignes géodésiques considérées, $v=$ const, on aurait $dS^2=0$, c'est-à-dire que l'arc de ces géodésiques serait nul.

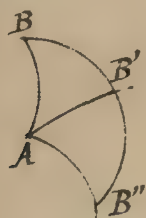
c'est-à-dire

$$ds = dV \; ; \; d'où \dots \; s = V_1 - V_0 \; .$$



Cet arc, $(V_1 - V_0)$ est donc constant, quelle que soit la géodésique considérée ; (c. à d. qu'on a $AB = A'B' = A''B'' = \dots$). C'est la généralisation d'une propriété connue des tangentes à une courbe plane et de leurs trajectoires orthogonales (développantes de la courbe).

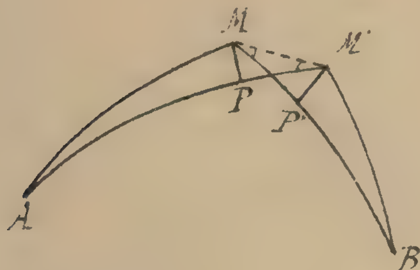
En particulier, si les géodésiques considérées passent par un même point, une de leurs trajectoires orthogonales sera un cercle de rayon infiniment petit ayant ce point pour centre, c. à. d. que :



Sur toutes les géodésiques qui passent par un même point, A, les arcs compris entre le point A et une trajectoire orthogonale quelconque (B, B', B'') de ces géodésiques, ont la même longueur ;[1] ou encore : Si, à partir d'un point A, on porte sur toutes les géodésiques passant par ce point, une même longueur, le lieu des extrémités (B, B', B'', ...) des arcs obtenus est une trajectoire orthogale des géodesiques considérées.

On reconnait une propriété des droites issues d'un point dans un plan ; on en déduit de nombreuses propriétés des géodésiques, dont nous citerons la suivante :

Si les géodésiques qui joignent deux points fixes, A et B, à un point M, variable sur une courbe, font des angles égaux avec la tangente à la courbe en M, la somme (ou la différence) des arcs géodésiques MA et MB est constante.



Soit en effet M' le point infiniment voisin de M sur la courbe ; d'après l'hypothèse les angles (marqués ⊥) BMM' et AM'M ne diffèrent que d'un infiniment petit. Menons MP trajectoire orthogonale des géodésiques issues de A ; M'P' traject. orthog. des géodésiques issues de B ; $AM' = AP$ et $BM' = BP'$, d'après ce qui précède. Pour démontrer que :

---

[1] De même : Si entre deux points A et B on peut mener une infinité de géodésiques, les arcs compris sur chacune d'elles entre les deux points, ont même longueur.

$AM + BM = AM' + BM'$, il suffira donc de prouver que $M'P = MP'$, aux infiniment petits près du second ordre par rapport à MM', c. à. d. que

$$\text{valeur pp}^{\text{ale}}\ M'P = \text{valeur pp}^{\text{ale}}\ MP'.$$

Or, dans le triangle infiniment petit MPM', où l'angle en P est droit :

$$\text{val. pp}^{\text{ale}}\ M'P = MM' \cos \widehat{MM'P}$$

de même dans le tr. $MP'M'$: . . . . val. pp^{ale} $MP' = MM' \cos \widehat{M'MP'}$

et comme les deux angles sont égaux, à un infiniment petit près, les deux valeurs principales de $M'P$ et MP' sont bien les mêmes.

C. q. f. d.

Exemples des lignes geodésiques.

---

202. Cylindres. — Prenons l'axe des y parallèle aux génératrices ; le cylindre a pour équation

$$z = f(x),$$

d'où $\quad p = f'(x); \quad q = 0; \quad r = f''(x); \quad s = t = 0.$

L'équation différentielle (6) des géodésiques est :

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(1 + f'^2(x)\right) - f''(x) f'(x) \frac{dy}{dx} = 0$$

équation où y ne figure pas, et qu'on intègre immédiatement en écrivant

$$\frac{y''}{y'} = \frac{f'f''}{1+f'^2}; \qquad \text{d'où :}$$

$$\log y' = \frac{1}{2} \log\left(1 + f'^2\right) + \log c;$$

(8). . . . . $y' = c\sqrt{1+f'^2}$;

$$y = c\int \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx + c'$$

c'est l'équation des géodésiques, en projection sur le plan des xy.

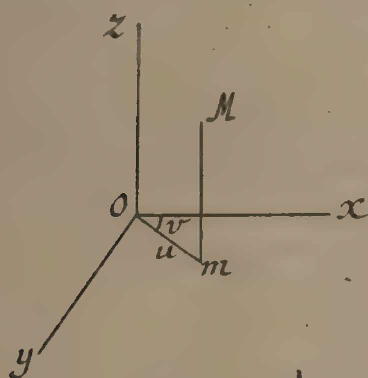
L'équation (8) conduit à une propriété géométrique de ces lignes. Les paramètres directeurs de la tangente à une géodésique sont proportionnels à dx, dy, dz, c'est-à-dire en vertu de (8) et de l'équation $z=f(x)$ de la surface, à $1, c\sqrt{1+f'^2}, f'$; le cosinus de l'angle de cette tangente avec l'axe des y est :

$$\frac{c\sqrt{1+f'^2}}{\sqrt{1+c^2(1+f'^2)+f'^2}} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$$

il est donc constant le long d'une même géodésique. Chaque géodésique coupe ainsi toutes les génératrices du cylindre sous un angle constant : les géodésiques sont donc les hélices tracées sur le cylindre (cours de 1ère année, N° 276).

Ces propriétés sont évidentes a priori : il suffit d'observer que, dans le développement du cylindre sur un plan, les géodésiques deviennent des droites, et les génératrices des droites parallèles entre elles.

203. – Surface de révolution. – Oz étant l'axe de révolution, on a pour définir la surface (cours de 1ère Année, N° 282, 1°)



$$x = u\cos v\ ; \qquad y = u\sin v\ ; \qquad z=\varphi(u);$$

la méridienne, dans le plan zox, est $z=\varphi(x)$; et :

$$E = 1+\varphi'^2(u)\ ; \quad F=0\ ; \quad G=u^2$$

L'équation différentielle (4) est ici :

$$\begin{vmatrix} 1+\varphi'^2(u) & \varphi'(u)\varphi''(u)-uv'^2 \\ u^2v' & u^2v''+2uv' \end{vmatrix} = 0, \ldots\ldots \text{c. à. d}$$

$$v''u(1+\varphi'^2)+2v'(1+\varphi'^2)-uv'\varphi'\varphi''+u^2v'^3 = 0\ .$$

L'inconnue v manque, et on a une équation de Bernoulli par rapport à l'inconnue v'. On posera donc

$$\frac{1}{v'^2} = \theta\ ; \quad \text{d'où}$$

$$-\frac{1}{2}u(1+\varphi'^2)\frac{d\theta}{du}+\theta\left[2+2\varphi'^2-u\varphi'\varphi''\right]+u^2=0,$$

équation linéaire en θ qui s'intègre sans difficulté[1] et donne ainsi :

$$\theta=\frac{1}{v'^2}=\frac{u^2(Cu^2-1)}{1+\varphi'^2(u)},$$

C étant la constante arbitraire.

Ou, en séparant les variables :

(9) $$dv=\frac{du}{u}\sqrt{\frac{1+\varphi'^2(u)}{Cu^2-1}}.$$

et finalement par une quadrature, on obtient l'équation des géodésiques :

(9bis) $$v=\int\frac{du}{u}\sqrt{\frac{1+\varphi'^2(u)}{Cu^2-1}}+C'$$

D'après la signification géométrique de u et v, cette relation est l'équation, en coordonnées polaires, des lignes géodésiques projetées sur le plan des xy.

Ainsi : la détermination des géodésiques des surfaces de révolution se ramène à une quadrature.

Interprétation géométrique. – La relation (9), qui est ce qu'on appelle une intégrale première de l'équation différentielle des lignes

---

(1) On pose pour cela, selon la méthode générale $\theta=UV$, et on annule le coefficient de U, ce qui donne :

$$-\frac{1}{2}V'u(1+\varphi'^2)+V(2+2\varphi'^2-u\varphi'\varphi'')=0$$

et .... $$\frac{1}{2}VU'u(1+\varphi'^2)=u^2$$

Par suite :

$$\frac{V'}{V}=\frac{4(1+\varphi'^2)-2u\varphi'\varphi''}{u(1+\varphi'^2)}=\frac{4}{u}-\frac{2\varphi'\varphi''}{1+\varphi'^2}$$

d'où .... $V=\frac{u^4}{1+\varphi'^2}$, ... et

$$U'(1+\varphi'^2)=\frac{2(1+\varphi'^2)}{u^3};$$

d'où .... $$U=-\frac{1}{u^2}+C$$

Finalement $$\theta=UV=\frac{Cu^2-1}{1+\varphi'^2}u^2$$

géodésiques (Voir le chapitre suivant N° 213,) peut s'écrire :

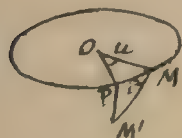
$$Cu^4 dv^2 = du^2(1+\varphi'^2(u)) + u^2 dv^2$$
$$= ds^2,$$

en appelant ds^2 le carré de l'élément d'arc sur la surface de révolution (Cours de 1ère Année, N° 282, 1°) ; d'où

(10) $ds = \sqrt{C}\, u^2 dv$, ... équation vérifiée le long d'une géodésique.

Or, soit $M(u, v)$ un point d'une géodésique, M' le point infiniment voisin $(u+du,\ v+dv)$, sur cette ligne. Menons le méridien $M'P$ qui passe par M', jusqu'à sa rencontre en P avec le parallèle du point M ; on a :

$$OM = u ; \quad \widehat{POM} = dv ;$$
$$MP = u\,dv$$



L'équation (10) s'écrit alors :

$$MM' = \sqrt{C}\, u\, MP$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{C}} = u \frac{MP}{MM'} = u \cos i ,$$

i désignant l'angle $M'MP$, sous lequel la géodésique coupe le parallèle. On a donc, tout le long d'une même géodésique :

$$u \cos i = \text{constante} ;$$

ce qui s'énonce ainsi :

Soit i l'angle sous lequel une géodésique fixe coupe le parallèle variable de rayon u ; le produit $u \cos i$ est constant le long de la géodésique. (Clairaut).

Exemple. — Géodésiques des quadriques de révolution. — La méridienne, dans le plan zox, est :

$$\frac{x^2}{A} + \frac{z^2}{B} = 1 ; \quad \text{ou } z = \sqrt{\frac{B}{A}(A - x^2)} ,$$

et, puisque la méridienne est $z = \varphi(x)$, on aura :

$$\varphi(u) = \sqrt{\frac{B}{A}(A - u^2)} ,$$

L'équation (9bis) des géodésiques est alors :

$$\int \frac{du}{u}\sqrt{\frac{A^2+(B-A)u^2}{A(A-u^2)(Cu^2-1)}} = v + \text{Const.}$$

Au premier membre l'intégrale devient elliptique si l'on pose $u^2=t$; on a ainsi :

$$\int \frac{dt}{2t}\sqrt{\frac{A^2+(B-A)t}{A(A-t)(Ct-1)}} = v + \text{Const.}$$

ou :

$$\int \frac{A^2+(B-A)t}{2t\sqrt{A}} \quad \frac{dt}{\sqrt{(A-t)(Ct-1)(A^2+(B-A)t)}} = v + \text{const.}$$

On pourra donc pousser les calculs jusqu'au bout par les fonctions elliptiques ; le polynôme sous le radical est déjà ramené au troisième ordre.

Géodésiques de l'ellipsoïde.

---

204. – L'emploi des coordonnées elliptiques (N° 182) permet de déterminer analytiquement les géodésiques de l'ellipsoïde.

A cet effet, considérons, plus généralement une surface sur laquelle le ds^2 ait pour expression :

(1) $$ds^2 = (u-v)\left[U^2du^2 + V^2dv^2\right],$$

où u et v sont les paramètres qui déterminent un point de la surface ; U une fonction de u seul, V une fonction de v seul. On peut écrire identiquement, λ désignant une constante arbitraire :

$$ds^2 = \left[\sqrt{u-\lambda}^{\,2} + \sqrt{\lambda-v}^{\,2}\right]\left[\overline{Udu}^{\,2} + \overline{Vdv}^{\,2}\right]; \ldots \text{ ou, par la formule de Lagrange}$$

$$ds^2 = \left[\sqrt{u-\lambda}\, Udu + \sqrt{\lambda-v}\, Vdv\right]^2 + \left[\sqrt{u-\lambda}\, Vdv - \sqrt{\lambda-v}\, Udu\right]^2$$

Posons :

(2) $$\begin{cases} \sqrt{u-\lambda}\, Udu + \sqrt{\lambda-v}\, Vdv = du' \\ \dfrac{Vdv}{\sqrt{\lambda-v}} - \dfrac{Udu}{\sqrt{u-\lambda}} = dv', \end{cases}$$

ce qui est possible, les deux premiers membres étant évidemment des différentielles exactes, en vertu des hypothèses faites sur U et V; il vient ainsi :

$$(3) \qquad ds^2 = du'^2 + (u-\lambda)(\lambda-v)\,dv'^2;$$

formule qui montre (N° 200, Rem. III) que les courbes v' const. sont des géodésiques. D'après (2) l'équation de ces courbes est :

$$(4) \qquad \int \frac{V dv}{\sqrt{\lambda-v}} - \int \frac{U du}{\sqrt{u-\lambda}} = \text{const};$$

et, comme λ est arbitraire, cette relation, qui contient deux constantes arbitraires, est l'équation générale des géodésiques sur la surface considérée.

205. – Application à l'ellipsoïde. – On a trouvé (N° 182) sur l'ellipsoïde :

$$(5) \qquad ds^2 = (u-v)\left[\frac{u\,du^2}{4(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)} + \frac{v\,dv^2}{4(a^2-v)(b^2-v)(v-c^2)}\right]$$

ce qui rentre dans le type (1). L'équation générale (4) des géodésiques de l'ellipsoïde est donc :

$$(6) \qquad \int \frac{v\,dv}{\sqrt{v(a^2-v)(b^2-v)(v-c^2)(\lambda-v)}} \pm \int \frac{u\,du}{\sqrt{u(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)(u-\lambda)}} = \text{const.}$$

Les intégrales auxquelles on est ainsi conduit sont hyperelliptiques.

Chapitre III.

Systèmes d'équations différentielles.

I. _ Généralités; Théorème de Cauchy.

206. _ L'intégration d'un système de n équations différentielles à n inconnues, fonctions d'une seule variable, x, peut se ramener à celle d'une seule équation. Soit par exemple $(n=2)$ le système :

$$(1) \qquad f_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots \frac{d^{p_1}y}{dx^{p_1}}, z, \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^{q_1}z}{dx^{q_1}}\right) = 0$$

$$(2) \qquad f_2\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots \frac{d^{p_2}y}{dx^{p_2}}, z, \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^{q_2}z}{dx^{q_2}}\right) = 0$$

Pour éliminer y, dérivons l'équation (1) p_2 fois et l'équation (2) p_1 fois ; nous obtenons ainsi, en tout, p_1+p_2+2 équations, contenant les inconnues, y, z et leurs dérivées jusqu'à l'ordre p_1+p_2, pour y, et M pour z, M étant le plus grand des nombres p_2+q_1 et p_1+q_2. Entre ces p_1+p_2+2 équations, éliminons les p_1+p_2+1 inconnues $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots \frac{d^{p_1+p_2}y}{dx^{p_1+p_2}}$, nous obtenons une équation différentielle en z, d'ordre M. Celle-ci une fois intégrée, z et ses dérivées sont connus, et les équations entre lesquelles on vient de faire l'élimination, (moins une), résolues par rapport à y et à ses dérivées, feront connaître ces quantités ; on obtient donc y sans nouvelle intégration.

207. _ Si l'on a un système de 3 équations différentielles à trois inconnues, y, z, u, soient :

$$\begin{matrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{matrix}$$

les ordres de la plus haute dérivée de y, z, u dans chacune des trois équations : l'ordre de l'équation différentielle finale par rapport à une des inconnues, lorsqu'on élimine les deux autres, sera le plus grand des nombres :

$$p_i + q_j + r_k,$$

i, j, k étant trois indices indifférents :

Réduction à la forme canonique.

208. — On peut ramener un système à un autre, contenant plus d'inconnues, mais ne renfermant que des dérivées du premier ordre. Soit par exemple le système :

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots \frac{d^p y}{dx^p}, z, \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^q z}{dx^q}\right) = 0$$

$$f_1\left(x, y, \dots\dots\dots \frac{d^r y}{dx^r}, z, \dots\dots \frac{d^s z}{dx^s}\right) = 0$$

Supposons, pour fixer les idées, $p > r$ et $q < s$; prenons pour inconnues auxiliaires les suivantes :

$$(E) \quad \begin{matrix} \dfrac{dy}{dx} = y' ; & \dfrac{dy'}{dx} = y'' ; \dots\dots & \dfrac{dy^{(p-2)}}{dx} = y^{(p-1)} \\ \dfrac{dz}{dx} = z' ; & \dfrac{dz'}{dx} = z'' ; \dots\dots & \dfrac{dz^{(s-2)}}{dx} = z^{(s-1)} \end{matrix}$$

les équations primitives s'écrivent :

$$(E') \quad \begin{matrix} f\left(x, y, y', \dots y^{(p-1)}, \dfrac{dy^{(p-1)}}{dx}, z, z', \dots\dots z^{(q)}\right) = 0 \\ f_1\left(x, y, y', \dots\dots\dots y^{(r)}, z, z', \dots z^{(s-1)}, \dfrac{dz^{(s-1)}}{dx}\right) = 0 ; \end{matrix}$$

et les équations (E) et (E') forment un système de $p+s$ équations, entre

les $p+s$ inconnues $y, y', \dots y^{(p-1)}, z, z', \dots z^{(s-1)}$, où n'interviennent, avec ces inconnues, que leurs dérivées premières.

Soit donc, d'une manière générale :

$$(3) \qquad f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \dots \dots f_n = 0$$

un système de n équations entre la variable x, n fonctions inconnues, $y, z, u, \dots$ et leurs dérivées premières. En général, on pourra résoudre ces n équations par rapport aux n dérivées, $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \dots$ et on aura le système dit canonique :

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1 (x, y, z, u, \dots)$$

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_2 (x, y, z, u, \dots)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Si on ne peut tirer des équations (3) une des dérivées, par exemple $\frac{dz}{dx}$, en fonction de $x, y, z, u, \dots$, c'est qu'en éliminant entre ces équations les $(n-1)$ autres dérivées, on arrive à une équation ne contenant pas $\frac{dz}{dx}$, et qui par suite, est de la forme :

$$(4) \qquad \Phi(x, y, z, u, \dots) = 0$$

Elle pourra remplacer une des équations (3), par exemple $f_n = 0$. On tirera de (4) une des inconnues en fonction des autres et de x,

$$y = \psi(x, z, u, \dots); \text{ d'où}$$

$$\frac{dy}{dx} = \psi'_x + \psi'_z \frac{dz}{dx} + \psi'_u \frac{du}{dx} + \dots$$

Substituant ces valeurs dans $f_1, f_2, \dots f_{n-1}$, on aura un nouveau système à $n-1$ inconnues, $z, u, \dots$ ne renfermant que les dérivées premières. Si on peut en tirer ces dérivées, on l'aura réduit à la forme canonique ; sinon on le ramènera à un système à $n-2$ inconnues, et ainsi de suite. D'ailleurs une équation du premier ordre à une inconnue forme un système canonique.

On peut donc toujours ramener un système d'équations différentielles à la forme canonique ; on appelle ordre d'un tel système le nombre des équations qu'il renferme, c'est-à-dire celui

des fonctions inconnues.

Remarque. - La réduction à la forme canonique n'a qu'un avantage purement théorique; elle simplifie et précise les raisonnements à faire sur les systèmes d'équations différentielles, mais elle est généralement inutile pour l'intégration d'un système

Théorème de Cauchy.

209. - L'intégrale générale d'un système canonique d'ordre n renferme n constantes arbitraires. Soit par exemple ($n = 3$) le système :

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x, y, z, u)$$

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_2(x, y, z, u)$$

$$\frac{du}{dx} = \varphi_3(x, y, z, u)$$

On peut se donner arbitrairement, pour $x = x_0$, les valeurs des inconnues; soient y_0, z_0, u_0 ces valeurs. Le système proposé fera connaître, pour $x = x_0$, les valeurs de $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx}$, et, en dérivant, celles de toutes les dérivées successives de y, z, u. On aura donc, par la formule de Taylor :

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \left(\frac{x - x_0}{1.2}\right)^2 + \cdots$$

$$z = z_0 + \cdots\cdots$$

$$u = u_0 + \cdots\cdots$$

Les développements de y, z, u dépendent ainsi des trois constantes arbitraires y_0, z_0, u_0. Pour rendre ce raisonnement rigoureux, il faut montrer que les séries précédentes sont convergentes; on aura ainsi prouvé, non seulement la proposition sur le nombre des constantes, mais encore l'existence de l'intégrale générale d'un système.

Or c'est là précisément ce qu'a établi Cauchy: pour abréger, nous admettrons le théorème de Cauchy, dont la démonstration est assez longue, et nous nous contenterons de l'énoncer.

210. – Théorème de Cauchy. – Soit un système canonique :

$$(S)\qquad \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \varphi_1(x, y, z, u, \dots) \\ \frac{dz}{dx} &= \varphi_2(x, y, z, u, \dots) \\ \frac{du}{dx} &= \varphi_3(x, y, z, u, \dots) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Si les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots,$ considérées comme fonctions des variables indépendantes $x, y, z, u, \dots,$ sont holomorphes lorsque ces variables restent respectivement à l'intérieur de cercles de même rayon, R, décrits des points $x = a$, $y = b$, $z = c, \dots$ comme centres, le système (S) est vérifié par des fonctions $y, z, u, \dots,$ de la variable x, qui prennent, pour $x = a$, les valeurs $b, c, \dots,$ et qui sont holomorphes quand la variable x reste à l'intérieur d'un cercle de centre a.

Le rayon maximum, R', de ce cercle n'est pas connu d'une manière précise ; en général il est inférieur à R ; c'est-à-dire que les intégrales $y, z, \dots$ considérées ne sont sûrement holomorphes que si x reste à l'intérieur d'un cercle de centre a, et dont le rayon R' est inférieur à R : elles peuvent donc avoir des points critiques dans la couronne comprise entre les deux cercles de rayons R et R'.

211. – Remarque. – Appelons système d'intégrales de (S) l'ensemble des intégrales $y, z, u, \dots$ qui, pour $x = a$, prennent des valeurs données, $b, c, \dots$ Laissons a fixe, et donnons à $b, c, \dots$ d'autres valeurs, $b_1, c_1, \dots$; nous obtenons un nouveau système d'intégrales, $y_1, z_1, u_1, \dots,$ qui, si les conditions du théorème précédent sont vérifiées, sont des fonctions holomorphes de x dans un cercle de centre $x = a$ et de rayon R'_1. Ce rayon ne sera pas généralement le même que R' ; soit, par exemple $R'_1 < R'$; les intégrales $y_1, z_1, u_1, \dots$ pourront ne pas être holomorphes et avoir des points critiques dans une région (la couronne comprise entre les cercles de rayons R'_1 et R', de centres a) où les intégrales $y, z, u, \dots$ sont sûrement holomorphes ; c'est-à-dire que les points critiques d'un système d'intégrales dépendent des valeurs des constantes qui caractérisent ce système. C'est ce qu'on exprime en disant que les points critiques des intégrales d'un système d'équations différentielles ne sont généralement pas fixes.

Il y a toutefois un cas important où ces points critiques sont fixes ; c'est celui des systèmes linéaires.

On nomme systèmes canoniques linéaires ceux où les inconnues figurent linéairement ; ainsi le système linéaire d'ordre deux est de la forme :

$$\frac{dy}{dx} = L_1 y + M_1 z + N_1$$
$$\frac{dz}{dx} = L_2 y + M_2 z + N_2$$

$L_1, M_1, \ldots N_2$ étant des fonctions de la variable x, seule.

Pour ce cas particulier, la démonstration de Cauchy établit que :

Les intégrales d'un système linéaire sont holomorphes dans tout cercle du plan de la variable x qui ne contient aucun point critique des fonctions L, M, N, c'est-à-dire que leurs points critiques ne peuvent être que les points critiques de ces fonctions.

Application à l'équation différentielle générale.

212. – D'après le N°. 208, on peut ramener à un système canonique l'équation différentielle générale d'ordre n, à une inconnue :

(1) $$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

Il suffit de poser :

$$\frac{dy}{dx} = y'$$
$$\frac{dy'}{dx} = y''$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dy^{(n-2)}}{dx} = y^{(n-1)}$$

d'où :

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f\left(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}\right)$$

et on a ainsi un système canonique à n inconnues, $y, y', \ldots y^{(n-1)}$. Il résulte dès lors du théorème général que l'équation (1) admet une

intégrale jouissant des propriétés suivantes : 1° Pour $x = a$, elle prend, ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées, des valeurs données, $b, c, \ldots$; 2° elle est holomorphe dans un cercle de centre a. Il faut toutefois que le système de valeurs $x = a$, $y = b$, $y' = c, \ldots$ ne soit pas un point critique pour $f(x, y, y', \ldots y^{(n-1)})$, considéré comme fonction des $(n+1)$ variables indépendantes $x, y, y', \ldots y^{(n-1)}$.

Une équation linéaire par rapport à y et à ses dérivées, de la forme :

$$(2) \qquad A\frac{d^ny}{dx^n} + B\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + L\frac{dy}{dx} + My = N,$$

où $A, B, \ldots L, M, N$ sont des fonctions de x seul, se ramène au système canonique linéaire :

$$\frac{dy}{dx} = y'\,; \qquad \frac{dy'}{dx} = y'' \ldots\ldots \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = -\left[\frac{B}{A}y^{(n-1)} + \cdots + \frac{L}{A}y' + \frac{M}{A}y\right] + \frac{N}{A}.$$

Donc, d'après le N° 211, les intégrales de l'équation (2) n'auront pas d'autres points critiques que ceux des coefficients $\frac{B}{A}, \ldots \frac{M}{A}, \frac{N}{A}$; c'est-à-dire 1° les points critiques des fonctions de x : $A, B, \ldots L, M, N$;

2° les points où $A(x)$ s'annule.

Par exemple, si $A, B, \ldots L, M, N$ sont des polynômes entiers en x, l'intégrale générale de (2) ne pourra avoir d'autres points critiques à distance finie que les zéros de A.

Intégrales premières d'un système.

213.- En vertu du théorème général du N° 210, étant donné un système canonique d'ordre n :

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \ldots\ldots y_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \ldots y_n) \end{cases}$$

les solutions générales, $y_1, y_2, \ldots y_n$ doivent renfermer n constantes arbitraires ; on a donc :

$$(4)\qquad \begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, c_1, c_2, \ldots c_n) \\ y_2 &= \varphi_2(x, c_1, \ldots\ldots c_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x, c_1, \ldots\ldots c_n) \end{aligned}$$

Si on résout ces équations par rapport aux constantes $c_1, c_2, \ldots c_n$, il vient :

$$(5)\qquad \begin{aligned} c_1 &= F_1(x, y_1, y_2 \ldots y_n) \\ c_2 &= F_2(x, y_1, \ldots\ldots y_n) \\ c_n &= F_n(x, y_1, \ldots\ldots y_n) \end{aligned}$$

ce qui est une forme équivalente de la solution générale (4).

Chacune des fonctions $F_1, F_2, \ldots F_n$ se nomme une intégrale première du système (3); ces n fonctions sont distinctes, c'est-à-dire ne sont liées par aucune relation : car si F_n était fonction de $F_1, F_2, \ldots F_{n-1}$, les équations (5) montrent que la constante C_n serait déterminée quand $C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$ seraient donnés, en sorte que la solution générale du système ne contiendrait que $n-1$ constantes.

D'une manière générale, on nomme intégrale première toute fonction de $x, y_1, \ldots y_n$ qui reste constante quand on y remplace $y_1, y_2, \ldots y_n$ par les fonctions de x les plus générales satisfaisant au système proposé : il est clair, d'après cela, que toute fonction de deux ou plusieurs intégrales premières est encore une intégrale première. Comme d'ailleurs le système ne saurait admettre plus de n intégrales premières distinctes, (sinon, il y aurait, dans la solution générale, plus de n constantes arbitraires), la forme générale des intégrales premières est évidemment

$$f(F_1, F_2, \ldots F_n)$$

f étant une fonction arbitraire.

On reviendra sur ces intégrales dans la théorie des équations aux dérivées partielles, où elles jouent un rôle fondamental; observons seulement ici que la connaissance d'une intégrale première permet d'abaisser d'une unité l'ordre du système. Car si on a : $F(x, y_1, \ldots y_n) = \text{const}$, on tirera de cette équation la valeur de y_n, en fonction de $x, y_1, \ldots y_{n-1}$, valeur qu'on portera dans les $(n-1)$ premières équations du système (3), ce qui donnera un

système d'ordre n-1, les inconnues étant $y; y_1, \dots y_{n-1}$. De même, la connaissance de k intégrales premières distinctes permet d'abaisser l'ordre du système de k unités.

Dans le cas d'une seule équation différentielle d'ordre n, on nommera intégrale première toute fonction de $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ qui reste constante quand on remplace y par la fonction de x la plus générale satisfaisant à l'équation proposée: car cette équation se ramène (N° 214) à un système d'ordre n, où les inconnues sont $y, y'\left(=\frac{dy}{dx}\right), \dots y^{n-1}\left(=\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$.

Par exemple, pour une équation du second ordre, une intégrale première sera de la forme $F(x, y, y') = C$.

Étude des solutions d'un système.

214. – Soit, par exemple, un système d'ordre deux:

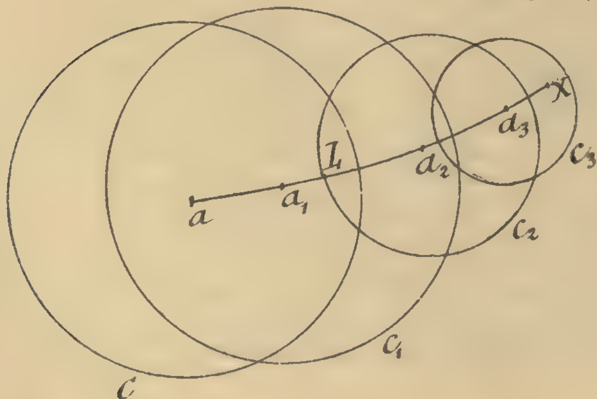
$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x, y, z); \qquad \frac{dz}{dx} = \varphi_2(x, y, z);$$

si le système de valeurs a, b, c n'est pas critique pour les fonctions φ_1 et φ_2, le système admettra deux intégrales holomorphes, y et z, égales à b et c, pour $x = a$.

Proposons-nous de calculer les valeurs que prennent ces intégrales en un point $x = X$, du plan de la variable x, lorsque cette variable va de a à X en suivant une ligne donnée, L.

Les deux fonctions y et z sont représentées, aux environs du point $x = a$, par des séries

$$y = b + \lambda_1 (x - a) + \dots$$
$$z = c + \mu_1 (x - a) + \dots$$



qui sont convergentes dans un cercle C, de centre a; elles donnent donc les valeurs de y, z pour tous les points de la ligne L intérieurs à C.

Soit a_1 un de ces points, voisin de la circonférence

du cercle C ; en a_1, y et z ont les valeurs b_1 et c_1, et sont représentées, aux environs de $x = a_1$; par des séries :

$$y = b_1 + \lambda'_1 (x - a_1) + \cdots$$
$$z = c_1 + \mu'_1 (x - a_1) + \cdots$$

convergentes dans un cercle C_1, de centre a_1. Elles font connaître y et z le long d'un nouveau tronçon de la ligne L ; et, en continuant ainsi jusqu'à ce qu'on arrive au point X, on obtiendra en ce point les valeurs cherchées de y et de z.

Mais il peut se faire que les rayons de cercles successifs, $C, C_1, C_2, \dots$ tendent vers zéro, quand x tend vers un point ξ de la ligne L : en ce cas, on ne pourra prolonger les fonctions y et z sur cette ligne au-delà du point ξ, à moins d'une étude spéciale dans chaque cas particulier. La méthode générale tombe alors en défaut.

Si cette circonstance se présente, désignons par η et ζ les valeurs vers lesquelles tendent y et z, quand x tend vers ξ en suivant la ligne L, de a en ξ (1) : le système de valeurs ξ, η, ζ est critique pour l'une au moins des fonctions $\varphi_1(x, y, z)$ et $\varphi_2(x, y, z)$, sinon on pourrait tracer autour du point $x = \xi$ un nouveau cercle, de rayon non nul, à l'intérieur duquel les solutions y et z du système, qui pour $x = \xi$ ont les valeurs η et ζ, seraient encore holomorphes, ce qui permettrait de prolonger ces fonctions sur la ligne L, au-delà du point $x = \xi$.

La méthode ne peut donc être en défaut que si l'un des systèmes de valeurs successifs de x, y, z le long de la ligne L est critique pour une des fonctions φ_1, φ_2, ou si un point de la ligne L est un point singulier essentiel pour y ou z. Si ces cas ne se présentent pas, on aura prolongé y et z non seulement le long de L, mais dans toute la région du plan recouverte par les cercles successifs $C, C_1, C_2, \dots$; à l'intérieur de cette région, les fonctions y et z, solutions du système proposé et égales à b et c pour $x = a$, sont des fonctions holomorphes de x.

---

(1) Cela suppose que η et ζ existent, c. à. d. que le point $x = \xi$ n'est pas un point singulier essentiel pour les fonctions y et z.

II. — Application du Théorème de Cauchy.

215. — On a admis sans démonstration (N° 81, 1°) que la fonction inverse de l'intégrale elliptique de première espèce, c'est-à-dire la fonction z, de u, définie par l'équation différentielle

(1) $$\frac{dz}{du} = \sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}$$

était monodrome et méromorphe dans tout le plan de la variable u.

Le théorème de Cauchy permet d'établir comme il suit cette importante proposition.

Lemme. — La fonction z, de u, n'a pas de point singulier essentiel à distance finie dans le plan de la variable u.

Soit en effet $z(u)$ une solution de l'équation (1); je dis que le point $u = \alpha$ ne peut être un point singulier essentiel de z, c. à. d. un point d'indétermination. Considérons à cet effet une autre solution $z_1(u)$ de l'équation (1), qui, pour $u = \alpha$, prenne une valeur arbitrairement choisie β, telle toutefois que $4\beta^3 - g_2\beta - g_3$ soit $\gtrless 0$; d'après le théorème de Cauchy, $z_1(u)$ sera holomorphe dans un certain cercle ayant pour centre le point $u = \alpha$. Or les relations

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3} \qquad \frac{dz_1}{du} = \sqrt{4z_1^3 - g_2 z_1 - g_3}$$

donnent :

$$\frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} - \frac{dz_1}{\sqrt{4z_1^3 - g_2 z_1 - g_3}} = 0,$$

ce qui est, entre z et z_1, l'équation d'Euler (N° 184): z et z_1 sont donc liés par une relation algébrique (du second ordre en z, d'après la formule (5) du N° 186) et par suite, pour $u = \alpha$, c'est-à-dire pour $z_1 = \beta$, la fonction z n'est pas indéterminée[1]. C. Q. F. D.

216. — Cela posé, reprenons l'équation différentielle :

[1] Plus généralement une fonction algébrique d'une variable n'a pas de point singulier essentiel. En effet, une équation algébrique de degré quelconque, même supérieur à deux, $f(x, y) = 0$ donne pour y, quelque soit x, des valeurs finies ou infinies, mais jamais indéterminées.

$$(2) \qquad \frac{dz}{du} = 2\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)},$$

où e_1, e_2, e_3 sont supposés distincts.

Soient u_0 et z_0 deux constantes; pour $z = z_0$ (z_0 n'étant égal à aucune des racines e_α), le radical $\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}$ a deux valeurs; choisissons arbitrairement l'une d'elles que nous désignerons par $\sqrt{Z_0}$. Le théorème fondamental sur l'existence des intégrales (N° 210) nous apprend que l'équation (2) admet une solution, z, qui se réduit à z_0 pour $u = u_0$, le radical $\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}$ prenant en même temps la valeur $\sqrt{Z_0}$; et cette solution est fonction holomorphe de u dans un cercle de centre u_0.

Suivons de proche en proche la variation de cette fonction quand la variable u se déplace à partir du point $u = u_0$: d'après le théorème fondamental et le N° 214, un point, u_1, ne pourra être critique pour la fonction z, que si c'est un point singulier essentiel de z, cas à écarter d'après le Lemme, ou si z prend en ce point une valeur, z_1, tel que le système (u_1, z_1) soit critique pour le second membre de l'équation (2), considéré comme fonction des variables indépendantes u et z. Or u ne figure pas au second membre de (2), qui est le radical $\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}$, et n'a comme points critiques, en z, que les valeurs $z = e_1, e_2, e_3$ et ∞. Donc les seuls points critiques possibles de la fonction z, de u, seront les points $u_1, u_2, \ldots$ où cette fonction prend une des valeurs e_1, e_2, e_3, ∞. Examinons-les successivement.

1°. Si, pour $u = u_1$, z devient égal à e_1, je dis que le point u_1 ne sera pas critique. Posons en effet

$$z = e_1 + t^2;$$

l'équation (2) devient

$$\frac{dt}{du} = \sqrt{(e_1 - e_2 + t^2)(e_1 - e_3 + t^2)};$$

Or le système de valeurs $(u = u_1, t = 0)$ n'est pas critique pour le nouveau second membre puisque le radical ne s'annule pas pour $t = 0$ à cause de l'hypothèse que e_1, e_2, e_3 sont distincts. Il en résulte que u_1 est un point ordinaire pour t et aussi pour $z = e_1 + t^2$.

2° Si, pour $u = u_1$, z devient infini, je dis que le point u_1 est un pôle de z. Posons en effet :

$$z = \frac{1}{t^2}\,;$$

l'équation (2) devient, après division des deux membres par $\frac{1}{t^3}$:

$$(5)\qquad -2\frac{dt}{du} = 2\sqrt{(1-e_1t^2)(1-e_2t^2)(1-e_3t^2)}$$

Là encore, le radical ne s'annule pas pour $t = 0$; il en résulte que la solution t, qui se réduit à 0 pour $u = u_1$, est fonction holomorphe de u autour du point u_1. Donc $z = \frac{1}{t^2}$ est méromorphe autour de ce point, qui est un pôle de z.

Ainsi, la fonction z, de u, n'admet, dans le plan de la variable u, pas d'autres points critiques que des pôles ; c'est donc, par définition, une fonction méromorphe de u.

On a vu, aux N.os 80 et 81, qu'en admettant cette propriété, on établit que z est une fonction elliptique de u.

Remarque. – Cette démonstration ne suppose nullement que $e_1 + e_2 + e_3$ soit nul.

217. – Généralisation. – Si le polynôme sous le radical est du quatrième degré au lieu d'être du troisième, ces résultats subsistent. Soit en effet l'équation différentielle

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{A(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)} = \sqrt{Z}\,;\ \ldots.(a_i \gtrless a_j)$$

on voit, comme plus haut, que la fonction z, de u, (qui n'a pas de point singulier essentiel à distance finie[1]) ne peut cesser d'être holomorphe que pour les points $u = u_1$ où elle devient infinie, ou égale à une des racines a_i. Or 1° si pour $u = u_1$, $z = a_1$, on voit que u_1 n'est pas critique en faisant la substitution $z = a_1 + t^2$; 2° si pour $u = u_1$, $z = \infty$, on voit que u_1 est pôle de z en faisant la substitution $z = \frac{1}{t}$.

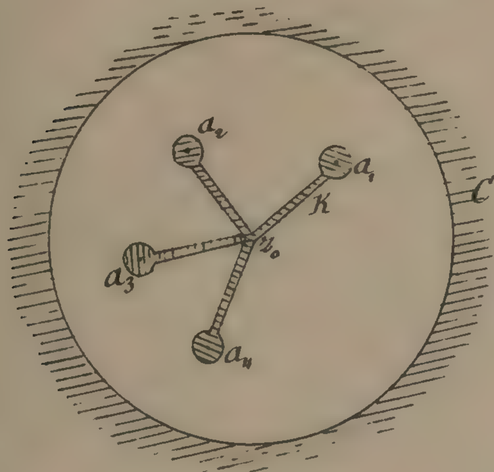
De plus z est encore une fonction elliptique de u. On le montre en établissant, exactement comme au N.° 80, que les valeurs de $u = u_0 + \int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{Z}}$, qui correspondent à une valeur donnée de z sont comprises dans les formules :

---

[1] La démonstration de ce point est la même qu'au N.° 215, on s'appuie toujours sur l'intégrale algébrique de l'équation d'Euler.

(6) $$u = u_0 + 2m_1 A_1 + 2m_2 A_2 + 2m_3 A_3 + 2m_4 A_4 + \begin{cases} V \\ 2A_1 - V \end{cases} \quad \text{avec } m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0$$

A_1, A_2, A_3, A_4 sont les intégrales $\int \frac{dz}{\sqrt{Z}}$ prises le long des droites qui joignent le point arbitrairement choisi, z_0, du plan de la variable z, aux points $z = a_1$, $z = a_2$, $z = a_3$, $z = a_4$; V est la même intégrale prise le long du segment rectiligne $z_0 z$. On a d'ailleurs entre A_1, A_2, A_3, A_4 une relation importante.



Considérons en effet, dans le plan de la variable z, un cercle C, de rayon très grand décrit de z_0 comme centre, et un contour K formé par les lacets a_1, a_2, a_3, a_4 : entre ces deux contours (partie non ombrée), la fonction

$$\sqrt{A(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)} = \sqrt{Z}$$

est holomorphe (cours de 1ère année, p. 73, 4°) ; donc, en vertu du théorème de Cauchy étendu (N° 51) on a :

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \int_K \frac{dz}{\sqrt{Z}}$$

Or, si le rayon de C grandit au-delà de toute limite, $\int_C$ tend vers zéro, car $\lim \frac{z}{\sqrt{Z}} = 0$, pour z infini (Lemme II, N° 69) ; $\int_K$ est donc nul, c'est-à-dire que l'on a :

(7) $$2A_1 - 2A_2 + 2A_3 - 2A_4 = 0.$$

Cela posé les formules (6) s'écrivent, puisque $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0$:

$$u = u_0 + 2m_1(A_1 - A_4) + 2m_2(A_2 - A_4) + 2m_3(A_3 - A_4) + \begin{cases} V \\ 2A_1 - V \end{cases}$$

ou en tenant compte de (7) :

$$u = u_0 + 2m_1(A_1 - A_4) + 2m_2(A_2 - A_4) - 2m_3\left[A_1 - A_4 - (A_2 - A_4)\right] + \begin{cases} V \\ 2A_1 - V \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$u = u_0 + 2\mu_1(A_1 - A_4) + 2\mu_2(A_2 - A_4) + \begin{cases} V \\ 2A_1 - V \end{cases};$$

$\mu_1 = m_1 - m_3$ et $\mu_2 = m_2 - m_3$ étant des entiers quelconques. Il résulte de là, comme au N° 81 que z est une fonction elliptique de u, les périodes étant $2(A_1 - A_4)$ et $2(A_2 - A_4)$; et que cette fonction est d'ordre deux, puisqu'à une valeur de z correspondent, à des périodes près, des valeurs de u.

Ainsi, la solution générale, z, de l'équation différentielle

$$(8) \qquad \frac{dz}{du} = \sqrt{Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E}$$

est une fonction elliptique de u, du second ordre.

Remarque. — Si on prend sous le radical, dans l'équation ci-dessus, (8) un polynôme, Z, d'ordre supérieur à quatre, on ne peut plus établir que z est fonction monodrome de u.

On verrait bien, comme plus haut, que les points $u = u_1$, pour lesquels la fonction z devient égale à une des racines du polynôme Z ne sont pas des points critiques; mais pour les points $u = u_1$, où z devient infinie, le raisonnement ci-dessus est inapplicable, c'est-à-dire que le point u_1 n'est pas un pôle de z: Posons en effet

$z = \frac{1}{t}$, ou $z = \frac{1}{t^2}$, ou plus généralement $z = \frac{1}{t^h}$, h étant entier et positif; l'équation (8) devient, en supposant Z de degré n en z:

$$-h\frac{dt}{du} = t^{h+1}\sqrt{\frac{A}{t^{hn}} + \frac{B}{t^{h(n-1)}} + \cdots}$$

$$= t^{h+1-\frac{hn}{2}}\sqrt{A + Bt^h + \cdots}$$

Or le second membre est infini pour $t = 0$, quel que soit l'entier positif h, dès que n est supérieur à quatre; on ne peut donc plus dire que la solution t, qui se réduit à zéro pour $u = u_1$, soit holomorphe autour du point u_1, c'est-à-dire que ce point n'est pas un pôle de z.

Chapitre IV.

Équations linéaires.

I. – Généralités.

218. – On appelle équations linéaires celles dans lesquelles la fonction inconnue et ses dérivées n'entrent qu'au premier degré et ne sont pas multipliées entre elles ; leur forme générale est :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots\dots + T\frac{dy}{dx} + Uy = V\,;$$

$P, \dots T, U, V$ étant des fonctions de x seul.

L'équation est dite sans second membre si $V = 0$, c'est-à-dire si elle est non seulement linéaire, mais homogène, par rapport à y et à ses dérivées.

D'après cela, l'équation linéaire sans second membre rentre dans le troisième cas de réduction (N° 193) et peut se ramener à l'ordre $(n-1)$ par la substitution $y = e^z$; mais l'avantage est généralement illusoire, la nouvelle équation étant plus compliquée que l'ancienne, et, surtout n'ayant plus la forme linéaire.

Exemple. – L'équation linéaire du second ordre sans second membre :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0\,,$$

si l'on pose $y = e^z$, devient :

$$z'' + z'^2 + Pz' + Q = 0\,,$$

équation de Riccati, quand on prend z' pour inconnue. On ne saura

l'intégrer que si on a une solution ; mais nous verrons plus loin (N° 224) que l'équation linéaire du second ordre s'intègre également, et avec simplicité, si on en connaît une solution. La transformation n'a donc pas d'avantage.

Equations linéaires sans second membre.

---

219. – Soit l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^ny}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + T\frac{dy}{dx} + Vy = 0\,;$$

si nous désignons, pour un instant, le premier membre par $F(y)$, on a identiquement, grâce à la forme linéaire et homogène :

$$F(Cy) = CF(y), \text{ si } C \text{ est une constante;}$$
$$F(y_1 + y_2) = F(y_1) + F(y_2).$$

Il en résulte que si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation (1), $C_1 y_1$ et $C_2 y_2$ sont aussi des solutions (C_1 et C_2 = constantes); ainsi que $C_1 y_1 + C_2 y_2$; et en général si $y_1, y_2, y_3, \ldots$ sont des solutions, $C_1 y_2 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \cdots$ en sera une autre.

220. – Théorème fondamental. – On peut déterminer n solutions, $y_1, y_2, \ldots y_n$, telles q^ue toutes les autres soient de la forme : $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$.

En effet le théorème est vrai pour $n = 1$; car l'équation (1) est alors :

$$\frac{dy}{dx} + Py = 0\,; \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dy}{y} = -Pdx$$

$$\log y = -\int Pdx + \log C_1$$

$$y = C_1 e^{-\int Pdx}\,; \text{ ou } y = C_1 y_1$$

Démontrons maintenant que le théorème est vrai pour une valeur de n s'il est vrai pour la valeur $n-1$.

Soit y_1 une solution quelconque de (1) ; posons $y = Cy_1$, C étant la nouvelle inconnue ; on a :

$$y = Cy_1 \ ; \ \ y' = C'y_1 + Cy_1' \ ; \ \ y'' = C''y_1 + 2C'y_1' + Cy_1'' \ ; \ \ldots \text{ etc},$$

expressions linéaires et homogènes en $C, C', C'', \ldots$ substituant ces valeurs dans (1), on obtiendra donc une équation linéaire et homogène en $C, C', C'', \ldots C^{(n)}$. Cette équation ne renfermera pas de terme en C : car le coefficient de C est :

$$y_1^{(n)} + Py_1^{(n-1)} + \ldots\ldots + Ty_1' + Uy_1 \ ,$$

ce qui est nul, puisque y_1 est solution de (1). L'équation différentielle en C est donc de la forme :

$$C^{(n)} + P_1 C^{(n-1)} + \ldots + S_1 C'' + T_1 C' = 0,$$

équation linéaire et homogène d'ordre $n-1$ en C'. Mais le théorème à démontrer étant vrai pour l'ordre $n-1$, l'intégrale générale est :

$$C' = C_2 u_2 + C_3 u_3 + \cdots + C_n u_n \ \ldots\ldots \left(C_2, \ldots C_n \text{ étant des constantes arbitraires} \right)$$

d'où

$$C = C_2 \int u_2 dx + \cdots + C_n \int u_n dx + C_1$$

et

$$y = Cy_1 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

Telle est l'intégrale générale de (1) ; $C_1 \ldots C_n$ sont des constantes arbitraires, $y_1, y_2, \ldots y_n$ des fonctions de x. Les y sont aussi des solutions de (1), car si on fait $C_1 = C_3 = C_4 = \ldots = C_n = 0$ et $C_2 = 1$, on a $y = y_2$. Le théorème fondamental est donc complètement établi.

Corollaire. – Entre $(n+1)$ solutions d'une équation linéaire et homogène d'ordre n, il y a au moins une relation linéaire et homogène.

221. – On déduit de là la solution du problème suivant :

Condition nécessaire et suffisante pour que $n+1$ fonctions de x : $y_1, y_2, \ldots y_{n+1}$ soient liées par une relation linéaire et homogène :

$$(2) \qquad C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_{n+1} y_{n+1} = 0 \ ,$$

les C étant des constantes, non nulles simultanément.

Dérivons l'identité (2) ; il vient successivement :

$$(3)\qquad \begin{aligned} &c_1 y_1' + c_2 y_2' + \cdots\cdots + c_{n+1} y_{n+1}' = 0 \\ &c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + \cdots\cdots\cdots\cdots = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)} + \cdots\cdots\cdots\cdots = 0 \end{aligned}$$

L'équation (2) et les n équations dérivées (3) établissent, entre les $(n+1)$ constantes $c_1, c_2, \ldots c_{n+1}$, $(n+1)$ relations linéaires et homogènes ; les c n'étant pas tous nuls, le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \cdots & y_{n+1} \\ y_1' & y_2' \cdots\cdots & \\ \vdots & & \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} \cdots & y_{n+1}^{(n)} \end{vmatrix}$$

est nécessairement nul.

Je dis maintenant que la condition $\Delta = 0$ est suffisante. Elle exprime en effet que y est solution de l'équation différentielle, linéaire et homogène, et d'ordre n en y :

$$\begin{vmatrix} y & y_2 \cdots\cdots & y_{n+1} \\ y' & y_2' \cdots\cdots & y_{n+1}' \\ \vdots & \vdots & \\ y^{(n)} & y_2^{(n)} \cdots & y_{n+1}^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

D'ailleurs $y_2, y_3, \ldots y_{n+1}$ sont aussi des solutions, car si on fait $y = y_2$, le déterminant a deux colonnes identiques et s'annule.

On a ainsi $(n+1)$ solutions : $y_1, y_2, \ldots y_{n+1}$ d'une équation différentielle d'ordre n, linéaire et homogène : elles sont donc liées (corollaire du N° 220) par une relation linéaire et homogène.

La condition nécessaire et suffisante cherchée est ainsi : $\Delta = 0$

222. — On a vu que les solutions de l'équation (1) sont comprises dans la formule

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n ;$$

$y_1, y_2, \ldots y_n$ étant des solutions convenablement choisies : je dis qu'il

n'existe entre elles aucune relation linéaire et homogène. Car si on avait :

$$y_n = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_{n-1} y_{n-1} ,$$

on aurait, en portant cette valeur dans l'expression de y :

$$y = (C_1 + \lambda_1 C_n) y_1 + \cdots + (C_{n-1} + \lambda_{n-1} C_n) y_{n-1} ,$$

formule qui ne contient en réalité que $(n-1)$ constantes arbitraires, $(C_1 + \lambda_1 C_n) \dots (C_{n-1} + \lambda_{n-1} C_n)$, et qui ne peut par suite représenter l'intégrale générale d'une équation différentielle d'ordre n.

Réciproquement, étant données n solutions de (1) $u_1, u_2, \dots u_n$, linéairement indépendantes, c'est-à-dire entre lesquelles n'existe aucune relation linéaire et homogène, on pourra mettre une solution quelconque sous la forme :

$$y = d_1 u_1 + d_2 u_2 + \cdots + d_n u_n \qquad (d_1 , d_2 , \dots = \text{const.})$$

Car, $u_1, u_2, \dots u_n$ étant des solutions de (1), on a :

$$(4) \qquad \begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n , \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n &= \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n ; \end{aligned}$$

comme il n'y a pas de relation linéaire et homogène entre $u_1, u_2, \dots u_n$, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_n \\ \vdots \\ \lambda_1 \dots \lambda_n \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, et on peut par suite résoudre les équations (4) par rapport à $y_1, y_2, \dots y_n$: les valeurs des y ainsi obtenues sont linéaires et homogènes par rapport aux u_i et dès lors l'expression

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n ,$$

qui est la solution générale de (1), pourra aussi se mettre sous la forme :

$$d_1 u_2 + d_2 u_2 + \cdots + d_n u_n$$

On saura donc écrire immédiatement l'intégrale d'une équation différentielle linéaire d'ordre n, sans second membre, quand on en connaîtra n solutions linéairement indépendantes.

223. – Théorème. – Si on connaît p solutions de l'équation (1),

$$y_1, \; y_2, \dots y_p \qquad (p < n)$$

linéairement indépendantes, on peut ramener l'intégration de la proposée à celle d'une équation linéaire et homogène d'ordre $n-p$, et à p quadratures.

Faisons en effet un changement de fonction, en posant

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_p y_p ,$$

$C_1, C_2 \dots C_p$ étant p nouvelles inconnues, que nous pourrons lier par $(p-1)$ équations à notre choix (1). On a posé

$$y = \sum C_i \, y_i \; ; \qquad \text{dérivons :}$$

$$y' = \sum C_i \, y_i' + \sum C_i' \, y_i$$

Nous prendrons comme première équation entre les C :

$$\sum C_i' \, y_i = 0$$

On a ensuite :

$$y'' = \sum C_i \, y_i'' + \sum C_i' \, y_i'$$

Nous poserons encore : . . . . $\sum C_i' \, y_i' = 0$

et ainsi de suite, jusqu'à :

$$y^{(p-1)} = \sum C_i \, y_i^{(p-1)} \; ;$$

en posant . . . . $\sum C_i' \, y_i^{(p-2)} = 0$

(les équations ci-dessus, $\sum C_i' y_i = 0$, $\sum C_i' y_i' = 0$, … $\sum C_i' y_i^{(p-2)} = 0$, forment le système (C))

On ne peut plus continuer, car on a ainsi établi, par les équations (C), $p-1$ relations entre $C_1, C_2, \dots C_p$.

---

(1) Si $y_1, y_2 \dots y_p$ n'étaient pas linéairement distincts, c. à. d. si $y_1 = \lambda_2 \, y_2 + \lambda_3 \, y_3 + \dots + \lambda_p y_p$, on aurait :

$$y = (C_2 + \lambda_2 \, C_1) \, y_2 + \dots + (C_p + \lambda_p \, C_1) \, y_p$$

et il n'y aurait, en réalité, que $p-1$ inconnues, $(C_2 + \lambda_1 C_1) \dots (C_p + \lambda_p C_1)$. On n'aurait donc pas le droit d'établir entre elles $p-1$ relations : c'est pourquoi on doit supposer, dès le début, que $y_1 \dots y_p$ ne sont liés par aucune équation linéaire et homogène.

La méthode employée dans ce paragraphe est dite de la variation des constantes.

D'après cela, y', y'', ... $y^{(p-1)}$ sont les mêmes que si C_1, C_2, ... C_p étaient des constantes. Continuons à dériver :

$$y^{(p)} = \sum C_i\, y_i^{(p)} + \sum C_i'\, y_i^{(p-1)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = \sum C_i\, y_i^{(n)} + \cdots\cdots + \sum C_i^{(n-p+1)}\, y_i^{(p-1)}$$

Portant ces valeurs dans l'équation proposée (1) on obtient une équation $F=0$, linéaire et homogène par rapport à C_1, C_2, ... C_p et à leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n-p+1$, car chacune des dérivées de y est fonction linéaire et homogène de ces quantités. Je dis que les termes en C_1, C_2, ... C_p n'y figurent pas. En effet, ces termes sont ceux qu'on obtiendrait en supposant C_1, C_2, ... C_p constants, c'est-à-dire en substituant dans l'équation (1) la fonction $y = C_1\, y_1 + C_2\, y_2 + \cdots + C_p\, y_p$ où C_1, ... C_p sont constants : mais cette fonction étant dans ce cas une solution de (1), le résultat de la substitution est identiquement nul. Donc l'équation $F=0$ ne contient pas les C_i ; son premier membre se réduit à une fonction linéaire et homogène des C_i', C_i'', ... $C_i^{(n-p+1)}$.

Cela posé, on peut tirer des équations (C'), c'est-à-dire de :

$$(C')\qquad \begin{cases} C_1'\, y_1 + C_2'\, y_2 + \cdots + C_p'\, y_p = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1'\, y_1^{(p-2)} + \cdots\cdots + C_p'\, y_p^{(p-2)} = 0 \end{cases}$$

les valeurs de C_2', C_3', ... C_p' en fonction de C_1' : en effet le déterminant de ces inconnues est précisément le déterminant Δ, qui, égalé à zéro, exprime que y_2, ... y_p sont liées par une relation linéaire et homogène (N° 221). Et comme nous avons supposé y_1, y_2, ... y_p linéairement indépendantes, Δ n'est pas nul.

On exprime ainsi ainsi C_2', C_3' .... C_n', en fonction linéaire et homogène de C_1' :

$$C_2' = \alpha_2\, C_1' \;;\quad C_3' = \alpha_3\, C_1' \ldots\ldots$$

$\alpha_2, \alpha_3 \ldots$ étant des fonctions de x.

Dérivant ces relations, on exprime les dérivées successives de C_2', C_3' .... en fonction linéaire et homogène de C_1' et de ses dérivées jusqu'au même ordre ; portant ensuite ces valeurs dans l'équation $F=0$, on a une équation linéaire et homogène, entre C_1', C_1'', ... $C_1^{(n-p+1)}$, c'est-à-dire d'ordre $n-p$ par rapport à C_1'.

Supposons qu'on puisse l'intégrer ; soit C'_1 sa solution générale : on aura C_1 par une première quadrature ; puis de la relation

$C'_2 = \alpha_2 C'_1$, ... on déduit :

$C_2 = \int \alpha_2 C'_1\, dx$, ... et ainsi de suite ;

c'est-à-dire que $C_2, C_3, \dots C_p$ s'obtiendront par $p-1$ nouvelles quadratures ; en tout, p ; et la solution générale de (1) sera donnée par la formule :

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_p y_p$$

Les n constantes arbitraires proviendront 1° des $n-p$ constantes que contient C'_1, solution générale d'une équation d'ordre $n-p$; 2° des p constantes introduites par les p quadratures. (Cette méthode est due à Lagrange).

224. - Corollaire. - Si on connaît $(n-1)$ solutions indépendantes de l'équation d'ordre n sans second membre, on saura l'intégrer, car on la ramènera à une équation analogue du premier ordre, qui s'intègre immédiatement, par une quadrature.

En particulier, soit y_1 une solution de l'équation du second ordre :

$$y'' + Py' + Qy = 0 ;$$

pour achever l'intégration, on posera $y = Cy_1$; d'où :

$$C''y_1 + C'(2y'_1 + Py_1) = 0 ;$$

c'est-à-dire

$$\frac{C''}{C'} + \frac{2y'_1 + Py_1}{y_1} = 0$$

Intégrant par rapport à x, il vient :

$$C' = C_2 \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dx}, \quad (C_2 = \text{constante arbitraire})$$

d'où

$$C = C_2 \int \frac{dx}{y_1^2} e^{-\int P dx} + C_1 \dots . (C_1 = \text{const. arbitraire})$$

et

$$y = C_1 y + C_2 y_1 \int \frac{dx}{y_1^2} e^{-\int P dx}$$

C'est l'intégrale générale cherchée.

Équations linéaires avec second membre.

225. – Forme de l'intégrale générale. – Soit l'équation :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + T\frac{dy}{dx} + Uy = V,$$

linéaire et à second membre ; désignons par Y_0 une quelconque de ses solutions ; si nous posons

$$y = z + Y_0,$$

z étant la nouvelle inconnue, on obtiendra évidemment pour z l'équation :

$$\frac{d^n z}{dx^n} + P\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + T\frac{dz}{dx} + Uz = 0,$$

ce qui montre que z est la solution générale de l'équation proposée, dans laquelle on aurait supprimé le second membre. L'intégrale générale de la proposée avec second membre est donc :

(7) $$y = Y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n,$$

$y_1, \ldots y_n$ étant n solutions, linéairement indépendantes, de l'équation sans second membre.

226. – Théorème. – Si on connaît p solutions, $y_1, \ldots y_p$, linéairement indépendantes, de l'équation sans second membre, l'intégration de l'équation avec second membre se ramène à celle d'une équation linéaire, à second membre, d'ordre n-p, et à p quadratures.

Il suffit de reproduire, sans aucun changement, la méthode et les calculs du N°. 223.

En particulier, supposons qu'on connaisse n solutions de l'équation sans second membre (c'est-à-dire qu'on sache l'intégrer) ; on obtiendra, par n quadratures, l'intégrale de l'équation avec second membre.

Ainsi, l'équation sans second membre étant intégrée, on saura intégrer l'équation avec second membre. Cette proposition est importante ; aussi allons-nous reprendre les raisonnements et calculs qui servent à l'établir.

227. – Soient donc $y_1, y_2, \ldots y_n$, n solutions indépendantes de

l'équation sans second membre ; posons, dans l'équation avec second membre :

$$y = C_1\, y_1 + C_2\, y_2 + \cdots + C_n\, y_n$$

$C_1, \ldots C_n$ étant n nouvelles inconnues, que nous pourrons lier par $n-1$ relations à notre choix. Nous prendrons les $(n-1)$ relations suivantes :

$$(C) \quad \begin{cases} C'_1\, y_1 + C'_2\, y_2 + \cdots + C'_n\, y_n = 0 \,;\ \text{ou}\ \sum C'_i\, y_i = 0 \\ \sum C'_i\, y'_i = 0 \\ \sum C'_i\, y''_i = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum C'_i\, y_i^{(n-2)} = 0 \end{cases}$$

Il en résulte que les $(n-1)$ premières dérivées de y sont les mêmes que si $C_1 \ldots C_n$ étaient des constantes ; c'est-à-dire que :

$$y' = \sum C_i\, y'_i$$

$$y'' = \sum C_i\, y''_i$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n-1)} = \sum C_i\, y_i^{(n-1)}$$

d'où

$$y^{(n)} = \sum C_i\, y_i^{(n)} + \sum C'_i\, y_i^{(n-1)}$$

Portons ces valeurs dans l'équation à second membre ; les termes en $C_1 \ldots C_n$ disparaissent (N° 223) et il reste seulement :

$$\sum C'_i\, y_i^{(n-1)} = V .$$

Cette équation et les $(n-1)$ relations (C) donnent $C'_1, C'_2, \ldots C'_n$ en fonction de x par n équations linéaires. Ces équations sont compatibles, car le déterminant des coefficients des inconnues est le déterminant Δ, qui, égalé à zéro, exprimerait que $y_1, y_2, \ldots y_n$ sont liées par une relation linéaire : comme on a supposé ces fonctions linéairement indépendantes, Δ n'est pas nul.

On peut donc résoudre les équations considérées par

rapport à $C'_1, C'_2, \ldots C'_n$, on a :

$$C'_1 = U_1 \,;\quad C'_2 = U_2 \,;\ \ldots\ldots$$

$U_1, \ldots\ldots$ étant des fonctions de x. D'où

$$C_i = \int U_i\, dx + \lambda_i \,, \ldots\ \text{(ce qui conduit à } n \text{ quadratures)}$$

λ_i étant une constante arbitraire ; et enfin, si on porte ces valeurs dans l'expression de y, il vient

$$y = \sum C_i\, y_i = \sum \left(y_i \int U_i\, dx \right) + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_n y_n \,,$$

solution générale de l'équation avec second membre. Elle est bien de la forme (7).

228. – Appliquons cette méthode à l'équation du premier ordre.

(8) $$\frac{dy}{dx} + Py + Q = 0 \,.$$

L'équation sans second membre, $\frac{dy}{dx} + Py = 0$, s'intègre de suite ; sa solution est

$$y = C e^{-\int P dx} \,;$$

portons cette valeur dans (8), en regardant C comme une fonction de x : les termes en C disparaissent ; il reste :

$$e^{-\int P dx} \cdot \frac{dC}{dx} + Q = 0 \,;$$

d'où

$$C = -\int Q e^{\int P dx} dx + C_1$$

ce qui donne, pour la solution générale de (8) :

$$y = C_1\, e^{-\int P dx} - e^{-\int P dx} \int Q e^{\int P dx} dx$$

C'est au fond la méthode du N°. 159 ; les notations diffèrent, mais les calculs sont identiques :

C est la fonction désignée au N°. 159 par u ; $e^{-\int P dx}$ est v.

229. – Remarque. – Soient deux équations linéaires ayant même premier membre :

$$(9) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + Vy = V_1 \quad ,$$

$$(10) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + Vy = V_2 \quad ;$$

si Y_1 est une solution de la première et Y_2 une solution de la seconde, $Y_1 + Y_2$ sera solution de la même équation, où le second membre serait $V_1 + V_2$.

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + Vy = V_1 + V_2 .$$

Il suffit, pour le voir, d'ajouter les relations qui expriment que Y_1 et Y_2 vérifient respectivement (9) et (10).

Cette remarque est souvent utile lorsqu'on cherche une solution particulière d'une équation linéaire à second membre.

II. _ Équations linéaires particulières.

1° Équations à coefficients constants, sans second membre.

---

230. _ On sait les intégrer complètement ; elles sont de la forme :

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + a\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + f\frac{dy}{dx} + gy = 0 ;$$

$a, \ldots f, g$ étant des constantes. Posons en effet (Euler)

$$y = e^{sx} ,$$

s étant une constante, que nous chercherons à déterminer de manière que y satisfasse à l'équation (1). On a :

$$\frac{dy}{dx} = se^{sx} ; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{d^n y}{dx^n} = s^n e^{sx} .$$

Substituons dans (1) ; le résultat est :

$$e^{sx}\left[s^n + as^{n-1} + \cdots + fs + g\right] ,$$

ce qui est nul lorsque s est racine de l'équation, dite caractéristique :

$$(2) \qquad s^n + as^{n-1} + \cdots + fs + g = 0 .$$

Si cette équation a ses n racines distinctes, $s_1, s_2, \dots s_n$, on aura ainsi n solutions particulières de (1) : $e^{s_1 x}, \dots e^{s_n x}$. Je dis qu'il n'existe aucune relation linéaire et homogène entre ces solutions, c'est-à-dire (N° 221) que le déterminant Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{s_1 x} & e^{s_2 x} & \dots\dots\dots & e^{s_n x} \\ s_1 e^{s_1 x} & \dots\dots\dots & & \\ \vdots & & & \\ s_1^{n-1} e^{s_1 x} & \dots\dots\dots & & s_n^{n-1} e^{s_n x} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul. Si on divise en effet les termes de la première colonne par $e^{s_1 x}$, ... ceux de la dernière par $e^{s_n x}$, ce déterminant se réduit à celui de Vandermonde, pour les éléments $s_1, s_2, \dots s_n$, et n'est dès lors jamais nul si ces n quantités sont différentes, ce qui est précisément l'hypothèse.

Il en résulte (N° 222) que l'intégrale générale de la proposée (1) est :

$$y = C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x} + \dots + C_n e^{s_n x}.$$

231. – Reste à examiner le cas où l'équation caractéristique (2) aurait des racines égales. Voici pour cela la méthode proposée par d'Alembert.

Supposons qu'il y ait une racine double, s_1 : faisons varier infiniment peu les coefficients a .... f, g, de manière que l'équation caractéristique n'ait plus de racine double ; elle aura alors deux racines, s' et s'', voisines l'une de l'autre et de s_1 auxquelles correspondent pour l'équation différentielle les deux solutions

$$e^{s'x} \; ; \; e^{s''x},$$

qu'on peut remplacer par

$$e^{s'x} \; ; \; \frac{e^{s''x} - e^{s'x}}{s'' - s'},$$

dont la seconde est une combinaison linéaire et homogène des deux premières. Si on fait tendre s'' vers s', cette seconde solution tend vers

$$\frac{d}{ds} e^{sx}, \dots \text{ pour } s = s' ;$$

c. à d. vers $x e^{s_1 x}$, puisque $\lim s' = s_1$.

En d'autres termes, en désignant par C_1 et C_2 deux constantes

arbitraires, l'équation différentielle proposée est vérifiée par la fonction

$$e^{s_1 x}\left[C_1 + C_2 x\right]$$

Tel est le terme qui, dans l'intégrale générale, correspond à la racine double, s_1 ; il renferme deux constantes arbitraires, et par suite, l'intégrale générale de (1), si l'équation caractéristique n'a pas d'autre racine multiple, est :

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{s_1 x} + C_3 e^{s_3 x} + \cdots + C_n e^{s_n x}$$

On traiterait d'une manière analogue le cas de la racine triple, et ainsi de suite, et on verrait que les termes de l'intégrale générale qui correspondent à une racine multiple s_1, d'ordre K, sont les K termes :

$$(C_1 + C_2 x + \cdots + C_K x^{K-1})e^{s_1 x}$$

mais, ce résultat une fois prévu, il vaut mieux l'établir directement.

232. – Remplaçons à cet effet y par e^{sx} dans le premier membre de l'équation (1), et posons

$$\varphi(s) = s^n + a s^{n-1} + \cdots + f s + g\,;$$

il vient identiquement :

(3) $$\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{sx}\right) + a\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{sx}\right) + \cdots + f\frac{d}{dx}\left(e^{sx}\right) + g e^{sx} = e^{sx}\varphi(s).$$

Dérivons par rapport à s, en intervertissant l'ordre des dérivations dans les termes du premier membre ; on a :

(4) $$\frac{d^n}{dx^n}\left[x e^{sx}\right] + a\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[x e^{sx}\right] + \cdots + f\frac{d}{dx}\left[x e^{sx}\right] + g\left[x e^{sx}\right] = e^{sx}\left[\varphi'(s) + x\varphi(s)\right]$$

Dérivons encore une fois par rapport à s :

(5) $$\frac{d^n}{dx^n}\left[x^2 e^{sx}\right] + \cdots\cdots + f\frac{d}{dx}\left[x^2 e^{sx}\right] + g\left[x^2 e^{sx}\right] = e^{sx}\left[\varphi''(s) + 2x\varphi'(s) + x^2\varphi(s)\right]$$

et ainsi de suite.

L'équation (3) montre qu'on satisfait à l'équation proposée (1) en posant $y = e^{s_1 x}$, s_1 étant une racine de $\varphi(s) = 0$.

Si s_1 est racine double, $\varphi'(s_1) = 0$, et la relation (4) montre qu'on a une solution de (1) en prenant $y = x e^{s_1 x}$; ce qui, avec $e^{s_1 x}$, fait deux solutions.

Si s_1 est racine triple, $\varphi''(s_1) = 0$; et la relation (5) montre que, indépendamment des deux solutions précédentes, on a la solution

$y = x^2 e^{s_1 x}$, et ainsi de suite.

Donc, à chaque racine, s_1, de l'équation caractéristique (2) correspond ainsi un nombre de solutions particulières, $e^{s_1 x}, xe^{s_1 x}, x^2 e^{s_1 x}, \dots$, égal à son degré de multiplicité :
l'équation (2) étant de degré n, on a ainsi n solutions, qui, multipliées par des constantes et additionnées, fournissent l'intégrale générale de (1).
Voici dès lors le résultat final :

Si $s_1, s_2, \dots$ sont les racines de l'équation caractéristique (2), $K_1, K_2 \dots$ leurs ordres de multiplicité, l'intégrale générale de (1) sera :

$$y = e^{s_1 x} P_{K_1 - 1}(x) + e^{s_2 x} P_{K_2 - 1}(x) + \dots\dots$$

$P_{K_1-1}(x), \dots\dots$ étant des polynômes d'ordres $K_1 - 1$, $K_2 - 1, \dots$ dont les coefficients sont tous absolument arbitraires.

233. – Remarque. – Si l'équation caractéristique a des racines imaginaires, cette formule introduit des exponentielles imaginaires qu'on peut faire disparaître comme il suit :

Les coefficients de l'équation proposée (1) étant supposés réels, les racines imaginaires de l'équation caractéristique sont deux à deux conjuguées. Soient donc :

$$s_1 = \alpha + \beta i$$

$$s_2 = \alpha - \beta i$$

deux racines conjuguées, multiples d'ordre K. Les termes correspondants de l'intégrale générale sont :

$$P_{K-1}\, e^{(\alpha+\beta i)x} + P'_{K-1}\, e^{(\alpha-\beta i)x} ;$$

ce qui s'écrit, en remplaçant $e^{i\beta x}$ et $e^{-i\beta x}$ par leurs valeurs en fonction de $\cos\beta x$ et $\sin\beta x$:

$$e^{\alpha x} \cos\beta x \left[P_{K-1} + P'_{K-1}\right] + e^{\alpha x} \sin\beta x \left[i P_{K-1} - i P'_{K-1}\right]$$

ou :

$$e^{\alpha x} \cos\beta x\, Q_{K-1}(x) + e^{\alpha x} \sin\beta x\, Q'_{K-1}(x),$$

Q et Q' étant des polynômes en x, d'ordre $K-1$, qui sont arbitraires, puisque P_{K-1} et P'_{K-1} le sont. On a ainsi une expression réelle.

Exemples : Soit l'équation $\dfrac{d^4 y}{dx^4} - y = 0$;

l'équation caractéristique, $S^4-1=0$, a pour racines ± 1 et $\pm i$; donc l'intégrale générale est :

$$C_1 e^{x}+C_2 e^{-x}+C_3 \cos x+C_4 \sin x.$$

Soit l'équation :

$$\frac{d^4y}{dx^4}+8\frac{d^2y}{dx^2}+16y=0$$

l'équation caractéristique, $S^4+8S^2+16=0$ ou $(S^2+4)^2=0$ a pour racines doubles $\pm 2i$; donc l'intégrale générale est :

$$(C_1 x+C_2)\cos 2x+(C_1' x+C_2')\sin 2x.$$

2° Equations linéaires à coefficients constants, avec second membre.

---

234. – Soit à intégrer l'équation :

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+f\frac{dy}{dx}+gy=V, \tag{6}$$

où $a, b, \dots f, g$ sont des constantes, et le second membre, V, une fonction de x.

On intégrera d'abord l'équation sans second membre et on en déduira l'intégrale de l'équation avec second membre par le procédé général du N° 227 (méthode de la variation des constantes) : on aura ainsi n quadratures à effectuer.

Cette méthode convient quelque soit V ; elle est même généralement la seule applicable ; toutefois, si V est d'une forme particulière, qui va être indiquée plus bas, on pourra trouver une solution particulière de l'équation proposée, et en lui ajoutant la solution générale de l'équation sans second membre, on aura (N° 225) l'intégrale générale de (6).

235. – Supposons que V soit de la forme :

$$V=f(x, e^{\alpha x}, e^{\beta x}, \dots \cos \gamma x, \sin \gamma x, \cos \delta x, \sin \delta x, \dots)$$

f étant un polynôme entier par rapport à tous les termes entre parenthèses. On pourra d'abord y remplacer les sinus et cosinus par leurs expressions en exponentielles, et comme le produit de plusieurs exponentielles $e^{\alpha x}$ est une exponentielle de même forme, V

pourra se mettre sous la forme : $\sum Pe^{\alpha x}$, P étant un polynôme entier en x. La question est alors réduite à trouver une intégrale particulière de l'équation

(7) $$\frac{d^n y}{dx^n} + a\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + f\frac{dy}{dx} + gy = Pe^{\alpha x},$$

car si on détermine ainsi des intégrales particulières correspondant aux différents termes de V, leur somme sera une intégrale particulière de la proposée, comme on l'a observé au N° 229.

1° Supposons d'abord qu'il n'y ait pas d'exponentielle au second membre de (7), c'est-à-dire $\alpha = 0$; l'équation devient :

(8) $$\frac{d^n y}{dx^n} + a\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + f\frac{dy}{dx} + gy = P_m(x),$$

P_m étant un polynôme d'ordre m :

$$P_m = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ldots\ldots + A_m$$

On voit de suite que l'équation (8) admet pour solution particulière un polynôme en x, $Q_m(x)$, d'ordre m. Car soit posé :

$$Q_m = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + a_m\,,$$

il viendra, en remplaçant y par Q_m, dans (8), et égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres :

$$a_0 g = A_0$$
$$a_1 g + mf a_0 = A_1$$
$$\ldots\ldots\quad\ldots\ldots$$
$$a_m g + a_{m-1} f + \ldots + \ldots\ldots = A_m$$

équations qui donnent successivement $a_0, a_1, \ldots a_n$ sans ambiguité, pourvu toutefois que g ne soit pas nul, c'est-à-dire qu'il y ait un terme en y dans l'équation (8).

Si g est nul, et si en même temps les coefficients de $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}$ sont nuls, l'équation (8) est de la forme :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + h\frac{d^k y}{dx^k} = P_m(x)\,;$$

c'est une équation linéaire, à coefficients constants, par rapport à

$\frac{d^k y}{dx^k}$; d'après ce qui précède elle admet donc comme solution particulière un polynôme $Q'_m(x)$, d'ordre m ; ainsi

$$\frac{d^k y}{dx^k} = Q'_m(x) ;$$

en intégrant k fois, sans introduire de constantes arbitraires, on a, pour y, la solution particulière.

$$y = x^k Q_m(x),$$

Q_m étant un polynôme déterminé, d'ordre m en x.

2°. – Reprenons maintenant l'équation (7) sous la forme générale :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + gy = P_m\, e^{\alpha x} ; \qquad (7)$$

pour en trouver une solution particulière, nous ramènerons ce cas au précédent en posant

$$y = z e^{\alpha x},$$

z étant l'inconnue nouvelle. Il vient par la formule de Leibnitz :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{\alpha x}\left[\alpha^n z + n\alpha^{n-1}\frac{dz}{dx} + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^{n-2}\frac{d^2 z}{dx^2} + \dots + n\alpha\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \frac{d^n z}{dx^n}\right]$$

. . . .

Portons ces valeurs dans (7) nous avons, en supprimant aux deux membres le facteur $e^{\alpha x}$, et en commençant par les termes en z, $\frac{dz}{dx}$, ...

$$z\varphi(\alpha) + \frac{dz}{dx}\varphi'(\alpha) + \frac{1}{1.2}\frac{d^2 z}{dx^2}\varphi''(\alpha) + \dots + \frac{1}{1.2..k}\frac{d^k z}{dx^k}\varphi^{(k)}(\alpha) + \dots + \frac{d^n z}{dx^n} = P_m, \qquad (9)$$

$\varphi(\alpha)$ désignant comme plus haut, le premier membre de l'équation caractéristique : $\varphi(\alpha) = \alpha^n + a\alpha^{n-1} + \dots + f\alpha + g$. C'est une équation de la forme (8).

Donc, si $\varphi(\alpha)$ n'est pas nul, c'est-à-dire si α n'est pas racine de l'équation caractéristique, la transformée (9) admettra, comme solution particulière, un polynôme $Q_m(x)$, d'ordre m ; si $\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = \dots = \varphi^{(k-1)}(\alpha) = 0$, c'est-à-dire si α est racine multiple d'ordre k de l'équation caractéristique, elle admettra comme solution particulière un polynôme $x^k Q_m(x)$, Q_m étant d'ordre m ; d'où, pour

l'équation en y, la solution $e^{\alpha x} x^k Q_m(x)$.

— En résumé :

On aura dans tous les cas une solution particulière de l'équation (où $a, \ldots f, g =$ const.) :

$$(7) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + a \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + f \frac{dy}{dx} + gy = P_m(x) e^{\alpha x},$$

en posant

$$y = e^{\alpha x} x^k Q_m(x),$$

$Q_m(x)$ étant un polynôme en x, de même degré que $P_m(x)$, et k étant l'ordre de multiplicité de la racine α dans l'équation caractéristique. Si α n'est pas racine de cette équation, on fera $k = 0$.

Les coefficients du polynôme $Q_m(x)$ se détermineront par substitution de la valeur de y dans l'équation (7); ajoutant à cette solution particulière la solution générale de cette équation sans second membre, on aura l'intégrale générale.

Exemple. – Soit l'équation :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \cos x.$$

Le second membre étant de la somme de deux exponentielles de la forme e^{ix}, e^{-ix}, et l'équation caractéristique admettant pour racines $\pm i$, une solution particulière sera de la forme

$$x\left[\lambda e^{ix} + \mu e^{-ix}\right]$$

(λ et μ étant des constantes) ou encore, de la forme :

$$x\left[\alpha \cos x + \beta \sin x\right]$$

α et β étant des constantes à déterminer. Substituant à y cette valeur dans l'équation proposée, il reste :

$$-2\alpha \sin x + 2\beta \cos x = \cos x;$$

d'où

$$\alpha = 0; \ \beta = \frac{1}{2}$$

la solution est donc

$$\frac{1}{2} x \sin x,$$

et l'intégrale est :

$$\frac{1}{2} x \sin x + C_1 \sin x + C_2 \cos x .$$

3° Équations qui se ramènent aux équations linéaires à coefficients constants.

---

236. – Ce sont celles du type :

$$(10) \quad (px+q)^n \frac{d^n y}{dx^n} + a(px+q)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + f(px+q)\frac{dy}{dx} + gy = 0$$

$p, q, a, \dots f, g$ étant des constantes.

Posons d'abord :

$$x + \frac{q}{p} = \xi ;$$

l'équation devient :

$$(11) \qquad p^n \xi^n \frac{d^n y}{d\xi^n} + p^{n-1} a \xi^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{d\xi^{n-1}} + \dots + pf\xi \frac{dy}{d\xi} + gy = 0$$

Si l'on pose maintenant

$$(12) \qquad \xi = e^t ; \text{ d'où } \frac{dt}{d\xi} = e^{-t} ,$$

t étant la nouvelle variable, on aura :

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{d\xi} = e^{-t} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{dt}{d\xi}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) = e^{-2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]$$

et ainsi de suite ; on aura évidemment, d'une manière générale :

$$\frac{d^n y}{d\xi^n} = e^{-nt}\left[\frac{d^n y}{dt^n} + \lambda \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + \mu \frac{dy}{dt}\right] ;$$

$\lambda, \dots \mu$ étant des constantes. Portant ces valeurs et la valeur (12) de ξ dans l'équation (11), on voit que les exponentielles disparaissent, car e^{nt} provenant de ξ^n détruit e^{-nt} provenant de $\frac{d^n y}{d\xi^n}$; il reste alors une équation linéaire et homogène à coefficients constants, en $y, \frac{dy}{dt}, \dots \frac{d^n y}{dt^n}$, qu'on sait intégrer. Désignons cette équation par (E).

Ce résultat une fois établi, il sera inutile, pour intégrer l'équation (10) ou l'équation (11), qui lui est équivalente, de passer par l'intermédiaire de la substitution (12). En effet, on a n solutions indépendantes de l'équation (E) par les expressions :

$$y = e^{s_1 t} \;; \qquad e^{s_2 t}; \ldots\ldots\ldots e^{s_n t};$$

$s_1 \ldots s_n$ étant les racines, supposées inégales, de l'équation caractéristique correspondante. L'équation (11) admet donc les n solutions indépendantes :

$$y = \xi^{s_1} \;; \qquad \xi^{s_2}; \ldots\ldots \xi^{s_n} \;;$$

et il est aisé de déterminer directement $s_1 \ldots s_n$. Ecrivons, pour cela, que ξ^s est solution de (11); il vient, en divisant par ξ^s :

$$(13) \qquad p^n s(s-1)\ldots(s-n+1) + ap^{n-1}s(s-1)\ldots(s-n+2) + \cdots + fps + g = 0,$$

équation qui donne, pour s, n valeurs, qui sont évidemment $s_1, s_2, \ldots s_n$. L'équation (13) est donc identique à l'équation caractéristique de l'équation (E).

Si l'équation caractéristique de (E) a une racine multiple d'ordre K, s_1, (E) admet comme solution particulière

$$y = e^{s_1 t} P_{K-1}(t) \;; \qquad (P_{K-1} = \text{polynôme à coefficients arbitraires})$$

donc (11) aura la solution correspondante

$$y = \xi^{s_1} P_{K-1}(\log \xi)$$

Ainsi, pour intégrer (11), on formera l'équation (13); soient $s_1, s_2, \ldots$ ses racines, supposées d'ordres $K_1, K_2, \ldots$ de multiplicité. L'intégrale générale de (11) sera

$$\xi^{s_1} P_{K_1-1}(\log \xi) + \xi^{s_2} P_{K_2-1}(\log \xi) + \cdots$$

les P étant des polynômes en $\log \xi$, d'ordre égal à l'indice, et de coefficients tous arbitraires.

Par suite, enfin l'intégrale générale de (10) sera évidemment :

$$(px+q)^{s_1} P_{K_1-1}(\log[px+q]) + \cdots\cdots$$

III – Systèmes linéaires.

237. – Les systèmes linéaires, ramenés à la forme canonique (N°211) jouissent de propriétés analogues à celles des équations linéaires à une seule inconnue.

Leur type général est, en désignant par $y, z, t, u, \ldots$ les inconnues :

$$(S) \quad \begin{aligned} &\frac{dy}{dx} + P_1 y + Q_1 z + R_1 t + S_1 u + \ldots = V_1 \\ &\frac{dz}{dx} + P_2 y + Q_2 z + R_2 t + \ldots\ldots = V_2 \\ &\frac{dt}{dx} + P_3 y + Q_3 z + R_3 t + \ldots\ldots = V_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

le nombre des équations étant égal à celui des inconnues, et, $P, Q, R, \ldots V$ étant des fonctions de x seul.

Si $V_1, V_2, \ldots$ sont tous nuls, le système est dit sans seconds membres.

L'intégration du système (S) peut se ramener à celle d'une seule équation différentielle linéaire d'ordre n, n désignant le nombre des inconnues.

Dérivons en effet $(n-1)$ fois chacune des équations (S) nous obtenons en tout $n + n(n-1) = n^2$ équations linéaires en $y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$; $z, \frac{dz}{dx}, \ldots \frac{d^nz}{dx^n}, \ldots\ldots$, entre lesquelles on peut éliminer les inconnues $z, \frac{dz}{dx}, \ldots \frac{d^nz}{dx^n}; t\, \frac{dt}{dx}, \ldots$, qui sont au nombre de $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$.

On arrive à une équation linéaire, qui est généralement d'ordre n en y. Celle-ci intégrée, les équations précédentes, en général, donnent linéairement les autres inconnues $z, t \ldots$ (et leurs dérivées) en fonction de y et de ses dérivées.

Cette marche est avantageuse si le nombre des inconnues est peu élevé ; dans les autres cas, il vaut mieux essayer d'intégrer directement le système. On va indiquer, dans ce but, les propriétés les plus importantes des systèmes linéaires et de leurs solutions.

Systèmes linéaires sans seconds membres.

238. — Considérons le système (S) sans seconds membres, c'est-à-dire où tous les V sont nuls : il est clair que si $y_1, z_1, t_1, \dots$ forment un système de solutions — ce qu'on appellera plus brièvement une solution, — $C_1 y_1, C_1 z_1, C_1 t_1, \dots$ ce sera une autre solution. De même, $y_2, z_2, t_2, \dots$ étant une solution, $C_1 y_1 + C_2 y_2, C_1 z_1 + C_2 z_2, C_1 t_1 + C_2 t_2, \dots$ en sera une autre.

Si l'on a p solutions ($p \leqq n$) : $y_1, z_1, t_1 \dots ; \dots y_p, z_p, t_p \dots$; on dira qu'elles sont indépendantes lorsque l'un au moins des déterminants d'ordre p formés avec p colonnes du tableau

$$(1) \qquad \begin{matrix} y_1, & z_1, & t_1, & \dots \\ y_2, & z_2, & t_2, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_p, & z_p, & t_p, & \dots \end{matrix}$$

est différent de zéro.

239. — Théorème. — Si on connaît p solutions indépendantes d'un système d'ordre n, l'intégration de celui-ci se ramène à l'intégration d'un système analogue d'ordre n − p, et à p quadratures.

Soit, pour fixer les idées, $n = 4$ et $p = 2$. On connaît les deux solutions :

$$\begin{matrix} y_1, z_1, t_1, u_1 ; \\ y_2, z_2, t_2, u_2 . \end{matrix}$$

Si elles sont indépendantes, un au moins des déterminants formés avec deux colonnes de ce tableau n'est pas nul ; soit $y_1 z_2 - z_1 y_2 \gtrless 0$.
Posons :

$$(2) \qquad \begin{aligned} y &= Y y_1 + Z y_2 \\ z &= Y z_1 + Z z_2 \\ t &= Y t_1 + Z t_2 + \theta \\ u &= Y u_1 + Z u_2 + U \end{aligned}$$

Y, Z, θ, U, étant les $n = 4$ nouvelles inconnues. Substituant ces valeurs

de y, z, t, u, dans le système proposé, on obtient quatre équations linéaires et homogènes par rapport à Y, Z, θ, V et à leurs dérivées; dans ces équations les termes en Y et Z disparaissent, car le système est vérifié si l'on suppose Y et Z constants et θ, V, nuls; il reste donc :

$$(3)\quad \begin{aligned} &y_1 \frac{dY}{dx} + y_2 \frac{dZ}{dx} + R_1\theta + S_1 V = 0 \\ &z_1 \frac{dY}{dx} + z_2 \frac{dZ}{dx} + R_2\theta + S_2 V = 0 \\ \frac{d\theta}{dx} + {}&t_1 \frac{dY}{dx} + t_2 \frac{dZ}{dx} + R_3\theta + S_3 V = 0 \\ \frac{dV}{dx} + {}&u_1 \frac{dY}{dx} + u_2 \frac{dZ}{dx} + R_4\theta + S_4 V = 0 \end{aligned}$$

Des deux premières on peut tirer (puisque $y_1 z_2 - z_2 y_1 \gtrless 0$) $\frac{dY}{dx}$ et $\frac{dZ}{dx}$ en fonction linéaire et homogène de θ, V; portant ces valeurs dans les équations suivantes, on obtient un système linéaire, sans second membre, aux $(n-2)=2$ inconnues θ, V, de la forme :

$$(4)\quad \begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} + T_1\theta + U_1 V = 0 \\ \frac{dV}{dx} + T_2\theta + U_2 V = 0 \end{aligned}$$

Ce système intégré, les deux premières relations (3) donneront $\frac{dY}{dx}$ et $\frac{dZ}{dx}$, d'où Y et Z par deux quadratures. Enfin les équations (2) fourniront explicitement les anciennes inconnues. C.q.f.d.

Corollaire. – Soit θ, V une solution de (4); les valeurs correspondantes de Y et de Z étant déterminées à l'aide des deux premières relations (3), les formules (2) fournissent une nouvelle solution du système considéré : cette solution est indépendante des deux solutions primitives y_1, z_1, t_1, u_1; y_2, z_2, t_2, u_2; car si θ, par exemple, est $\gtrless 0$, le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & t_1 \\ y_2 & z_2 & t_2 \\ Yy_1 + Zy_2 & Yz_1 + Zz_2 & Yt_1 + Zt_2 + \theta \end{vmatrix} = \theta \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

n'est pas nul. Ainsi, à p solutions indépendantes on peut en ajouter une nouvelle, formant avec elles un système de $p+1$ solutions indépendantes.

Or une solution $y, z_1, t_1, \ldots$ forme à elle seule un système indépendant, car $y, z_1, t_1, \ldots$ ne sont pas nuls à la fois : donc, en allant de proche en proche, on voit qu'il existe un système de n solutions indépendantes, n étant l'ordre du système proposé.

240. – Soit donc un système quelconque de n solutions indépendantes : $(y_1, z_1, t_1 \ldots) \ldots (y_n, z_n, t_n, \ldots)$; pour obtenir la solution générale, posons, dans le système proposé (S) :

$$(5) \qquad \begin{aligned} y &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n \\ z &= C_1 z_1 + C_2 z_2 + \cdots + C_n z_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$C_1, C_2 \ldots C_n$ étant les n inconnues nouvelles. Le système transformé ne contiendra pas de termes en $C_1, C_2, \ldots C_n$ (N° 239) puisque si $C_1, \ldots C_n$ sont constants les équations (5) donnent une solution du système. Il restera :

$$\begin{aligned} y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \cdots + y_n \frac{dC_n}{dx} &= 0 \\ z_1 \frac{dC_1}{dx} + \cdots\cdots\cdots + z_n \frac{dC_n}{dx} &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

d'où, puisque le déterminant $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ z_1 & \cdots & \cdots & z_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$ est supposé $\gtrless 0$:

$$\frac{dC_1}{dx} = \frac{dC_2}{dx} = \cdots = \frac{dC_n}{dx} = 0$$

c'est-à-dire

$$C_1 = \text{const} ; \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc :

Théorème. – La solution la plus générale du système est fournie par les formules (5) où $C_1, C_2, \ldots C_n$ désignent des constantes, d'ailleurs arbitraires.

Systèmes linéaires à seconds membres.

241. – Soit le système :

$$(S)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + P_1 y + Q_1 z + R_1 t + \dots = V_1 \\ \dfrac{dz}{dx} + P_2 y + \dots\dots\dots\dots = V_2 \\ \dfrac{dt}{dx} + P_3 y + \dots\dots\dots\dots = V_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Si on en connaît une solution particulière : $Y_0, Z_0, T_0, \dots$, on le ramènera à un système sans seconds membres en posant :

$$y = Y + Y_0, \quad z = Z + Z_0, \quad t = T + T_0, \dots\dots\dots$$

ce qui donne, en tenant compte de ce que $Y_0, Z_0, \dots$ est une solution :

$$\frac{dY}{dx} + P_1 Y + Q_1 Z + \dots = 0$$
$$\frac{dZ}{dx} + P_2 Y + \dots\dots\dots = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

C'est le système (S), sans seconds membres. L'intégrale générale du système à seconds membres est donc de la forme :

$$(6)\quad \begin{cases} y = Y_0 + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \\ z = Z_0 + C_1 z_1 + C_2 y_2 + \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$y_1, z_1, \dots; \dots\dots; y_n, z_n, \dots$ étant n solutions, indépendantes entre elles, du système sans seconds membres.

On établit comme au N° 239 que :

Théorème. – Si on connaît p solutions indépendantes du système sans seconds membres, l'intégration du système à seconds membres se ramène à l'intégration d'un système à seconds membres d'ordre $n-p$, et à p quadratures.

Les raisonnements et les calculs sont exactement ceux du N° 239. En particulier :

Corollaire. – Si on connaît l'intégrale générale du système sans seconds membres, on saura intégrer le système avec seconds membres, à l'aide de n quadratures.

On posera pour cela :

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$
$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \cdots + C_n z_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$C_1, C_2, \ldots C_n$ étant les n inconnues nouvelles ; le système (S) se réduit alors à :

$$y_1 \frac{dC_1}{dx} + \cdots + y_n \frac{dC_n}{dx} = V_1$$

$$z_1 \frac{dC_2}{dx} + \cdots + z_n \frac{dC_n}{dx} = V_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

d'où l'on tirera $\frac{dC_1}{dx_1} \cdots \frac{dC_n}{dx}$, et par suite on aura $C_1, C_2, \ldots C_n$ par n quadratures.

Systèmes linéaires à coefficients constants, sans seconds membres.

---

242. – Ils sont de la forme ($n=3$, par exemple) :

$$(7) \qquad \begin{aligned} &\frac{dy}{dx} + p_1 y + q_1 z + r_1 t = 0, \\ &\frac{dz}{dx} + p_2 y + q_2 z + r_2 t = 0, \\ &\frac{dt}{dx} + p_3 y + q_3 z + r_3 t = 0, \end{aligned}$$

les p, q, r étant des constantes. On sait les intégrer, ce qui est évident a priori, puisqu'on pourrait par dérivations et éliminations, réduire le système à une équation différentielle ordinaire (N° 237) dont les coefficients seraient constants.

Pour faire directement l'intégration, cherchons des solutions particulières de la forme :

$$y = \lambda e^{sx}\ ;\quad z = \mu e^{sx}\ ;\quad t = \nu e^{sx}$$

λ, μ, ν, s étant des constantes. Substituant dans (7) et divisant par e^{sx}, on trouve :

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\lambda(s+p_1) + \mu q_1 + \nu r_1 = 0 \\ &\lambda p_2 \quad + \mu(s+q_2) + \nu r_2 = 0 \\ &\lambda p_3 \quad + \mu q_3 \quad + \nu(s+r_3) = 0 \end{aligned}$$

Les constantes λ, μ, ν ne devant pas être nulles à la fois, on aura :

$$\begin{vmatrix} s+p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & s+q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & s+r_3 \end{vmatrix} = 0$$

équation du troisième ordre en s (en général d'ordre n) dite équation caractéristique du système (7). Soient s_1, s_2, s_3 ses trois racines ; pour $s = s_1$, les équations (8) se réduisent à deux et donnent des valeurs proportionnelles λ_1, μ_1, ν_1, des constantes λ, μ, ν, d'où la solution :

$$y = \lambda_1 e^{s_1 x}\ ;\quad z = \mu_1 e^{s_1 x}\ ;\quad t = \nu_1 e^{s_1 x}$$

De même, si s_1, s_2, s_3 sont distincts, on aura les deux autres solutions :

$$y = \lambda_2 e^{s_2 x}\ ;\qquad z = \mu_2 e^{s_2 x}\ ;\qquad t = \nu_2 e^{s_2 x}$$

$$y = \lambda_3 e^{s_3 x}\ ; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d'où l'on déduira la solution générale :

$$\begin{aligned} y &= C_1 \lambda_1 e^{s_1 x} + C_2 \lambda_2 e^{s_2 x} + C_3 \lambda_3 e^{s_3 x}, \\ z &= C_1 \mu_1 e^{s_1 x} + C_2 \mu_2 e^{s_2 x} + C_3 \mu_3 e^{s_3 x}, \\ t &= C_1 \nu_1 e^{s_1 x} + C_2 \nu_2 e^{s_2 x} + C_3 \nu_3 e^{s_3 x}; \end{aligned}$$

en admettant toutefois que les trois solutions sont indépendantes, (on peut établir qu'elles le sont en effet si s_1, s_2, s_3 sont distincts).

243. — Si l'équation caractéristique a des racines égales, la méthode précédente ne donne pas n solutions distinctes du système proposé ; on peut en ce cas trouver les solutions qui manquent par un raisonnement analogue à celui de d'Alembert (N° 231).

Pour faire comprendre la méthode, prenons un cas particulier, soit le système :

$$(S') \qquad \begin{aligned} &\frac{dy}{dx} - 3y + z = 0 \\ &\frac{dz}{dx} - 4y + z = 0 \end{aligned}$$

Les équations (8) sont ici :

$$(8') \qquad \begin{cases} \lambda(s-3) + \mu = 0 \\ -4\lambda + \mu(s+1) = 0 \end{cases}$$

d'où l'équation caractéristique :

$$(s-3)(s+1) + 4 = 0 ; \qquad \text{c'est-à-dire } (s-1)^2 = 0$$

Il y a une racine double, $s = 1$.

Modifions infiniment peu les coefficients de la seconde équation du système proposé, de manière que l'équation caractéristique ait deux racines s' et s'' inégales, voisines de 1 ; la première des équations (8'), dont les coefficients dépendent uniquement de ceux de la première équation (S') n'a pas changé ; elle donne pour λ et μ les valeurs proportionnelles

$$\lambda = -1 ; \quad \mu = s - 3$$

d'où les deux solutions du système :

$$(9') \qquad y = -e^{s'x} \qquad z = (s'-3)\, e^{s'x}$$

et

$$y = -e^{s''x} \qquad z = (s''-3)\, e^{s''x}$$

On peut remplacer la seconde par la combinaison :

$$y = -\frac{e^{s''x} - e^{s'x}}{s'' - s'} ; \qquad z = \frac{(s''-3)\, e^{s''x} - (s'-3)\, e^{s'x}}{s'' - s'} ;$$

faisant tendre s'' et s' vers 1, cette solution devient, à la limite :

$$y = -\frac{d}{ds}\left[e^{sx}\right]; \qquad z = \frac{d}{ds}\left[(s-3)e^{sx}\right], \text{ pour } s=1$$

c'est-à-dire

$$y = -xe^{x}; \quad z = e^{x}(1-2x)$$

Cette solution jointe à la solution (9'), où $s'=1$:

$$y = -e^{x}; \quad z = -2e^{x}$$

fournit la solution générale :

$$y = -C_1 e^{x} - C_2 x e^{x}; \quad z = -2C_1 e^{x} + C_2(1-2x)e^{x}$$

qu'on eût aussi obtenue par la méthode du N° 237.

En général, si l'équation caractéristique a une racine, s, multiple d'ordre K, on cherchera des solutions de la forme :

$$y = \lambda_0 e^{sx} + \lambda_1 x e^{sx} + \dots + \lambda_{K-1} x^{K-1} e^{sx}$$
$$z = \mu_0 e^{sx} + \dots\dots\dots + \mu_{K-1} x^{K-1} e^{sx}$$

. . . .

et on déterminera les coefficients $\lambda_i, \mu_i, \dots$ par substitution directe. On trouvera ainsi que ces coefficients dépendent d'une manière linéaire et homogène, de K constantes arbitraires ; d'où K solutions correspondant à la racine multiple d'ordre K.

244. – Remarque I. – Les systèmes d'équations différentielles à coefficients constants, avec ou sans seconds membres, se rencontrent dans un grand nombre de problèmes de mécanique ou de physique mathématique, où on étudie de petits changements d'état d'un système : par exemple, dans la théorie des petites oscillations, des vibrations élastiques, des ondulations lumineuses, des remous, etc....

En effet, dans l'étude de ces phénomènes, on regarde les corps comme composés de molécules séparées, dont chacune a un petit mouvement : soient $y, z, t, \dots$ les distances de ces molécules à leur position d'équilibre, x le temps ; les vitesses $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \dots$ sont supposées fonctions du temps et de la position des molécules à l'instant considéré, en sorte que :

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z, \dots); \quad \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z, \dots); \dots\dots$$

Comme les mouvements sont très petits, $y, z, \ldots$ sont voisins de zéro, et on remplace f_1 par $f_1(x, 0, 0, \ldots) + y\frac{\partial f_1}{\partial y} + z\frac{\partial f_1}{\partial z} + \ldots$, en se bornant aux termes du premier degré en $y, z, \ldots$; les équations du problème sont alors de la forme :

$$\frac{dy}{dx} + P_1 y + Q_1 z + \ldots = V_1$$
$$\frac{dz}{dx} + P_2 y + Q_2 z + \ldots = V_2$$
$$\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

les $P, Q, \ldots V$ étant des fonctions du temps x. C'est un système linéaire à coefficients variables.

Mais, la plupart du temps, le système matériel considéré n'est soumis qu'aux influences mutuelles de ses parties, ou à des actions qui dépendent uniquement de la position de ses molécules, de sorte que le temps, x, ne figure pas explicitement dans les fonctions $f_1, f_2, \ldots$ ni par suite dans les fonctions P, Q, V. Le système d'équations différentielles est alors à coefficients constants, (généralement sans seconds membres) et de là vient l'importance des systèmes de cette nature.

245. - Remarque II. - Il n'est pas nécessaire, pour intégrer un système d'équations linéaires, à coefficients constants, sans seconds membres, de le ramener d'abord à la forme canonique, comme nous l'avons supposé. Soit par exemple le système :

$$A\frac{d^2y}{dx^2} + B\frac{dy}{dx} + Cy + D\frac{d^2z}{dx^2} + E\frac{dz}{dx} + Fz = 0,$$
$$(10) \qquad A'\frac{d^2y}{dx^2} + B'\frac{dy}{dx} + C'y + D'\frac{d^2z}{dx^2} + E'\frac{dz}{dx} + F'z = 0,$$

où $A, B, \ldots F'$ sont des constantes. On l'intègrera de suite en cherchant des solutions de la forme :

$$y = \lambda e^{sx}, \qquad z = \mu e^{sx};$$

Substituant ces valeurs dans les équations proposées, et divisant par e^{sx}, on a :

$$(11)\qquad \lambda\left[As^2+Bs+C\right]+\mu\left[Ds^2+Es+F\right]=0,$$
$$\lambda\left[A's^2+B's+C'\right]+\mu\left[D's^2+E's+F'\right]=0;$$

d'où :

$$\begin{vmatrix} As^2+Bs+C & Ds^2+Es+F \\ A's^2+B's+C' & D's^2+E's+F' \end{vmatrix}=0$$

équation en s qui a quatre racines, s_1, s_2, s_3, s_4. Pour $s=s_1$, les deux équations (11) se réduisent à une seule, la première par exemple, d'où l'on tire les valeurs proportionnelles de λ et μ, ce qui donne la solution :

$$y_1=(Ds_1^2+Es_1+F)e^{s_1x}\ ; \qquad z_1=-\left[As_1^2+Bs_1+C\right]e^{s_1x}$$

Les racines s_2, s_3, s_4 donneraient de même des solutions y_2, z_2 ; y_3, z_3 ; y_4, z_4, et il est clair, qu'on aura une solution du système (10) en posant :

$$y=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3+C_4y_4\ ; \qquad z=C_1z_1+C_2z_2+C_3z_3+C_4z_4\ ;$$

a priori cette solution est la solution générale, car elle renferme quatre constantes arbitraires, et le système (10), ramené à la forme canonique, serait d'ordre quatre.

Si l'équation en s avait des racines égales, on opèrerait comme au N° 243.

IV. – Étude des intégrales d'une équation linéaire.

---

246. – Comme on l'a dit au N° 212 l'intégrale générale d'une équation linéaire (sans second membre) où le coefficient de la plus haute dérivée a été ramené à l'unité, n'a pas d'autres points critiques à distance finie que ceux des coefficients de l'équation : dès lors, pour connaître la nature analytique de l'intégrale générale, il importe de l'étudier au voisinage de ces points critiques ; nous ferons cette étude dans l'hypothèse où l'équation est du second ordre,

on verra aisément que la méthode et les résultats sont généraux.

247. – Soit donc l'équation du second ordre :

(1) $$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = 0,$$

où p_1 et p_2 sont des fonctions de x, dont l'une au moins admet comme point critique le point $x = a$; on supposera que a est, pour cette fonction, un pôle ou un point singulier essentiel, de telle sorte que $p_1(x)$ et $p_2(x)$ reprennent la même valeur quand la variable x décrit un petit cercle autour du point a.

Cela posé, soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ deux solutions indépendantes de l'équation (1) : si x décrit un petit cercle autour de a dans le sens positif, l'équation (1) ne change pas, et sa solution générale reste de la forme $C_1 y_1 + C_2 y_2$; $y_1(x)$ au contraire peut changer, et revenir au point de départ, x, avec une valeur nouvelle, $Y_1(x)$; mais comme $Y_1(x)$ est encore solution de (1), on a :

(2) $$Y_1(x) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \, ; \ldots\ldots\ldots (\lambda_1, \lambda_2 = \text{const})$$

et de même, en désignant par Y_2 ce que devient y_2 quand x tourne une fois autour de a :

(a) $$Y_2(x) = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 \, ; \ldots\ldots\ldots (\mu_1, \mu_2 = \text{const})$$

D'après cela, α_1 et α_2 désignant des constantes, la solution $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ devient $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2$, c. à. d. $(\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\mu_1)y_1 + (\alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\mu_2)y_2$: cherchons à déterminer α_1 et α_2 de manière que cette solution se reproduise multipliée par un facteur constant, S. Il faut que :

(4) $$\begin{aligned} \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\mu_1 &= S\alpha_1 \\ \alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\mu_2 &= S\alpha_2 \end{aligned}$$

d'où en éliminant le rapport $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$:

(5) $$\begin{vmatrix} \lambda_1 - S & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 - S \end{vmatrix} = 0,$$

équation du second degré en S, dont nous désignerons les racines par S_1 et S_2.

248. — Supposons d'abord $S_1 \gtrless S_2$. Pour $S = S_1$ ou $S = S_2$, les équations (4) en α_1 et α_2 sont compatibles, et donnent des valeurs proportionnelles de ces constantes, ce qui détermine deux solutions de l'équation différentielle proposée, et deux seulement :[1]

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \text{ ou } z_1(x) \qquad \alpha_1' y_1 + \alpha_2' y_2, \text{ ou } z_2(x),$$

qui se reproduisent multipliées respectivement par des constantes (S_1 et S_2) quand x tourne une fois, dans le sens positif, autour du point $x = a$.

Je dis que ces deux solutions sont distinctes, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de relation identique de la forme

$$(6) \qquad C_1 z_1(x) + C_2 z_2(x) = 0. \qquad (C_1, C_2 = \text{const})$$

En effet si une pareille relation existé identiquement, elle subsisté quand x décrit un cercle autour de a ; c'est-à-dire qu'on a aussi :

$$C_1 S_1 z_1(x) + C_2 S_2 z_2(x) = 0,$$

d'où l'on conclut, par comparaison avec (6) : $S_1 = S_2$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

De là se déduit aisément la nature des fonctions z_1 et z_2 autour du point a.

En effet, la fonction $(x-a)^q$, quand x tourne une fois autour de a dans le sens positif se reproduit (N° 43) multipliée par $e^{2q\pi i}$; si donc on choisit q de manière que $e^{2q\pi i} = S_1$, (ou $q = \frac{1}{2\pi i} \log S_1$), la fonction se reproduira multipliée par S_1, comme la fonction $z_1(x)$: il en résulte que le quotient

$$\frac{z_1(x)}{(x-a)^{\frac{1}{2\pi i}\log S_1}}$$

se reproduit multiplié par $\frac{S_1}{S_1} = 1$, c'est-à-dire est uniforme autour du point a. Ce point ne peut donc être, pour le quotient, qu'un point ordinaire, un pôle, ou un point singulier essentiel. Donc, autour de a on aura :

$$(7) \qquad z_1(x) = (x-a)^{\frac{1}{2\pi i}\log S_1} G_1(x),$$

[1] En regardant comme une seule solution $z_1(x)$ et $C_1 z_1(x)$, où $C_1 = \text{const.}$

$G_1(x)$ étant une fonction uniforme autour de a, développable par la série de Laurent (N° 62, p. 60) sous la forme :

(8) $$G_1(x) = \cdots + \frac{B_n}{(x-a)^n} + \cdots + \frac{B_1}{x-a} + A_0 + A_1(x-a) + \cdots + A_n(x-a)^n + \cdots$$

Les termes à puissances négatives en $x-a$ disparaissent complètement ou ne sont qu'en nombre limité, si a est un point ordinaire ou un pôle de $G(x)$. On a de même :

(9) $$z_2(x) = (x-a)^{\frac{1}{2\pi i}\log S_2}\, G_2(x),$$

$G_2(x)$ ayant, autour du point a, un développement de la forme (8).

Ainsi :

L'équation (5) en S ayant ses racines S_1 et S_2 distinctes, l'équation différentielle proposée (1) admet deux solutions (et deux seulement), z_1 et z_2, des formes :

(10) $$z_1 = (x-a)^{r_1}\, G_1(x) \ ; \qquad z_2 = (x-a)^{r_2}\, G_2(x),$$

où $r_1 = \frac{1}{2\pi i}\log S_1$; $r_2 = \frac{1}{2\pi i}\log S_2$, et où $G_1(x)$ et $G_2(x)$ sont des fonctions uniformes aux environs de a, développables autour de ce point par la série de Laurent.

L'intégrale générale de la proposée étant $C_1 z_1 + C_2 z_2$ est dès lors d'une forme connue autour du point a.

249. – Remarque. – Si on était parti primitivement de deux solutions autres que y_1 et y_2, également indépendantes entre elles, on aurait été conduit à la même équation (5) en S : car il n'y a que deux solutions de l'équation différentielle (1) qui se reproduisent multipliées par des constantes, ainsi qu'on l'a vu plus haut. On retrouvera donc, pour les deux constantes, les mêmes valeurs, S_1 et S_2, que dans le premier calcul. Il en résulte que les coefficients de l'équation en S, ou plutôt leurs rapports, sont des invariants, c'est-à-dire ne dépendent que de l'équation (1), et non des solutions y_1, y_2 choisies primitivement.

250. – Supposons maintenant $S_1 = S_2$. On voit, comme plus haut, que l'équation proposée (1) admet une solution, z_1, de la forme :

(7_1) $$z_1 = (x-a)^{\frac{1}{2\pi i}\log S_1}\, G_1(x),$$

qui se reproduit multipliée par S_1 quand x tourne une fois autour du point a dans le sens positif. Prenons maintenant, pour solutions indépendantes de (1), les solutions y_1 et z_1 ; quand x tourne autour de a, y_1 devient

$$Y_1 = \rho_1\, y_1 + \rho_2\, z_1 \;;$$

et comme z_1 devient $S z_1$, l'équation en S est :

$$\begin{vmatrix} \rho_1 - S & 0 \\ \rho_2 & S_1 - S \end{vmatrix} = 0$$

Pour qu'elle admette la racine double S_1, il faut que $\rho_1 = S_1$. Donc :

$$Y_1 = S_1\, y_1 + \rho_2\, z_1 \;;$$

ou

$$\frac{Y_1}{S_1 z_1} = \frac{y_1}{z_1} + \frac{\rho_2}{S_1}$$

Or la fonction $\frac{y_1}{z_1}$, lorsque x décrit un cercle autour de a dans le sens positif, devient $\frac{Y_1}{S_1 z_1}$; la relation précédente montre par suite qu'elle se reproduit à la constante additive près $\frac{\rho_2}{S_1}$.

La fonction $\frac{\rho_2}{2\pi i S_1} \log(x-a)$ jouit évidemment de la même propriété, de sorte que la différence :

$$\frac{y_1}{z_1} - \frac{\rho_2}{2\pi i S_1} \log(x-a)$$

est une fonction uniforme $K(x)$, autour du point a, c. à. d. une fonction développable autour de ce point par la série de Laurent (N° 248).

On a donc :

$$y_1 = z_1 \frac{\rho_2}{2\pi i S_1} \log(x-a) + z_1 K(x),$$

c'est-à-dire en remplaçant z_1 par sa valeur (7) :

$$y_1 = (x-a)^{\frac{1}{2\pi i}\log S_1} \Big[K_1(x) + k \log(x-a)\, G_1(x) \Big]$$

$K_1(x) = K(x)\, G_1(x)$ étant une fonction de même nature que K et G_1, et k désignant une constante. Ainsi :

L'équation (5) en S ayant ses racines égales à S_1, l'équation différentielle proposée admet deux solutions, z_1 et y_1 des formes

$$(11) \qquad z_1 = (x-a)^{r_1} G(x) ; \qquad y_1 = (x-a)^{r_1} \left[K_1(x) + h \log(x-a)\, G_1(x) \right],$$

où $r_1 = \frac{1}{2\pi i} \log S_1$, et où G_1 et K_1 sont des fonctions uniformes aux environs de a, développables autour de ce point par la série de Laurent.

L'intégrale générale étant $C_1 z_1 + C_1' y_1$ est dès lors d'une forme connue autour du point a.

251. – Il résulte de cette étude que les propriétés de l'intégrale générale aux environs du point a sont liées à l'équation en S qui correspond à ce point ; mais on ne sait pas former facilement et directement cette équation dans le cas général, parce que les coefficients λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 qui y figurent sont inconnus. Il serait également très difficile de calculer les coefficients des développements en séries de Laurent des fonctions G_1, G_2 ou K_1.

On se bornera donc, dans ce qui suit, à l'étude d'un cas particulier très étendu qui est d'ailleurs le plus intéressant.

Ce cas est celui où les fonctions G_1, G_2 et K_1 admettent le point a comme pôle ou point ordinaire : leurs développements en série de Laurent sont alors limités du côté des puissances négatives ; et on dit que l'intégrale générale est régulière autour du point a. Nous particulariserons encore le cas en supposant que le terme en $\log(x-a)$ disparaît dans la solution générale : ce terme n'existe pas si $S_1 \gtrless S_2$ (équation 10) ; pour $S_1 = S_2$ il disparaîtra lorsque $k = 0$ (équation 11).

En vertu de ces hypothèses et des formules (10) ou (11), l'équation différentielle aura deux solutions indépendantes des formes $z_1 = (x-a)^{r_1} G_1(x)$ $z_2 = (x-a)^{r_2} G_2(x)$, G_1 et G_2 admettant le point a comme pôle ou comme point ordinaire, et r_1 pouvant être égal à r_2. D'ailleurs, si a est un pôle d'ordre α de $G_1(x)$, $(x-a)^{\alpha} G_1(x)$, sera une fonction holomorphe autour du point a ; désignant cette fonction par $H_1(x)$, on a la solution

$$z_1 = (x-a)^{r_1-\alpha} H_1(x),$$

c'est-à-dire que la proposée admettra deux solutions distinctes

des formes $(x-a)^{r_1} H_1(x)$, $(x-a)^{r_2} H_2(x)$, H_1 et H_2 étant holomorphes autour du point a.

La première question qui se pose est de reconnaître, sur l'équation différentielle proposée, dans quel cas il en sera effectivement ainsi ; de là le problème suivant, qu'on va chercher à résoudre :

Énoncé et solution du Problème.

252. – Étant donnée l'équation linéaire :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = 0$$

trouver les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir les fonctions $p_1(x)$ et $p_2(x)$ pour que, autour d'un point $x = a$, du plan, l'équation admette deux solutions distinctes de la forme

$$(x-a)^{r_1} H_1(x) \; ; \qquad (x-a)^{r_2} H_2(x),$$

$H_1(x)$ et $H_2(x)$ étant holomorphes autour du point a[1].

Remarques. – 1° On pourra supposer $H_1(a)$ et $H_2(a) \gtrless 0$: sinon $H_1(x)$, par exemple, développé par la formule de Taylor : $H_1(x) = H_1(a) + (x-a)H_1'(a) + \cdots\cdots$ contiendrait en facteur une certaine puissance de $x-a$, qu'on pourrait réunir à $(x-a)^{r_1}$, ce qui ne ferait que changer la valeur de la constante r_1.

Par suite en multipliant H_1 et H_2 par un facteur constant convenable, on pourra supposer $H_1(a) = H_2(a) = 1$; de sorte que, en développant $H_1(x)$ et $H_2(x)$ par la formule de Taylor, l'équation proposée devra admettre les deux solutions :

$$z_1 = (x-a)^{r_1} + C_1(x-a)^{r_1+1} + C_2(x-a)^{r_1+2} + \cdots\cdots$$

$$z_2 = (x-a)^{r_2} + C_1'(x-a)^{r_2+1} + C_2'(x-a)^{r_2+2} + \cdots\cdots$$

les deux séries étant convergentes autour du point $x = a$.

2° Observons que si $r_1 = r_2$, l'équation différentielle admettra la solution

$$z_1 - z_2 = C_1''(x-a)^{r_1+1} + C_2''(x-a)^{r_1+2} + \cdots\cdots$$

---

(1) Dans tout ce qui suit la lettre H désignera une fonction holomorphe autour du point a.

qui commence par un terme en $(x-a)^{r_1+h}$; h étant entier et $\geqq 1$.

On aura donc toujours le droit de supposer $r_2 \gtrless r_1$, puisque si r_2 était égal à r_1, on remplacerait z_2 par la solution $z_1 - z_2$, qui correspond à l'exposant r_1+h.

253. – Théorème. – Pour que l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = 0$ admette deux solutions distinctes des formes $z_1 = (x-a)^{r_1} H_1(x)$; $z_2 = (x-a)^{r_2} H_2(x)$, H_1 et H_2 étant holomorphes autour du point a, il est nécessaire (mais non suffisant) que a soit un point ordinaire ou un pôle d'ordre i au plus pour la fonction p_i $(i=1,2)$.

En effet, en exprimant que $(x-a)^{r_1} H_1(x)$ est une solution de l'équation on obtient, après division par $(x-a)^{r_1-2}$:

$$0 = \left[r_1(r_1-1)H_1(x) + 2r_1(x-a)H_1'(x) + (x-a)^2H_1''(x)\right] + p_1(x-a)\left[r_1H_1 + (x-a)H_1'\right] + p_2(x-a)^2H_1$$

De même, en écrivant que $(x-a)^{r_2} H_2$ est une solution :

$$0 = \left[r_2(r_2-1)H_2(x) + \cdots\cdots\cdots\right] + p_1(x-a)\left[r_2H_2 + (x-a)H_2'\right] + p_2(x-a)^2H_2$$

On tire de là, pour $p_1(x-a)$ et $p_2(x-a)^2$, deux valeurs, dont le dénominateur commun est la fonction holomorphe $(r_1-r_2)H_1(x)H_2(x) + (x-a)\left[H_2H_1' - H_1H_2'\right]$, et dont le numérateur est aussi une fonction holomorphe de x aux environs de $x=a$. Or le dénominateur ne s'annule pas pour $x=a$, car il se réduit à $(r_1-r_2)H_1(a)H_2(a)$, quantité non nulle, puisque $H_1(a) = H_2(a) = 1$ et que $r_1 \gtrless r_2$; on en conclut que $(x-a)p_1(x)$ et $(x-a)^2p_2(x)$ sont holomorphes autour du point a, c. à. d. que $p_1(x)$ admet a comme point ordinaire ou comme pôle d'ordre un au plus ; et que p_2 l'admet comme point ordinaire ou comme pôle d'ordre deux au plus. C. q. f. d.

D'ailleurs si a est point ordinaire pour les deux fonctions $p_1(x)$ et $p_2(x)$, l'intégrale générale de l'équation proposée est holomorphe autour de a, d'après le théorème de Cauchy (N° 212), il n'y a donc à étudier que le cas où a est un pôle de l'une au moins des deux fonctions.

254. – Soit donc a un pôle d'ordre un, au plus, pour $p_1(x)$, et deux, au plus, pour $p_2(x)$; on a autour de ce point :

$$p_1(x) = \frac{A}{x-a} + \alpha_0 + \alpha_1 (x-a) + \alpha_2 (x-a)^2 + \cdots$$

(12)
$$p_2(x) = \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-a} + \beta_0 + \beta_1 (x-a) + \cdots$$

les coefficients A, B, C pouvant être nuls, mais non simultanément, car a est un pôle pour l'une au moins des deux fonctions.

Exprimons maintenant que l'équation différentielle proposée admet une solution de la forme :

$$z = (x-a)^r H(x), \text{ c. à. d. } = (x-a)^r + C_1 (x-a)^{r+1} + C_2 (x-a)^{r+2} + \cdots$$

Il vient, en remplaçant dans l'équation p_1 et p_2 par leurs valeurs (12) :

(13)
$$\begin{aligned} 0 = {} & r(r-1)(x-a)^{r-2} + C_1 (r+1) r (x-a)^{r-1} + C_2 (r+2)(r+1)(x-a)^r + \cdots \\ & + \left[r(x-a)^{r-1} + C_1 (r+1)(x-a)^r + C_2 (r+2)(x-a)^{r+1} + \cdots \right] \left[\frac{A}{x-a} + \alpha_0 + \alpha_1 (x-a) + \cdots \right] \\ & + \left[(x-a)^r + C_1 (x-a)^{r+1} + C_2 (x-a)^{r+2} + \cdots \right] \left[\frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-a} + \beta_0 + \beta_1 (x-a) + \cdots \right] \end{aligned}$$

Égalons à zéro les coefficients des diverses puissances de $(x-a)$ dans le second membre.

Le terme de moindre degré est celui en $(x-a)^{r-2}$, qui donne :

(14)
$$r(r-1) + Ar + B = 0$$

De même le terme suivant, en $(x-a)^{r-1}$, donne :

(15)
$$C_1 \left[(r+1) r + A (r+1) + B \right] + \alpha_0 r + C = 0$$

et, en général, le terme en $(x-a)^{r+m-2}$ donne :

(16)
$$C_m \left[(r+m)(r+m-1) + A (r+m) + B \right] + C_{m-1} (\quad) + C_{m-2} (\quad) + \cdots = 0$$

L'équation (14) ne contient, comme quantité inconnue que r ; elle détermine donc r, et donne pour r deux valeurs, qui seront nécessairement les deux quantités r_1 et r_2, correspondant aux deux solutions z_1 et z_2. Cette équation s'appelle l'équation déterminante

relative au point a ; nous désignerons son premier membre par $F(r)$:

$$F(r) = r(r-1) + Ar + B$$

L'équation (15), qui s'écrit :

$$c_1 F(r+1) + \alpha_0 r + C = 0$$

donne c_1, pourvu que $F(r+1) \gtrless 0$; et de même, en général, l'équation (16), où le coefficient de c_m est $F(r+m)$, donnera c_m en fonction des coefficients précédents, pourvu que $F(r+m) \gtrless 0$.

Il y a dès lors deux cas à distinguer.

255. _ Premier cas. _ Les racines r_1 et r_2 de l'équation déterminante ont une différence qui n'est pas un nombre entier.

Dans ce cas, en faisant $r = r_1$ dans les équations (15) et (16), on détermine successivement, sans ambiguïté ni impossibilité, les coefficients c_1, c_2, ... c_m .... : En effet aucune des quantités $F(r_1+1)$, $F(r_1+2)$ ... $F(r_1+m)$... n'est nulle, puisque $F(r)$ ne s'annule que pour $r = r_1$, $r = r_2$ et que r_2 n'est pas de la forme $r_1 + m$, par hypothèse. On obtient ainsi le développement d'une solution z_1 :

$$z_1 = (x-a)^{r_1} \left[1 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots\cdots \right]$$

et il ne resterait, pour compléter le raisonnement, qu'à établir la convergence de la série, (tout au moins pour les valeurs de mod $(x-a)$ assez petites) point que nous admettrons sans démonstration. (Théorème de Fuchs).

On fait le même raisonnement avec la racine r_2, et on détermine de même la solution z_2. Donc enfin :

Si a est un pôle d'ordre un au plus pour $p_1(x)$, deux au plus pour $p_2(x)$, et si l'équation déterminante, relative au point a, a pour racines deux quantités r_1 et r_2, dont la différence n'est pas entière, l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = 0$ admet deux solutions (évidemment distinctes) z_1 et z_2, des formes :

(17) $$z_1 = (x-a)^{r_1} H_1(x) \; ; \qquad z_2 = (x-a)^{r_2} H_2(x) \; ;$$

$H_1(x)$ et $H_2(x)$ étant holomorphes autour du point a, et non nuls pour $x = a$.

256. – Deuxième cas. – Les racines r_1 et r_2 de l'équation déterminante ont pour différence un nombre entier.

a) Si ce nombre est nul, c'est-à-dire si $r_1 = r_2$, il est impossible que l'équation admette deux solutions distinctes de la forme $(x-a)^{q_1} H_1(x)$ et $(x-a)^{q_2} H_2(x)$: en effet, si ces solutions existaient, d'après les calculs du N° 254, q_1 et q_2 seraient les racines de l'équation déterminante, c'est-à-dire que nécessairement on aurait $q_1 = q_2 = r_1$; mais on a vu qu'on avait le droit de supposer $q_1 \gtrless q_2$ (N° 252 Remarque 2°) : les deux solutions ne peuvent donc exister. Mais on voit comme au N° précédent qu'il existe une solution de la forme $(x-a)^{r_1} H_1(x)$.

b). Si la différence $r_2 - r_1$ est entière et non nulle, soit r_1 la plus petite des deux racines ; on aura $r_2 = r_1 + n$, n étant $\geqq 1$.

En ce cas, il y a toujours une solution de la forme $(x-a)^{r_2} H_2(x)$: en effet, $F(r)$ n'admettant pas de racine supérieure à r_2 les quantités $F(r_2+1)$, $F(r_2+2)$, ... $F(r_2+m)$... sont toutes différentes de zéro, et le calcul des coefficients C' du développement :

$$z_2 = (x-a)^{r_2}\left[1 + C'_1(x-a) + C'_2(x-a)^2 + \cdots\cdots\right]$$

se fait sans ambiguïté ni impossibilité, comme on l'a vu au N° précédent.

Reste à voir s'il existe une solution de la forme $(x-a)^{r_1} H_1(x)$, c'est-à-dire :

$$z_1 = (x-a)^{r_1}\left[1 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \cdots\cdots\right]$$

Le calcul des coefficients C se fait sans difficulté jusqu'au coefficient C_n, n étant l'entier défini ci-dessus, car $F(r_1+1)$, $F(r_1+2)$... $F(r_1+n-1)$ sont $\gtrless 0$.

Au contraire, l'équation (16) qui doit donner C_n est :

$$(16^{bis}) \qquad C_n F(r_1+n) + C_{n-1}(\quad) + C_{n-2}(\quad) + \cdots\cdots = 0 ;$$

et le coefficient de C_n, $F(r_1+n)$, c. à. d. $F(r_2)$, est nul. Il reste alors une équation entre les quantités C_{n-1}, C_{n-2}, ... C_1 précédemment déterminées ; et si l'on remplace ces quantités par leurs valeurs on obtient ainsi une relation entre r_1 et les coefficients des développements (12) de $p_1(x)$ et $p_2(x)$ autour du point $x = a$.

Si cette relation n'est pas vérifiée, et c'est le cas général, le calcul des coefficients C est impossible, c. à. d. qu'il n'existe certainement

pas de solution de la forme $(x-a)^{r_1} H_1(x)$.

Si elle est vérifiée, l'équation qui suit celle qui devait donner C_n fournira C_{n+1} en fonction de C_n, C_{n-1}, … C_1 ; la suivante donnera C_{n+2}, et ainsi de suite, sans impossibilité : le coefficient C_n restera donc indéterminé. Il y aura donc une infinité de solutions de la forme $(x-a)^{r_1} H_1(x)$, ayant les mêmes termes en $(x-a)$ jusqu'au terme $C_n(x-a)^{r_1+n}$ exclusivement : ce résultat pouvait être prévu : car s'il existe une solution $(x-a)^{r_1} H_1(x)$ et une solution $(x-a)^{r_2} H_2(x)$, on aura la solution $(x-a)^{r_1}\left[H_1(x)+\lambda(x-a)^n H_2(x)\right]$, λ étant une constante arbitraire, et on voit bien que le coefficient du terme en $(x-a)^n$ dans le crochet est indéterminé.

De là résultent, en admettant toujours la convergence des développements obtenus, ces propositions :

Si a est un pôle d'ordre un au plus pour $p_1(x)$, deux au plus pour $p_2(x)$, et si les racines r_1, r_2 de l'équation déterminante sont égales, l'équation différentielle proposée admettra une solution de la forme $(x-a)^{r_1} H_1(x)$, mais n'en admettra jamais une seconde.

Dans les mêmes conditions, si la différence $r_2 - r_1$ est entière, et si $r_2 > r_1$, il y aura toujours une solution de la forme $(x-a)^{r_2} H_2(x)$; pour qu'il y ait aussi une solution de la forme $(x-a)^{r_1} H_1(x)$, il faut et il suffit qu'une certaine condition auxiliaire [1] soit vérifiée par les coefficients de l'équation différentielle.

Dans ces énoncés, les $H(x)$ désignent toujours des fonctions holomorphes autour du point a, non nulles pour $x = a$.

---

(1) La condition auxiliaire se forme aisément. En effet, si on se reporte au N° 256 b), les équations successives qui donnent C_1, C_2, … C_{n-1} sont linéaires par rapport à ces quantités ; l'équation (16 bis) l'est également, et par suite l'élimination de C_1, C_2, … C_{n-1} entre ces relations conduit à égaler à zéro un déterminant. Les éléments du déterminant sont les coefficients des quantités C_i, c'est-à-dire des fonctions connues de r_1 et des coefficients (connus) A, B, C, α_0, … α_i, … β_0, … β_i, … qui figurent dans les développements (12) de $p_1(x)$ et $p_2(x)$ autour du point $x = a$.

Résumé. – En résumé, pour que l'équation $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$ admette, autour du point $x = a$, deux solutions distinctes des formes $(x-a)^{r_1} H_1(x)$, $(x-a)^{r_2} H_2(x)$, il faut et il suffit :

1° que a soit pour $p_i(x)$ un point ordinaire, ou un pôle d'ordre i, au plus.

Si c'est un point ordinaire pour les deux fonctions p_i toutes les solutions de l'équation proposée sont holomorphes autour de ce point, sans qu'il y ait d'autres conditions à vérifier. Si c'est un pôle de l'une au moins des deux fonctions, il faut et il suffit en outre :

2° que l'équation déterminante relative au point a ait ses racines distinctes : ces racines sont alors les quantités r_1 et r_2.

3° que, si la différence $r_2 - r_1$ est entière, une condition auxiliaire, facile à former, soit satisfaite.

Applications

258. – I. – Reconnaître si l'intégrale de l'équation $y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0$ est méromorphe dans tout le plan (à distance finie).

Il faut et il suffit, pour que l'intégrale soit méromorphe dans tout le plan, qu'elle n'ait comme points critiques à distance finie que des pôles. Les points critiques ne peuvent être que ceux de $p_1(x)$ et $p_2(x)$, d'après les théorèmes généraux de Cauchy (N° 212), soit à l'un d'un. Pour que l'intégrale générale soit méromorphe autour de a, il faut et il suffit que l'équation admette autour de a deux solutions distinctes, méromorphes ou holomorphes, c. à. d. des formes $(x-a)^{r_1} H_1(x)$ et $(x-a)^{r_2} H_2(x)$, r_1 et r_2 étant entiers négatifs ou positifs ; donc, en vertu de la théorie générale précédente ; 1° a devra être pour $p_i(x)$ un point ordinaire ou un pôle d'ordre i au plus ; 2° l'équation déterminante correspondante devra avoir ses racines distinctes et entières, et 3° la condition auxiliaire devra être satisfaite. Il devra en être de même pour tous les points critiques de p_1 et p_2. Voici donc le résultat.

Pour que l'intégrale générale soit méromorphe dans tout le plan il faut et il suffit :

1° que $p_1(x)$ et $p_2(x)$ soient des fonctions méromorphes dans tout

le plan, avec des pôles respectifs d'ordre un et deux, au plus;

2° Qu'en chacun de ces pôles, a, l'équation déterminante ait ses deux racines distinctes et entières;

3° Que la condition auxiliaire correspondante y soit vérifiée.

Soit alors r_1 la plus petite racine de l'équation déterminante relative au point a; le point a est pour l'intégrale générale $C_1(x-a)^{r_1} H_1(x) + C_2 (x-a)^{r_2} H_2(x)$, un zéro d'ordre r_1 (point ordinaire) ou un pôle d'ordre $-r_1$, selon que r_1 est positif ou négatif. (car $H_1(a) \gtrless 0$).

On connaît ainsi les pôles de l'intégrale générale, dans le cas où elle est méromorphe, et l'ordre de multiplicité de chacun d'eux.

Remarque. – On peut également reconnaître si l'intégrale générale a un point critique à l'infini. Il suffit pour cela de faire dans l'équation différentielle le changement de variable indépendante $x = \frac{1}{u}$; on obtient ainsi une équation nouvelle en y et u, et on reconnaît par la méthode précédente, si le point $u=0$ est, ou non un point ordinaire ou un pôle pour l'intégrale générale de l'équation transformée.

259. – II. – Reconnaître si l'intégrale générale de l'équation $y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0$ est holomorphe dans tout le plan (à distance finie).

Le raisonnement est le même que ci-dessus, seulement a ne pourra plus être un pôle pour l'intégrale générale; ce devra être un point ordinaire, c'est-à-dire qu'en outre des conditions du N° précédent, r_1 et r_2 devront être positifs (ou nuls). Donc:

Pour que l'intégrale générale soit holomorphe dans tout le plan, il faut et il suffit:

1° que $p_1(x)$ et $p_2(x)$ soient des fonctions méromorphes dans tout le plan, avec des pôles respectifs d'ordres un et deux au plus;

2° Qu'en chacun de ces pôles l'équation déterminante ait ses des racines distinctes, entières et non négatives.

3° Que la condition auxiliaire correspondante y soit vérifiée.

Dans le cas où $p_1(x)$ et $p_2(x)$ sont holomorphes dans tout le plan, l'intégrale générale l'est également, sans autres conditions, d'après le théorème général du N° 212 ; c'est ce qui se produit, par exemple, dans le cas des équations linéaires à coefficients constants, dont l'intégrale est une somme de termes de la forme $e^{sx} P_m(x)$.

260. _ III. _ Reconnaître si l'intégrale générale de l'équation $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$ est une fonction rationnelle de x.

Une fonction rationnelle $f(x)$ est méromorphe dans tout le plan ; de plus elle admet le point $x=\infty$ comme point ordinaire ou comme pôle, car $f\left(\frac{1}{u}\right)$ est une fonction rationnelle de u, et admet le point $u=0$ comme point ordinaire ou comme pôle.

Donc il est nécessaire : A) que les conditions du N° 258 soient satisfaites pour tous les pôles de $p_1(x)$ et $p_2(x)$ à distance finie ; B) que, si on pose $x=\frac{1}{u}$ pour obtenir l'équation transformée :

$$\frac{d^2y}{du^2}+\varpi_1(u)\frac{dy}{du}+\varpi_2(u)y=0,$$

1° le point $u=0$ soit un point ordinaire ou un pôle d'ordre i au plus pour la fonction $\varpi_i(u)$ $[i=1,2]$; 2° que l'équation déterminante relative au point $u=0$ ait ses deux racines distinctes et entières ; 3° que la condition auxiliaire correspondante soit vérifiée.

Ces conditions nécessaires sont suffisantes ; si elles sont remplies, l'intégrale générale est méromorphe dans tout le plan et au point ∞ ; on en conclut qu'elle est rationnelle en vertu de ce théorème qu'on énoncera sans démonstration.

« Toute fonction, méromorphe dans tout le plan et pour laquelle le point ∞ est un point ordinaire ou un pôle, est une fonction rationnelle. »

On peut traiter la question d'une autre manière, en l'étendant un peu.

Reconnaître si l'équation $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$ admet une intégrale particulière rationnelle.

On supposera toutefois que $p_1(x)$ et $p_2(x)$ sont méromorphes

dans tout le plan, avec des pôles respectifs d'ordres un et deux, au plus; et aussi que, si on pose $x = \frac{1}{u}$, les coefficients $\varpi_1(u)$ et $\varpi_2(u)$ de l'équation transformée, $\frac{d^2y}{du^2} + \varpi_1(u)\frac{dy}{du} + \varpi_2(u)y = 0$, admettent respectivement le point $u=0$ comme point ordinaire ou comme pôle d'ordre un et deux, au plus. Ces conditions sont d'ailleurs nécessaires, comme on vient de le voir, pour que l'équation proposée ait deux intégrales rationnelles distinctes.

Cela étant, soit a un pôle de $p_1(x)$ ou $p_2(x)$; une fonction rationnelle quelconque peut se mettre sous la forme $(x-a)^r H(x)$, r étant entier, positif, nul ou négatif, $H(x)$ étant holomorphe aux environs du point a, et $H_1(a) \gtrless 0$. Si cette fonction vérifie l'équation proposée, r est nécessairement une des racines, r_1 et r_2, de l'équation déterminante du point a; donc, en premier lieu :

Pour chaque pôle de $p_1(x)$ et $p_2(x)$, l'équation déterminante doit avoir au moins une racine entière.

Soit alors r_1 la racine entière, ou la plus petite racine dans le cas où elles sont toutes deux entières; on a $r = r_1$ ou $r = r_2$, la seconde hypothèse n'étant à accepter que si r_1 et r_2 sont entiers, c. à d. si $r_2 = r_1 + n$; par suite, en désignant par $f(x)$ la fonction rationnelle solution de l'équation proposée, on a :

$$f(x) = (x-a)^{r_1} H_1(x) \; ; \quad \text{ou } f(x) = (x-a)^{r_1+n} H_2(x),$$

H_1 et H_2 étant holomorphes autour de a, et $H_1(a)$, $H_2(a) \gtrless 0$; formules qui sont comprises dans la formule unique

$$f(x) = (x-a)^{r_1} H_1(x)$$

$H_1(x)$ pouvant s'annuler pour $x=a$. Il résulte de là que, si r_1 est négatif, a est pour $f(x)$ un pôle d'ordre $-r_1$, au plus; si r_1 est positif ou nul, a est un zéro d'ordre r_1, au moins.

Soient alors a', a'', ... les pôles de $p_1(x)$ ou $p_2(x)$ pour lesquels la racine r_1 est positive ou nulle, r_1', r_1'' .. les valeurs correspondantes de cette racine; soient de même b', b'', ... les pôles de $p_1(x)$ ou $p_2(x)$ pour lesquels la racine r_1 est négative $-s_1'$, $-s_1''$, ... les valeurs correspondantes de r_1.

La fonction rationnelle $f(x)$, solution de l'équation proposée,

ne peut avoir d'autres points critiques que les pôles de $p_1(x)$ et $p_2(x)$, c'est-à-dire d'après ce qui précède, que ses pôles sont $b', b'', \ldots\ldots$ avec les ordres respectifs $s_1', s_1'', \ldots$ au plus. D'ailleurs $a', a'', \ldots$ sont, pour $f(x)$, des zéros d'ordres $r_1', r_1'', \ldots$ au moins, de sorte que $f(x)$ est de la forme :

$$f(x) = \frac{(x-a')^{r_1'}(x-a'')^{r_1''}\ldots\ldots P(x)}{(x-b')^{s_1'}(x-b'')^{s_1''}\ldots\ldots\ldots}$$

$P(x)$ désignant un polynôme entier.

La dénomination de $f(x)$ est donc connu ; au numérateur, le polynôme $P(x)$ seul est inconnu, mais on peut assigner une limite à son degré.

Soit en effet d_1 le degré du numérateur de $f(x)$; d celui du dénominateur (qui est connu) ; si l'on pose $x = \frac{1}{u}$, $f(x) = f\left(\frac{1}{u}\right)$ est de la forme $u^{d-d_1} H(u)$, $H(u)$ étant holomorphe de $u=0$, et $H(0) \gtrless 0$. Il en résulte que $d-d_1$ est une des racines de l'équation déterminante relative au point $x=\infty$ (c. à. d. $u=0$) ; donc :

L'équation déterminante relative au point ∞ doit avoir au moins une racine entière.

Soit m_1 cette racine, ou la plus petite des racines m_1, m_2 si elles sont toutes deux entières, on a $d-d_1 = m_1$ ou $d-d_1 = m_2$, la dernière hypothèse n'étant à accepter que si m_1 et m_2 sont entiers. Dans tous les cas $d-d_1 \geqq m_1$; ou

$$d_1 \leqq d - m_1$$

ce qui donne une limite supérieure du degré, d_1, du numérateur de $f(x)$. Pour le degré, δ, de $P(x)$ on a ainsi

$$\delta \leqq d - m_1 - (r_1' + r_1'' + \ldots\ldots)$$

c'est-à-dire

$$\delta \leqq (s_1' + s_1'' + \ldots\ldots) - (r_1' + r_1'' + \ldots\ldots) - m_1 = -\sum r_1 - m_1$$

Il sera nécessaire que le second membre soit positif ou nul, puisque δ ne peut être négatif.

Si toutes les conditions nécessaires indiquées chemin faisant sont satisfaites, on remplacera, dans $f(x)$, $P(x)$ par un polynôme d'ordre $-\sum r_1 - m_1$, à coefficients tous indéterminés, y compris celui de la plus haute puissance de x, et on essaiera, par substitution

directe (ou autrement), de déterminer ces coefficients de manière que $f(x)$ vérifie l'équation différentielle proposée.

Si cette détermination est impossible la proposée n'admet pas de solution rationnelle ; si elle est possible d'une seule manière, la proposée a une seule solution rationnelle, que cette méthode fait connaître ; si elle est possible d'une infinité de manières, c'est-à-dire si on trouve pour $P(x)$ un polynôme renfermant (linéairement) une constante arbitraire, λ :

$$P(x) = A(x) + \lambda B(x),$$

l'intégrale générale de la proposée est

$$y = \frac{C_1 A(x) + C_2 B(x)}{(x-b')^{s'_1}(x-b'')^{s''_1}\ldots\ldots} (x-a')^{r'_1}(x-a'')^{r''_1}\ldots\ldots$$

C_1 et C_2 étant deux constantes arbitraires, c. à. d. que l'intégrale générale est rationnelle.

Remarque. – Si l'intégrale générale est rationnelle, $p_1(x)$ et $p_2(x)$ sont nécessairement des fonctions rationnelles de x ; car, y_1 et y_2 étant deux solutions rationnelles distinctes, les équations :

$$y''_1 + p_1 y'_1 + p_2 y_1 = 0 \quad ; \quad y''_2 + p_1 y'_2 + p_2 y_2 = 0$$

donnent p_1 et p_2 en fonction rationnelle de $y_1, y_2, \ldots y''_2$, c. à. d. en fonction rationnelle de x.

Exemple.

261. – Soit l'équation :

$$(E) \qquad (x^2 - x)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x-3)\frac{dy}{dx} + (-2 + \alpha x + \beta x^2)\, y = 0$$

On demande de reconnaître si son intégrale générale est méromorphe dans tout le plan.

On a :

$$p_1 = \frac{2x-3}{x(x-1)} \qquad p_2 = \frac{-2+\alpha x+\beta x^2}{x(x-1)} ;$$

les seuls points critiques de p_1 et p_2 sont des pôles, $x=0$, $x=1$, d'ordre un pour les deux fonctions. Les conditions 1° du N° 258 sont donc satisfaites.

L'équation déterminante relative au point $x=0$ est :
[puisque $p_1 = \frac{3}{x} + \cdots\cdots$; $p_2 = \frac{0}{x^2} + \frac{2}{x} + \cdots\cdots$] :

$$r(r-1)+3r=0\ ;$$

ses racines sont $r=0$, $r=-2$; elles sont distinctes et entières, c.à.d. que les conditions 2° sont satisfaites, pour le point $x=0$.

Reste la condition auxiliaire ; pour la former, puisque -2 est la plus petite racine de l'équation déterminante, substituons à y, dans (E'), selon la méthode générale, le développement :

$$y = \frac{1}{x^2} + \frac{C_1}{x} + C_2 + C_3 x + \cdots\cdots\ ;$$

il vient :

$$0 = (x^2-x)\left[\frac{6}{x^4} + \frac{2C_1}{x^3} + 2C_4 + \cdots\right] + (2x-3)\left[-\frac{2}{x^3} - \frac{C_1}{x^2} + C_3 + \cdots\right] + \left[-2+\alpha x+\beta x^2\right]\left[\frac{1}{x^2} + \frac{C_1}{x} + C_2 + C_3 + \cdots\right]$$

et, en égalant à 0 les coefficients des termes en $\frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x}$, il vient :

$$-6+6 = 0$$

$$6-2C_1-4+3C_1-2 = 0 \ \ldots\ldots \text{d'où } C_1 = 0$$

$$2C_1-2C_1-2C_1+\alpha = 0 \ \ldots\ldots \text{d'où } C_1 = \frac{\alpha}{2}$$

Ces deux équations ne sont compatibles que si $\alpha = 0$; c'est la condition auxiliaire.

Il faut former de même l'équation déterminante relative au point $x=1$. Pour cela, développons $p_1(x)$ et $p_2(x)$ suivant les puissances croissantes de $x-1=t$. On a :

$$p_1 = \frac{2t-1}{t(1+t)} = \frac{-1}{t} + \cdots\cdots \qquad p_2 = \frac{-2+\beta(t+1)^2}{t(1+t)} = \frac{0}{t^2} + \frac{-2+\beta}{t} + \cdots\cdots$$

L'équation caractéristique est donc :

$$r(r-1)-r=0\ ;$$

ses racines sont $r=0$, $r=2$; elles sont encore distinctes et entières, et il suffit maintenant de former la condition auxiliaire. Remplaçons, pour simplifier les calculs, dans l'équation proposée, x par $t+1$, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ deviennent $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$; posons

ensuite :

$$y = 1 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots\cdots$$

On trouve :

$$0 = (t^2+t)\left[2c_2 + \cdots\cdots\right] + (2t-1)\left[c_1 + 2c_2 t + \cdots\cdots\right] + \left[-2+\beta^2+2\beta t+\beta t^2\right]\left[1 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots\cdots\right]$$

et en égalant à zéro les coefficients des termes en t^0, t^1 :

$$-c_1 - 2 + \beta^2 = 0$$

$$2c_2 - 2c_2 + 2c_1 - 2c_1 + c_1\beta^2 + 2\beta = 0$$

ces deux équations en c_1 ne sont compatibles que si : $\beta(2+2\beta-\beta^3) = 0$.

Ainsi : Pour que l'équation proposée ait son intégrale générale méromorphe dans tout le plan, il faut et il suffit que $\alpha = 0$, et $\beta = 0$ ou $2+2\beta-\beta^3 = 0$.

Cherchons si le point $x = \infty$ est un point ordinaire, un pôle, ou un point critique d'une autre nature pour l'intégrale générale. A cet effet posons

$$x = \frac{1}{u}\,;$$

On a :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} : \frac{dx}{du} = -u^2\frac{dy}{du}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[-u^2\frac{dy}{du}\right] = \frac{d}{du}\left[-u^2\frac{dy}{du}\right] : \frac{dx}{du} = -u^2\left[-u^2\frac{d^2y}{du^2} - 2u\frac{dy}{du}\right]$$

L'équation proposée devient ainsi :

$$(E') \qquad u^2(1-u)\frac{d^2y}{du^2} + u^2\frac{dy}{du} + \left(-2 + \frac{\beta}{u^2}\right)y = 0$$

Pour que $\varpi_2(u) = \dfrac{-2u^2+\beta}{u^4(1-u)}$ admette $u = 0$ comme pôle d'ordre deux au plus, il faut que $\beta = 0$. Donc si $\beta \gtrless 0$, le point $x = \infty$ est un point critique (autre qu'un pôle) pour l'intégrale générale.

Si $\beta = 0$, on a :

$$p_1 = \frac{u^2}{u^2(1-u)} = \frac{0}{u} + 1 + u + \cdots\cdots$$

$$p_2 = \frac{-2}{u^2(1-u)} = \frac{-2}{u^2} + \cdots\cdots$$

et l'équation déterminante est

$$r(r-1) - 2 = 0 \;;$$

ses racines sont $r = 2$, $r = -1$. En substituant à y dans (E') le développement

$$y = \frac{1}{u} + C_1 + C_2 u + C_3 u^2 + \cdots\cdots$$

on vérifierait que la condition auxiliaire est vérifiée.

Ainsi, quand $\alpha = 0$, $\beta = 0$, la proposée a son intégrale générale méromorphe dans tout le plan, ainsi qu'au point $x = \infty$; cette intégrale est donc rationnelle.

Pour la trouver, appliquons la méthode du N°. 260. Les racines de l'équation déterminante pour $x = 0$ sont -2 et 0 ; pour le point $x = 1$, elles sont 0 et 2 ; l'intégrale rationnelle est donc de la forme :

$$\frac{P(x)}{x^2}$$

le degré du numérateur de $P(x)$, étant au plus $2 - m_1 = 3$, ($m_1 = -1$, plus petite racine de l'équation déterminante pour $x = \infty$). On a donc à essayer une solution de la forme :

$$y = \frac{\lambda x^3 + \mu x^2 + \nu x + \rho}{x^2}$$

en substituant cette valeur dans la proposée, on trouve aisément qu'elle est satisfaite si :

$$\nu = 0 \; ; \qquad 3\lambda + 2\mu = 0$$

ce qui donne

$$y = \frac{\frac{\lambda x^2}{2}(2x - 3) + \rho}{x^2}$$

C'est bien l'intégrale générale, avec les deux constantes λ et ρ. On voit en faisant $\rho = 0$, puis $\lambda = 0$, que $2x - 3$ et $\frac{1}{x^2}$ sont des solutions particulières de la proposée, ce qu'on vérifie de suite.

Equation de Lamé.

262. — C'est l'équation différentielle :

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2y}{du^2} = n(n+1)\left[pu + k\right]y,$$

où u est la variable indépendante, pu la fonction elliptique classique; k une constante; n un entier positif

263. — Théorème. — L'intégrale générale de l'équation de Lamé est méromorphe dans tout le plan.

Les coefficients de l'équation étant des fonctions elliptiques, il suffit évidemment d'établir la proposition à l'intérieur d'un parallélogramme des périodes. Or, dans un tel parallélogramme, pu n'a qu'un pôle, $u=0$, qui est double; donc les conditions 1° du N° 258 sont satisfaites.

L'équation déterminante relative au point $u=0$ est, puisque $pu = \frac{1}{u^2} + \dots$

$$F(r) = r(r-1) - n(n+1) = 0,$$

des racines sont $r = -n$, $r = n+1$; elles sont entières et distinctes, c.à.d. que les conditions 2° sont satisfaites.

Reste la condition auxiliaire relative au point $u=0$. Pour reconnaître si elle est vérifiée, il faut substituer à y, dans la proposée le développement

$$y = c_0 u^{-n} + c_1 u^{-n+1} + c_2 u^{-n+2} + \dots + c_k u^{-n+k} + \dots \quad (c_0 = 1)$$

On remplace en même temps pu par son développement autour du pôle $u=0$:

$$pu = \frac{1}{u^2} + \alpha_2 u^2 + \alpha_4 u^4 + \dots$$

qui ne contient que des puissances paires de u.

En égalant les coefficients de u^{-n+k-2} dans les deux membres de (1), on trouve une équation de la forme :

$$(-n+k)(-n+k-1)c_k = n(n+1)c_k + c_{k-2}(\quad) + c_{k-4}(\quad) + \dots$$

ou

(2) $\qquad c_k F(k-n) = c_{k-2}(\quad) + c_{k-4}(\quad) + \dots$

les coefficients c du second membre ayant tous des indices de même parité que k : cela tient à ce que le développement de pu ne contient que des puissances paires.

Or $F(r)$ ne s'annule que pour $r=-n$ et $r=n+1$; si donc on fait successivement dans cette équation (2) : $k=2,4,6,\dots 2p$, on détermine successivement $c_2, c_4, \dots c_{2p}$ sans ambiguïté ni impossibilité en fonction de $c_0\ (=1)$: en effet, $F(2p-n)$ ne s'annule pas pour $p \geqq 1$, puisque $2p-n$ ne peut être égal à $n+1$, pour n et p entiers.

Si maintenant on fait dans (2) $k=1$, il vient

$$c_1 F(1-n) = 0 ; \dots\dots\dots \text{d'où } c_1 = 0$$

De même $k=3$ donne :

$$c_3 F(3-n) + c_1(\quad) = 0 \dots\dots \text{d'où } c_3 = 0$$

et ainsi de suite, jusqu'à $k=2n+1$; qui donne

$$c_{2n+1} F(n+1) + c_{2n-1}(\quad) + c_{2n-3}(\quad) + \dots + c_1(\quad) = 0$$

relation vérifiée identiquement, puisque $F(n+1)=0$ et $c_1 = c_3 = \dots = c_{2n-1} = 0$.

C'est précisément la vérification de cette équation qui constitue la condition auxiliaire ; celle-ci est donc satisfaite.

264. – Cela étant, on peut trouver a priori la forme d'une intégrale (au moins) de l'équation de Lamé ; la méthode suivante est due à M. Picard, elle s'applique à toutes les équations différentielles linéaires, à coefficients elliptiques, dont l'intégrale générale est méromorphe dans le plan.

265. – Soient y_1 et y_2 deux intégrales distinctes de l'équation de Lamé ; si on change u en $u+2\omega_1$, $2\omega_1$ étant une période de pu, l'équation de Lamé ne change pas, c'est-à-dire que $y_1(u+2\omega_1)$ et $y_2(u+2\omega_1)$ sont encore des solutions. Par suite

$$y_1(u+2\omega_1) = \lambda_1 y_1(u) + \lambda_2 y_2(u)$$

$$y_2(u+2\omega_1) = \mu_1 y_1(u) + \mu_2 y_2(u),$$

et on en conclut, comme au N° 247, qu'il existe deux solutions z_1 et z_2 qui se reproduisent multipliées par des constantes, S_1 et S_2, quand on y change u en $u+2\omega_1$. Les quantités S_1 et S_2 sont racines de l'équation

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda_1 - s & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 - s \end{vmatrix};$$

si elles sont égales il peut n'y avoir qu'une solution, z_1, se reproduisant multipliée par S_1, quand on change u en $u+2\omega_1$, mais il y en a toujours une.

Si $2\omega_2$ est la seconde période de pu, les fonctions $z_1(u+2\omega_2)$, $z_1(u+4\omega_2)$ soit encore des solutions de l'équation de Lamé, comme $z_1(u)$, et par suite il y a entre ces trois solutions une relation linéaire et homogène :

$$z_1(u+4\omega_2) = \alpha_1 z_1(u) + \alpha_2 z_1(u+2\omega_2), \ldots \alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \text{ étant des constantes.}$$

Dès lors si l'on pose :

$$\varphi(u) = z_1(u+2\omega_2) + \lambda z_1(u),$$

$\varphi(u)$ sera une solution de l'équation de Lamé et l'on aura :

$$\varphi(u+2\omega_2) = (\lambda+\alpha_2) z_1(u+2\omega_2) + \alpha_1 z_1(u) = (\lambda+\alpha_2)\left[z_1(u+2\omega_2) + \frac{\alpha_1}{\lambda+\alpha_2} z_1(u)\right]$$

et en choisissant la constante λ de manière que $\lambda = \dfrac{\alpha_1}{\lambda+\alpha_2}$, on aura

$$(3) \qquad \varphi(u+2\omega_2) = \rho_1 \varphi(u); \ldots \rho_1 \text{ désignant la constante } \lambda+\alpha_2.$$

D'ailleurs on a : $\qquad \varphi(u+2\omega_1) = S_1 \varphi(u)$,

cela, à cause des relations :

$$z_1(u+2\omega_1) = S_1 z_1(u); \quad z_1(u+2\omega_2+2\omega_1) = S_1 z_1(u+2\omega_2).$$

Ainsi : L'équation de Lamé admet toujours au moins une solution, $\varphi(u)$, vérifiant les relations (3), ρ et S_1 désignant des constantes; cette solution est méromorphe dans tout le plan, puisque l'intégrale générale l'est elle-même.[1]

[1] L'équation de Lamé ne changeant pas quand on y change u en $-u$, $\varphi(-u)$ est aussi une solution; si donc on détermine $\varphi(u)$, on aura 2 solutions, généralement distinctes, de l'équation, et celle-ci sera dès lors intégrée.

266. – Il est aisé de trouver la forme générale des fonctions, méromorphes dans tout le plan, qui vérifient ces relations (3).

L'une d'elles est la fonction :

$$f(u) = \frac{\sigma(u-h)}{\sigma u} e^{mu}$$

h et m désignant des constantes convenablement choisies. En effet, d'après la formule $\sigma(u+2\omega_2) = -e^{2\eta_2(u+\omega_2)}\sigma(u)$, on a :

$$f(u+2\omega_1) = f(u) e^{-2\eta_1 h + 2m\omega_1} \quad ; \quad f(u+2\omega_2) = f(u) e^{-2\eta_2 h + 2m\omega_2}$$

et il suffit de déterminer h et m de manière que

$$-2\eta_1 h + 2m\omega_1 = \log s_1 \quad ; \quad -2\eta_2 h + 2m\omega_2 = \log \rho_1 \, ;$$

ce qui est toujours possible, puisque $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi i}{2}$ (N° 97).

Dès lors la fonction $\frac{\varphi(u)}{f(u)}$ ne change pas si on y remplace u par $u+2\omega_1$, $u+2\omega_2$; comme elle est méromorphe dans tout le plan, c'est donc une fonction elliptique, $E(u)$, de sorte qu'on a :

$$\varphi(u) = \frac{\sigma(u-h)}{\sigma u} e^{mu} E(u)$$

On peut préciser singulièrement la forme de la fonction $E(u)$. En effet, l'intégrale générale de l'équation de Lamé n'a, dans un parallélogramme, que le pôle $u=0$, qui est d'ordre n, puisque la plus petite racine de l'équation déterminante correspondante est $-n$: $\varphi(u)$ admet donc le point $u=0$ comme pôle d'ordre n, au plus et n'en a pas d'autre ; c. à. d. que $E(u)$ admet ce même point comme pôle d'ordre $n-1$, au plus, et ne peut avoir d'autre pôle, sinon le point $u=h$, comme pôle simple.

Donc en exprimant $E(u)$ par les σ (N° 105) on a :

$$E(u) = \frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_n)}{\sigma^{n-1}(u)\,\sigma(u-h)}$$

une ou plusieurs des constantes, $a_1 \ldots a_n$ pouvant être 0 ou h, et $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = h + \text{Période}$. On a ainsi :

$$\varphi(u) = e^{mu} \frac{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_n)}{\sigma^n u}$$

et il est certain que l'équation de Lamé admettra une solution de cette forme. Il ne reste qu'à substituer $\varphi(u)$ dans l'équation, et à déterminer $m, a_1, a_2, \dots a_n$, en donnant, par exemple, à u des valeurs particulières, ou par toute autre méthode. La solution $\varphi(u)$ étant ainsi connue, $\varphi(-u)$ sera une seconde solution, comme on l'a observé plus haut, et l'intégrale générale de l'équation de Lamé sera $y = C_1\varphi(u) + C_2\varphi(-u)$.

267. — Nous allons développer les calculs dans le cas de $n = 2$.

L'équation de Lamé est alors :

(4) $$\frac{d^2y}{du^2} = 6\left[pu + k\right]y.$$

On a :

$$\varphi(u) = e^{mu}\frac{\sigma(u-a)\sigma(u+b)}{\sigma^2 u}$$

On en tire :

$$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = m + \zeta(u-a) + \zeta(u+b) - 2\zeta u.$$

et en dérivant :

$$\frac{\varphi''(u)}{\varphi(u)} - \left[\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\right]^2 = -p(u-a) - p(u+b) + 2pu$$

ou :

$$\frac{\varphi''(u)}{\varphi(u)} = \left[m + \zeta(u-a) + \zeta(u+b) - 2\zeta u\right]^2 - p(u-a) - p(u+b) + 2pu$$

Il faut écrire que $\varphi(u)$ vérifie l'équation de Lamé, c.à.d. $\frac{\varphi''(u)}{\varphi(u)} = 6\left[pu + k\right]$, ce qui donne :

(5) $$\left[m + \zeta(u-a) + \zeta(u+b) - 2\zeta u\right]^2 - p(u-a) - p(u+b) - 4pu - 6k = 0$$

Il s'agit de déterminer les constantes a, b, m de manière que cette équation soit satisfaite quelque soit u, et on est certain, a priori, que cela est possible.

Soit $F(u)$ le premier membre de (5) : $F(u)$ est une fonction elliptique, aux mêmes périodes que pu, car $\zeta(u-a) + \zeta(u+b) - 2\zeta u$ ne change évidemment pas quand on augmente u de $2\omega_1$ ou $2\omega_2$.

Les pôles de $F(u)$ sont $u=a$, $u=-b$, $u=0$, doubles en apparence. Je dis qu'ils sont simples. En effet, pour $u=0$, le terme $\frac{4}{u^2}$ provenant de $[-2\zeta u]^2$ est détruit par le terme $-\frac{4}{u^2}$ provenant de $-4pu$; et on a un résultat analogue pour les pôles a et $-b$.

Si donc on détermine m, a et b de manière que $F(u)$ n'admette plus le pôle a, ni le pôle 0, et s'annule pour $u=0$, $F(u)$ sera une fonction elliptique à un seul pôle, c. à d. une constante (N° 88), nulle évidemment. L'équation (5) sera alors une identité en u, et $\varphi(u)$ sera solution de l'équation (4) de Lamé. Suivons cette marche.

Autour du point $u=0$, on a :

$$F(u)=\left[-\frac{2}{u}+m-\zeta a+\zeta b+u(\zeta' a+\zeta' b)+u^3(\quad)\right]^2-pa-pb-\frac{4}{u^2}-6k+u(\quad)+\dots$$

d'où, en annulant le terme en $\frac{1}{u}$ et le terme constant :

$$(6)\qquad m-\zeta a+\zeta b=0$$

$$(7)\qquad [m-\zeta a+\zeta b]^2-4(\zeta' a+\zeta' b)-pa-pb=6k$$

Autour du point $u=a$, on a

$$F(u)=\left[\frac{1}{u-a}+m+\zeta(a+b)-2\zeta a+(u-a)(\quad)\right]^2-\frac{1}{(u-a)^2}+\dots\dots\dots$$

d'où, en annulant le terme en $\frac{1}{u-a}$:

$$(8)\qquad m+\zeta(a+b)-2\zeta a=0$$

Si donc m, a, b vérifient les relations (6), (7), (8), $\varphi(u)$ est solution de (4).

La relation (8) s'écrit, en vertu de la formule d'addition de ζ (N° 110) :

$$m+\zeta a+\zeta b+\frac{1}{2}\,\frac{p'a-p'b}{pa-pb}-2\zeta a=0 ;$$

et en tenant compte de (6) :

$$(9)\qquad p'a-p'b=0$$

Pour rendre les calculs plus faciles, on posera :

$$-2k=pc ;$$

C sera une constante connue. L'équation (7) s'écrit, en remplaçant $\mathfrak{Z}'$ par $-p$:

10) $$pa+pb+pc=0$$

On déterminera a et b par les équations (9) et (10); la relation (6) donnera m.

Or la formule

$$p(a+b)+pa+pb=\frac{1}{4}\left[\frac{p'a-p'b}{pa-pb}\right]^2$$

donne, à cause de (9):

$$pa+pb+p(a+b)=0;$$ et en comparant à (10):

$$p(a+b)=pc,$$

c'est-à-dire $a+b=\pm C+$ Période. Mais c, défini par $pc=-2k$, n'est défini qu'au signe près, on peut donc supposer $a+b+c=$ Période; et on a finalement pour déterminer a et b :

$$a+b+c=0 \qquad p'a=p'b$$

On peut pousser le calcul encore plus loin. L'équation $p'u-p'b=0$ a trois racines de somme nulle; l'une est évidemment b; une seconde est a, puisque $p'a=p'b$; la troisième est donc $-(a+b)$, ou C; de sorte que

$$p'c=p'a=p'b.$$

Finalement, a et b sont les deux racines, autres que c, de l'équation $p'u-p'c=0$.

Ainsi:

L'équation de Lamé, dans le cas de $n=3$:

$$\frac{d^2y}{du^2}=\left[6\,pu-3\,pc\right]y \ldots\ldots\ldots (C=\text{const})$$

est vérifiée par la fonction

$$\varphi(u)=\frac{\sigma(u-a)\,\sigma(u+b)}{\sigma^2 u}\,e^{(\mathfrak{Z}a-\mathfrak{Z}b)u},$$

où a et b sont les deux zéros, autres que c, de la fonction $p'u-p'c$.

La fonction $\varphi(u)$ a deux déterminations, car on peut y permuter a et b, qui ne sont définis qu'à l'ordre près; on a ainsi deux solutions,

distincts en général, ce qui donne l'intégrale générale. D'ailleurs la seconde solution n'est autre chose que $\varphi(-u)$.

On peut observer aussi que a et b ne sont définis qu'à des périodes près ; mais si on augmente a, par exemple, de $2\omega_2$, on voit aisément que $\varphi(u)$ se reproduit, multiplié par le facteur constant $e^{2\eta_2(\omega_2-a)}$: on ne trouve pas ainsi de nouvelle solution.

268. – Remarque. – Soient $\varphi(u)$ et $\varphi_1(u)$ les deux solutions ci-dessus ; on a :

$$\varphi(u+2\omega_2)=\varphi(u)e^{2\eta_2(b-a)+2\omega_2(\zeta a-\zeta b)}, \quad \text{ou} \quad \varphi(u+2\omega_2)=S_2\,\varphi(u)$$

De même en permutant a et b . . . . $\varphi_1(u+2\omega_2)=\dfrac{1}{S_2}\varphi(u)$,

Le produit $\varphi(u)\varphi_1(u)$ admet dans la période $2\omega_2$; c'est une fonction elliptique de u.

Réciproquement, si deux solutions de l'équation de Lamé ont un produit elliptique, ces solutions sont φ et φ_1, à des facteurs constants près. En effet, soient

$$\lambda\varphi+\lambda_1\varphi_1 \quad \text{et} \quad \mu\varphi+\mu_1\varphi_1 \qquad (\lambda, \mu, \ldots = \text{const})$$

ces deux solutions ; en changeant u en $u+2\omega_2$, il faut, d'après l'hypothèse, que :

$$(\lambda\varphi+\lambda_1\varphi_1)(\mu\varphi+\mu_1\varphi_1)=\left(\lambda S_2\varphi+\frac{\lambda_1}{S_2}\varphi_1\right)\left(\mu S_2+\frac{\mu_1}{S_2}\varphi_1\right), \ldots\ldots \text{ c. à. d.}$$

$$\lambda\mu\varphi^2(1-S_2^2)+\lambda_1\mu_1\varphi_1^2\left(1-\frac{1}{S_2^2}\right)=0$$

Comme S_2 n'est (en général) pas égal à l'unité, et que φ et φ_1 sont distincts, c'est-à-dire que φ_1 n'est pas égal à $k\varphi$, il faut que l'on ait

$$\lambda\mu=0 \ ; \ \lambda_1\mu_1=0 .$$

D'ailleurs λ et λ_1, μ et μ_1 ne sont pas nuls ensemble, les deux solutions sont bien φ et φ_1, à des facteurs constants près.

Application de l'équation de Lamé.

269. – Pendule conique. – Les équations du mouvement du pendule conique (point matériel pesant fixé par une tige rigide à un point invariable) ont été données dans le cours de Mécanique de 1ère année (p. 180)

Soient : l la longueur du pendule ; m la masse du point pesant ; x, y, z ses coordonnées au temps t ; N la tension de la tige ; on a :

$$(1)\qquad \begin{aligned} mx'' &= -N\frac{x}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \left(x''=\frac{d^2x}{dt^2}\ ;\ x'=\frac{dx}{dt}\ ;\ldots\right) \\ my'' &= -N\frac{y}{l} \\ mz'' &= -N\frac{z}{l}+mg \end{aligned}$$

$$(2)\qquad x^2+y^2+z^2 = l^2$$

L'origine des coordonnées est le point de suspension ; l'axe des z est dirigé suivant la verticale, vers le bas.

On déduit de là les équations des aires et des forces vives :

$$(3)\qquad yx'-xy' = \sqrt{2g}\ q$$

$$(4)\qquad x'^2+y'^2+z'^2 = 2g(z+h) \quad \ldots\ldots (q \text{ et } h = \text{const})$$

En tenant compte de ces relations et de $xx'+yy'+zz'=0$, obtenue en dérivant (2), l'identité de Lagrange :

$$(x^2+y^2)(x'^2+y'^2) = (xx'+yy')^2+(yx'-xy')^2$$

s'écrit :

$$(l^2-z^2)\left[2g(z+h)-z'^2\right] = z^2z'^2+2g\,q^2$$

ou :

$$(5)\qquad l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2g(z+h)(l^2-z^2)-2gq^2 .$$

On a donc z par une quadrature elliptique :

$$(6)\qquad \frac{dz}{\sqrt{4(z+h)(l^2-z^2)-4q^2}} = dt\sqrt{\frac{g}{2l^2}} .$$

270. – Calcul et discussion de z. – Avant de ramener le polynôme sous le radical à la forme normale, pour introduire les fonctions elliptiques, étudions ses racines.

Soit z_0 la valeur initiale de z, au temps $t=0$; z_0 est compris entre $-l$ et $+l$; je dis que le polynôme sous le radical :

$$f(z) = (z+h)(l^2-z^2)-q^2$$

a ses racines réelles, et comprises dans les intervalles $-\infty, -l, z_0, +l$.

En effet, $-\infty, -l, +l$, substitués dans $f(z)$, y donnent les signes $+, -, -$; tout revient donc à prouver que $f(z_0)$ est positif. Or la relation (5) rend ce fait évident, puisqu'elle montre que $f(z_0)=(z_0+h)(z_0^2-l^2)-q^2$ est égal à $\frac{l^2}{2g}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$, quantité positive, car $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0$ est la composante verticale de la vitesse initiale du point pesant, quantité réelle.

Soient alors α, β, γ les trois racines de $f(z)$: $\alpha < \beta < \gamma$. On peut observer :

1° que γ est >0, car $f'(z) = -3z^2-2hz+l^2$; la plus grande racine de $f'(z)$ est évidemment positive, et γ, qui lui est supérieure, d'après Rolle, est aussi >0.

2° que $\alpha < -h$; car $f(-h)$, égal à $-q^2$, étant négatif, $-h$ est dans un des intervalles $\alpha \ldots \beta$ ou $\gamma \text{——} +\infty$, donc $>\alpha$.

Remarquons enfin que z_0 est compris entre β et γ. Or la relation (6) montre que le polynôme sous le radical, $f(z)$, doit rester positif, c. à. d. que z, égal au commencement à z_0, doit demeurer compris entre β et γ. Cette remarque est de la plus haute importance.

Cela posé, posons, pour faire disparaître le terme du second degré dans le polynôme sous le radical :

$$(7) \qquad z = -W - \frac{h}{3};$$

on aura

$$(7^{bis}) \qquad 4(z+h)(l^2-z^2)-4q^2 = 4W^3 - 4W\left[\frac{h^2}{3}+l^2\right] - \frac{8h^3}{27} + \frac{8}{3}hl^2 - 4q^2$$

Désignons par e_1, e_2, e_3 les racines (réelles) du polynôme en w $(e_1 > e_3 > e_2)$; on a :

(8) $$e_1 = -\alpha - \frac{h}{3}\ ; \qquad e_3 = -\beta - \frac{h}{3}\ ; \qquad e_2 = -\gamma - \frac{h}{3}$$

et w restera compris entre e_2 et e_3, puisque z était compris entre β et γ.

Posons maintenant, pour faire l'intégration :

(9) $$w = p(u, e_\alpha);$$

on aura, dans (6), en tenant compte de (7) et de (9) :

$$du = dt\sqrt{\frac{g}{2l^2}}\ ; \quad \text{ou} \quad u = \sqrt{\frac{g}{2l^2}}\,(t+\theta),$$

θ étant une constante. On en conclut, par (7) et (9), l'expression de z en fonction du temps :

(10) $$z = -\frac{h}{3} - pu\ ; \quad \text{étant posé} \quad u = \sqrt{\frac{g}{2l^2}}\,(t+\theta).$$

271. Discutons cette formule. — On vient de dire que $w = pu$ est compris entre e_2 et e_3, c. à. d. (N° 120, Remarque) que u est de la forme $u = V + \Omega' i$, V étant réel, et $2\Omega' i\ (= 2\omega_2)$ désignant la période purement imaginaire de $p(u, e_\alpha)$. Le temps t pouvant croître jusqu'à ∞, la formule $u = \sqrt{\frac{g}{2l^2}}\,(t+\theta)$ montre que V peut aussi augmenter indéfiniment ; par suite :

(10bis) $$pu = p(V + \Omega' i) = e_2 + \frac{(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)}{pV - e_2}$$

prendra une infinité de fois, toutes les valeurs comprises entre e_2 et e_3. Donc, en vertu de (10), z prendra toutes les valeurs comprises entre

(11) $$z_3 = -\frac{h}{3} - e_3 \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{h}{3} - e_2 \qquad (z_3 < z_2),$$

y compris ces valeurs extrêmes. En d'autres termes :
Le point pesant, sur la sphère qu'il décrit, reste compris entre deux parallèles horizontaux, qu'il atteint chacun une infinité de fois.

Faisons par exemple varier V de 0 à Ω_1 ($2\Omega_1$ désignant toujours

la période réelle de pu): pu décroît constamment de ∞ à e_1; donc pu croît (d'après 10 bis) de e_2 à e_3, c. à. d. que z, d'après (10), décroît de z_2 à z_3. Puis, v allant de Ω_1 à $2\Omega_1$, z croîtra de z_3 à z_2, et ainsi de suite, c. à. d. que :

Pour aller d'un parallèle à l'autre, le point pesant monte ou descend constamment.

Un au moins des deux parallèles est au-dessous du point de suspension, c. à. d. que z_2 est positif; en effet, d'après (8), $z_2 = -\frac{h}{3} - e_2 = \gamma$, qui est > 0, (N° 270).

Dans le cas où un des parallèles est au-dessus du point de suspension, c. à. d. si $z_3 < 0$, la valeur absolue de z_3 est inférieure à z_2, c. à. d. que $\frac{h}{3} + e_3 < -\frac{h}{3} - e_2$; ou, $\frac{2h}{3} + e_2 + e_3 < 0$, ou encore $\frac{2h}{3} - e_1 < 0$, ce qui, d'après (8), revient à $h + \alpha < 0$, inégalité vérifiée, comme on l'a vu (N° 270). On peut donc dire que :

Le point pesant s'élève moins au-dessus du point de suspension qu'il ne descend au-dessous, proposition évidente mécaniquement; sous une autre forme :

Le rayon du parallèle supérieur est toujours plus grand que celui du parallèle inférieur.

272. _ Calcul de x et de y. _ On déduit de (1), en multipliant par x, y, z et ajoutant :

$$m(xx'' + yy'' + zz'') + Nl = mgz$$

et en dérivant (2) deux fois :

$$xx'' + yy'' + zz'' = -x'^2 - y'^2 - z'^2 = -2g(z+h) \ldots\ldots \text{d'après (4)}.$$

Par suite :

$$(12) \qquad Nl = mgz + 2mg(z+h) = mg(3z+2h)$$

Remplaçons N par cette valeur dans les deux premières équations (1); multiplions la seconde par $\pm i$ et ajoutons à la première, il vient :

$$x'' + iy'' \text{ c. à. d. } \frac{d^2}{dt^2}(x \pm iy) = \frac{-g}{l^2}(3z+2h)(x \pm iy)$$

ou, en prenant pour variable indépendante $u = \sqrt{\frac{g}{2l^2}}(t+\theta)$, au

lieu de t :

$$\frac{d^2}{du^2}(x \pm iy) = -2\left[3z+2h\right](x \pm iy)$$

c. à. d. en remplaçant z par sa valeur (10) :

$$(13) \qquad \frac{d^2(x \pm iy)}{du^2} = (6pu - 2h)(x \pm iy)$$

Donc $x+iy$ et $x-iy$ sont solutions d'une même équation de Lamé, du cas de $n=2$; comme d'ailleurs le produit

$(x+iy)(x-iy) = l^2 - z^2 = l^2 - \left(\frac{h}{3} + pu\right)^2$ est elliptique, $x+iy$ et $x-iy$ sont, à des facteurs constants près, les deux solutions $\varphi(u)$ et $\varphi_1(u)$ trouvées plus haut (Rem. du N°. 268, et N°. 267). On a ainsi

$$x+iy = A\varphi(u) = A\,\frac{\sigma(u-a)\sigma(u+b)}{\sigma^2 u}\,e^{u(\zeta a - \zeta b)}$$

$$x-iy = B\varphi_1(u) = B\,\frac{\sigma(u+a)\sigma(u-b)}{\sigma^2 u}\,e^{u(\zeta b - \zeta a)}$$

a, b étant déterminés comme on l'a dit, en fonction de la constante, $-2h$, qui figure au second membre de l'équation de Lamé (13). Il y a une relation entre les facteurs constants A et B : formons en effet le produit $(x+iy)(x-iy)$, qui est égal à $l^2 - z^2$; on a :

$$AB\,\frac{\sigma(u-a)\sigma(u+a)\sigma(u-b)\sigma(u+b)}{\sigma^4 u} = l^2 - \left(\frac{h}{3} + pu\right)^2;$$

d'où ; en égalant les valeurs principales pour $u=0$:

$$AB\,\sigma^2 a\,\sigma^2 b \quad = -1; \qquad d'où\ B = -\frac{1}{A}\,\frac{1}{\sigma^2 a\,\sigma^2 b}$$

Il n'y a pas d'autres relations à chercher entre A et B; car l'intégrale générale du système proposé (1) et (2), doit contenir quatre constantes arbitraires[1], qui sont A, θ, h et q.

---

[1] On peut en effet se donner arbitrairement, à l'instant initial, les deux coordonnées qui fixent la position, M_0, du point pesant sur la sphère, la direction de la vitesse initiale dans le plan tangent en M_0, et la valeur de cette vitesse ; soit quatre constantes arbitraires.

273. – Résumé. – Si l'on pose $\sqrt{\frac{g}{2l^2}}(t+\theta)=u$, les coordonnées, x, y, z du point pesant au temps t sont données par les formules :

$$z = -\frac{h}{3} - pu$$

(F)
$$x+iy = A\frac{\sigma(u-a)\sigma(u+b)}{\sigma^2 u} e^{u(\zeta a - \zeta b)}$$

$$x-iy = \frac{-1}{A\sigma^2 a\sigma^2 b}\frac{\sigma(u+a)\sigma(u-b)}{\sigma^2 u} e^{u(\zeta b - \zeta a)}$$

Les constantes qui figurent dans ces formules se déterminent comme il suit, en fonction des conditions initiales du mouvement.

Soient au temps $t=0$: x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point pesant ;
v_0 sa vitesse ;
α_0, β_0 les composantes de v_0 suivant Ox et Oy ;

On a, par (3) et (4) :

$$\sqrt{2g}\; q = \alpha_0 y_0 - \beta_0 x_0$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - z_0$$

les invariants g_2 et g_3 des fonctions elliptiques introduites sont, d'après (7bis) :

$$g_2 = 4\left(\frac{h^2}{3}+l^2\right) \;; \qquad g_3 = \frac{8h^3}{27} - \frac{8}{3}hl^2 + 4q^2 \ldots\ldots (l = \text{longueur du pendule})$$

La constante θ est donnée par :

$$z_0 = -\frac{h}{3} - p\left[\sqrt{\frac{g}{2l^2}}\,\theta\right] ;$$

Les constantes a et b sont les deux zéros, autres que c, de l'équation

$$p'u = p'c \ldots\ldots \text{ étant posé } \quad pc = \frac{2h}{3}$$

Enfin A se détermine par la condition que pour $t=0$, c. à. d. $u = \sqrt{\frac{g}{2l^2}}\,\theta$, on ait $x = x_0$.

Discussion générale.

274. – Etudions la courbe décrite par la projection x, y du point pesant sur le plan horizontal (des x, y); à cet effet prenons les coordonnées polaires, en posant

$$x = \rho \cos \psi \quad ; \qquad y = \rho \sin \psi .$$

On déduit des formules (F):

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy) = \frac{-1}{\sigma^2 a \sigma^2 b} \frac{\sigma(u-a)\sigma(u+a)\sigma(u-b)\sigma(u+b)}{\sigma^4 u};$$

ou d'après le N° 109 :

$$(14) \qquad \rho^2 = -(pu - pa)(pu - pb)$$

Observons qu'on a aussi :

$$(14 \text{ bis}) \qquad \rho^2 = x^2 + y^2 = l^2 - z^2 = l^2 - \left(\frac{h}{3} + pu\right)^2$$

De même, on déduit de (F):

$$(15) \qquad \frac{x+iy}{x-iy} = \frac{\cos\psi + i\sin\psi}{\cos\psi - i\sin\psi} = e^{2i\psi} = -A^2\sigma^2 a\sigma^2 b \frac{\sigma(u-a)\sigma(u+b)}{\sigma(u+a)\sigma(u-b)} e^{2u(\zeta a - \zeta b)};$$

et les formules (14) ou (14 bis) et (15) donnent ρ et ψ en fonction de u. D'après ce qui a été dit plus haut, les positions réelles du pendule, et par suite les valeurs réelles de ρ et ψ, correspondent aux valeurs de u de la forme

$u = U + \Omega' i$ $\quad U$ étant réel; et réciproquement

On déduit de là un certain nombre de propositions.

275. – L'angle ψ varie toujours dans le même sens, c.à.d. que le plan vertical qui contient le pendule tourne toujours dans le même sens autour de la verticale du point de suspension.

Cela revient à dire que $\frac{d\psi}{dt}$, ou $\frac{d\psi}{du}$, garde un signe constant. On a en effet, en dérivant (15) logarithmiquement :

$$2i\frac{d\psi}{du} = \zeta(u-a) + \zeta(u+b) - \zeta(u+a) - \zeta(u-b) + 2\zeta a - 2\zeta b$$

Or d'après une formule du N° 110

$$\zeta(u+a)-\zeta(u-a)-2\zeta a=-\frac{p'a}{pu-pa};$$

il reste donc :

$$2i\frac{d\psi}{du}=\frac{p'a}{pu-pa}-\frac{p'b}{pu-pb}=\frac{p'a(pa-pb)}{(pu-pa)(pu-pb)}\quad\ldots\ldots(\text{car } p'a=p'b)$$

ou, en tenant compte de (14) :

$$2i\frac{d\psi}{du}=-\frac{p'(a)(pa-pb)}{\rho^2}$$

et le second membre a bien un signe constant : puisque ρ^2 est positif pour les valeurs réelles du temps. C. q. f. d.

276. – La courbe décrite par la projection horizontale du point pesant s'obtient en faisant tourner un même arc autour de l'origine, d'angles successifs ψ_0, $2\psi_0$, $3\psi_0$, ...

L'origine est le pied de la verticale du point de suspension : Soit en effet ρ, ψ un point réel de la courbe, correspondant à la valeur u du paramètre ; soit ρ', ψ' le point qui correspond à la valeur $u+2\Omega_1$ ($2\Omega_1$ = période réelle de pu). Ce nouveau point est réel, car si $u=V+\Omega' i$, on a : $u+2\Omega_1=(V+2\Omega_1)+\Omega' i$, $V+2\Omega_1$ étant réel avec V.

Or, en changeant u en $u+2\Omega_1$, ρ^2 ne change pas, puisque, d'après (14), ou (14 bis), c'est une fonction elliptique ; donc

$$\rho'=\rho.$$

Quand on change u en $u+2\Omega_1$, $x+iy$ se reproduit multiplié par S_1 :

$$S_1=e^{2\eta_1(b-a)+2\Omega_1(\zeta a-\zeta b)}\quad\ldots\ldots\ldots\ (\text{Voir N° } 268)$$

et $x-iy$ se reproduit multiplié par $\frac{1}{S_1}$. Donc $\frac{x+iy}{x-iy}=e^{2i\psi}$ se reproduit multiplié par S_1^2 ; c. à. d. que

$$e^{2i\psi'}=e^{2i\psi}S_1^2\quad ;\quad \text{d'où}$$

$$(16)\qquad \psi'-\psi=\frac{1}{2i}\log S_1^2=\frac{1}{i}\left[2\eta_1(b-a)+2\Omega_1(\zeta a-\zeta b)\right]$$

En d'autres termes, $\rho' = \rho$ et $\psi' = \psi + \psi_0$, ψ_0 étant la constante écrite au dernier membre ; le point ρ', ψ' se déduit donc du point ρ, ψ en faisant tourner le rayon vecteur de ce dernier d'un angle constant, ψ_0, autour de l'origine. Donc, si on construit l'arc de courbe qui correspond aux valeurs de $u = V + \Omega' i$ comprises entre $V = 0$ et $V = 2\Omega_1$ le reste de la courbe s'obtiendra en faisant tourner cet arc autour de l'origine (dans les deux sens) d'angles successifs [1] ψ_0, $2\psi_0$, $3\psi_0$, ... c. q. f. d.

277. – Appelons points homologues de la courbe deux points qui ont même rayon vecteur et dont les angles polaires diffèrent de ψ_0 : Le temps que met la projection horizontale du pendule à aller d'un point quelconque au point homologue est constant, et égal à $2\Omega_1 \sqrt{\frac{2l^2}{g}}$.

Car on passe d'un point à son homologue en augmentant u de $2\Omega_1$, c. à. d. (en vertu de $u = \sqrt{\frac{g}{2l^2}}(t + \theta)$ en augmentant le temps, t, de $2\Omega_1 \sqrt{\frac{2l^2}{g}}$.

Remarque. – Les points homologues sont les projections de points de la sphère ayant même z, car $z = -\frac{h}{3} - pu$ reprend la même valeur quand on augmente u de $2\Omega_1$.

On peut donc énoncer cette proposition :

Soit M une position quelconque du point pesant ; au bout d'un temps constant et égal à $2\Omega_1 \sqrt{\frac{2l^2}{g}}$, le point pesant repasse par le parallèle horizontal du point M_1 : Soit M_2 cette nouvelle position. L'angle au centre qui correspond à l'arc $M_1 M_2$ du parallèle est constant, et égal à ψ_0.

En particulier, le point pesant coupe le parallèle inférieur pour $V = 0$, $V = 2\Omega_1$, ... ; et le parallèle supérieur pour $V = \Omega_1$, $V = 3\Omega_1$, ... (N° 271) ; donc :

Le temps que met le pendule à aller du parallèle supérieur au parallèle inférieur (ou inversement) est constant et égal à $\Omega_1 \sqrt{\frac{2l^2}{g}}$.

278. – De cette étude résulte la solution de la question suivante :

Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que le mouvement du pendule soit périodique ; c. à. d. que le point pesant décrive

---

[1] On démontre que ψ_0 est compris entre π et 2π.

indéfiniment un même chemin.

Il est clair qu'il faut et qu'il suffit pour cela que ψ_0 soit commensurable avec 2π, c. à. d. $\psi_0 = 2\pi\frac{m}{n}$, m et n étant entiers et premiers entre eux. En ce cas, en effet, la courbe décrite par la projection horizontale du point pesant se composera de n arcs semblables, obtenus en faisant tourner un premier arc des angles ψ_0, $2\psi_0$, ... $(n-1)\psi_0$. L'arc suivant, obtenu par une rotation de $n\psi_0$, ou $2m\pi$, coïncidera avec l'arc initial, de sorte que la projection horizontale du point pesant repassera périodiquement par les mêmes positions. La période correspondante sera $2n\Omega_1$ pour u, c'est-à-dire $2n\Omega_1\sqrt{\frac{2l^2}{g}}$ pour le temps.

Au contraire, si ψ_0 n'est pas commensurable avec 2π, la projection horizontale du pendule décrira indéfiniment des arcs distincts les uns des autres en position.

Ainsi la condition nécessaire et suffisante cherchée est :

$$2\eta_1(b-a) + 2\Omega_1(\zeta a - \zeta b) = 2\pi i \frac{m}{n},$$

les quantités a, b, η_1, Ω_1 étant déterminées comme on l'a expliqué, en fonction des constantes initiales.

279. – La courbe décrite par la projection horizontale du pendule a-t-elle des points d'inflexion?

Les coordonnées d'un point de cette courbe, x et y, étant regardés comme fonctions du temps, les points d'inflexion sont donnés par l'équation

$$x'y'' - y'x'' = 0 \text{ (cours de 1}^{\text{ère}}\text{ année, p. 245)},$$

c. à. d. en tenant compte de (1) :

$$-\frac{N}{lm}(yx' - xy') = 0\,;$$

ou, en vertu de (3) :

$$\sqrt{2g}\,\frac{q}{lm}N = 0\,; \quad \text{c. à. d.} \quad N = 0.$$

Or N, tension de la tige du pendule, est donné par (12) :

$$N = \frac{mg}{l}(3z + 2h) = \frac{3mg}{l}\left[\frac{h}{3} - pu\right]$$

Il faut donc chercher si $p u$ peut être égal à $\frac{h}{3}$, pour des valeurs de u de la forme $U+\Omega' i$, c. à. d. si $\frac{h}{3}$ est ou non compris entre e_2 et e_3.

Sous une autre forme, voyons si $\frac{2h}{3}$ est ou non compris entre $e_2+\frac{h}{3}$ et $e_3+\frac{h}{3}$; ou d'après (8), si $-\frac{2h}{3}$ est, ou non, entre β et γ, en désignant toujours par α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ les racines du polynôme

$$f(z)=(z+h)(l^2-z^2)-q^2.$$

On a vu (N° 270) que α est compris entre $-\infty$ et $-l$, β et γ entre $-l$ et $+l$; donc, pour que $-\frac{2h}{3}$ soit entre β et γ, il faut et il suffit que $-\frac{2h}{3}$ soit compris entre $-l$ et $+l$, et que $f\left(-\frac{2h}{3}\right)$ soit >0.

Ainsi, les conditions nécessaires et suffisantes pour que N s'annule sont :

$$(17) \qquad l-\frac{2h}{3}>0\ ; \quad l+\frac{2h}{3}>0; \quad \frac{h}{3}\left(l-\frac{2h}{3}\right)\left(l+\frac{2h}{3}\right)>q^2$$

Ces conditions entraînent $h>0$. On en déduit d'abord que β, qui est inférieur à $-\frac{2h}{3}$, est négatif; c. à. d. d'après (8): $-\frac{h}{3}-e_3<0$; ou, d'après (11): $z_3<0$.

Ainsi : La tension de la tige du pendule ne peut devenir nulle que si le parallèle qui limite supérieurement les positions du point pesant, est au-dessus du point de suspension; mais cette condition n'est pas suffisante.

Reprenons les conditions nécessaires et suffisantes (17); elles peuvent évidemment se remplacer par les suivantes

$$h>0\ ; \qquad \frac{h}{3}\left(l-\frac{2h}{3}\right)\left(l+\frac{2h}{3}\right)>q^2.$$

ou, en substituant à h sa valeur $\frac{v_0^2}{2g}-z_0$:

$$(18) \qquad v_0^2>2gz_0 \qquad (v_0^2-2gz_0)\left[9g^2l^2-(v_0^2-2gz_0)^2\right]>54g^3q^2$$

Donc :

Si les deux conditions (18) sont vérifiées à l'instant initial, la tension de la tige deviendra nulle et la courbe décrite par la projection horizontale du point pesant aura des points d'inflexion. Sinon, elle n'en aura pas.

280. – Remarque. – Si le pendule était à fil, au lieu d'être à tige, le point pesant quitterait la sphère sur laquelle il se meut au moment où la tension du fil s'annulerait, et le mouvement, à partir de cet instant, serait régi par d'autres lois. Les conditions (18) sont nécessaires et suffisantes pour que ce cas se présente.

Construction du lieu de la projection horizontale du point pesant.

281. – Le point pesant demeurant, sur la sphère, entre deux parallèles P_2 et P_3, sa projection horizontale reste comprise entre deux circonférences:

1° Si les deux parallèles sont au-dessous du point de suspension, la projection reste comprise entre les projections P_2 et P_3 des deux parallèles;

2° Si un des parallèles, P_3, est au-dessus du point de suspension, son rayon est toujours plus grand que celui du parallèle inférieur, P_2, (N° 271) la projection reste donc comprise entre la projection du parallèle inférieur et le contour apparent de la sphère.

282. – Supposons-nous placés, par exemple, dans le premier cas, où z reste constamment positif. Pour construire la courbe décrite par la projection horizontale, il suffit, comme on l'a vu, de construire l'arc qui correspond aux valeurs de $u = V + \Omega' i$ comprises entre $V = 0$ et $V = 2\Omega_1$.

Or de $V = 0$ à $V = \Omega_1$, $pu = p(V + \Omega' i)$ croît de e_2 à e_3 (N° 271) et z décroît de z_2 à z_3, en restant positif; donc

$$\rho = \sqrt{l^2 - z^2}$$

croît de $\rho_2 = \sqrt{l^2 - z_2^2}$ à $\rho_3 = \sqrt{l^2 - z_3^2}$.

ρ_2 et ρ_3 étant les rayons des parallèles inférieur supérieur

De même, V allant de Ω_1 à $2\Omega_1$, ρ décroît de ρ_3 à ρ_2. En se souvenant que l'angle polaire, ψ varie toujours dans le même sens, et observant que la courbe touche évidemment les projections des deux parallèles, on obtient ainsi un arc $A\,B\,C$, qu'on démontrerait

aisément être symétrique par rapport à la droite AB[1].

Les points A et C sont homologues (N° 277) puisque leurs u diffèrent de $2\Omega_1$; l'angle AOC est donc ψ_0[2].

En faisant tourner l'arc ABC de ψ_0, $2\psi_0$, ... on aurait toute la courbe.

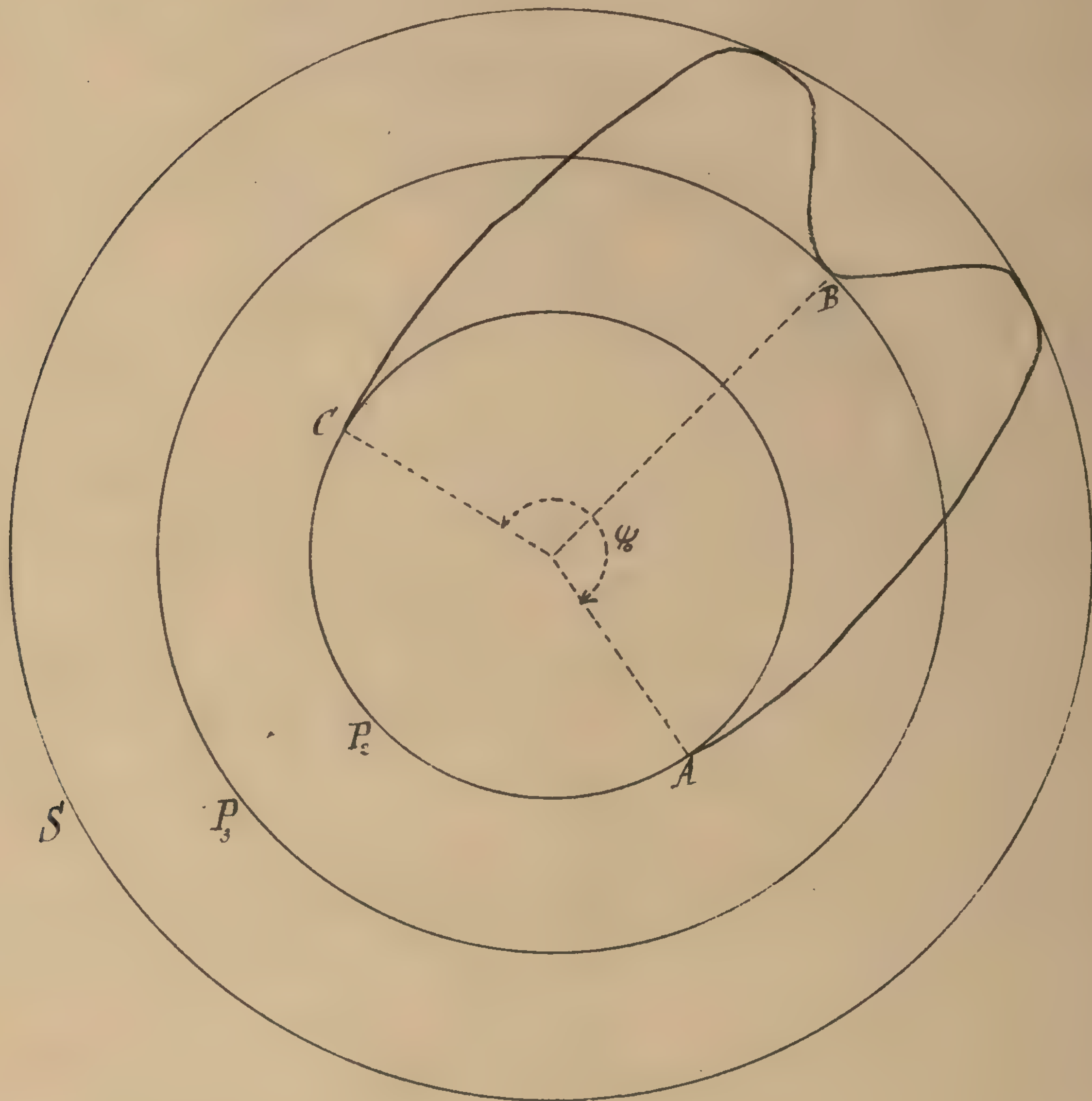
---

(1) On montrerait pour cela que si ρ, ψ est le point qui correspond à une valeur U, le point ρ'', ψ'' qui correspond à la valeur $2\Omega_1 - U$ est tel que

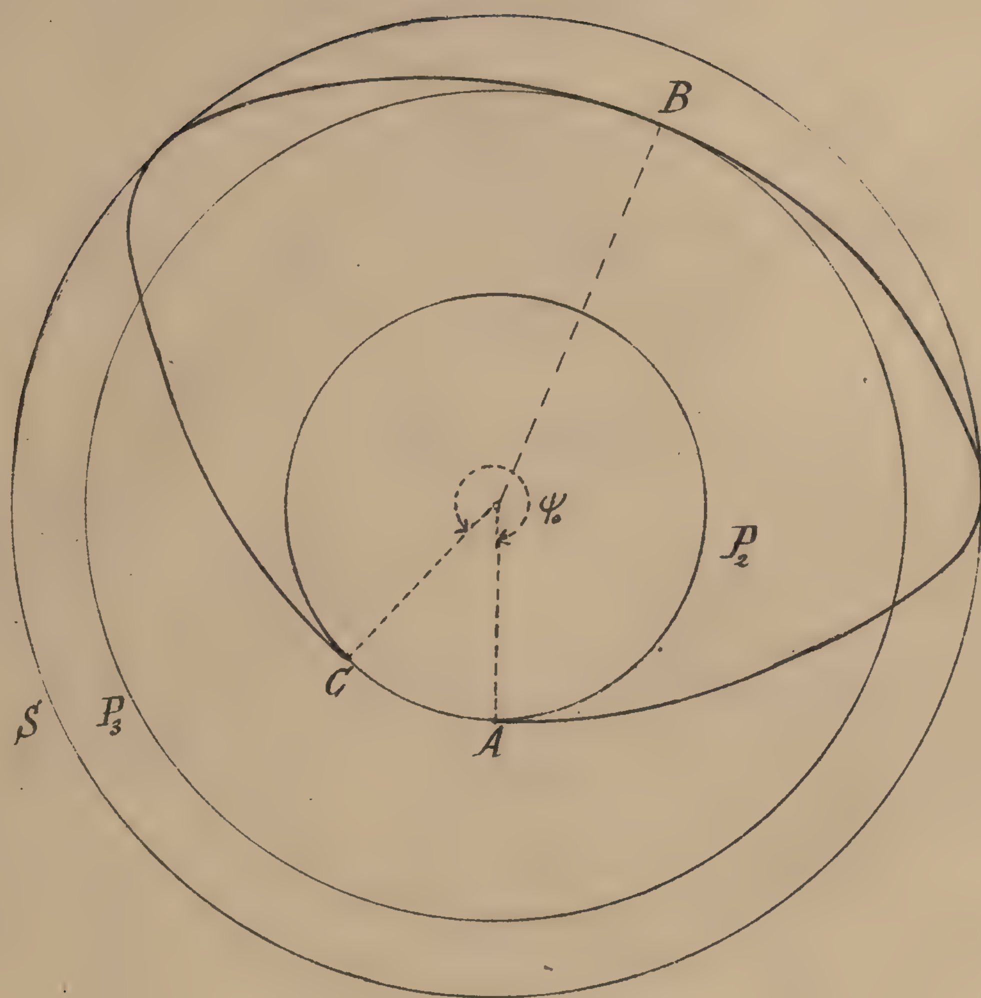
$$\rho'' = \rho ; \qquad \frac{\psi + \psi''}{2} = \text{const.}$$

(2) Ainsi, ψ_0 est la différence des angles polaires de deux sommets consécutifs situés sur le cercle P_2 ; c'est de même la différence des angles polaires de deux sommets consécutifs situés sur le cercle P_3.

283. – On construirait de même la courbe si le parallèle P_3 était au-dessous du point de suspension, en distinguant alors le cas où il y a des points d'inflexion du cas où il n'y en a pas. Voici les deux formes correspondantes.



(S, cercle de contour apparent de la sphère).



Chapitre V.

Chapitre V.

Équations aux dérivées partielles.

I. – Généralités.

284. – On nomme équation aux dérivées partielles une relation entre une fonction, z, de plusieurs variables indépendantes, $x, y, \ldots$; ces variables et les dérivées partielles des divers ordres de z par rapport à $x, y, \ldots$ L'équation est d'ordre n si la dérivée partielle de l'ordre le plus élevé qui y figure est elle-même d'ordre n. Ainsi l'équation

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = 0$$

est du second ordre.

285. – L'intégrale générale d'une équation différentielle ordinaire d'ordre n contient n constantes arbitraires; de même l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles d'ordre n contient n fonctions arbitraires. On peut s'en rendre compte comme il suit, en se bornant à l'équation du premier ordre, à deux variables indépendantes.

Soit l'équation

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0;$$

résolvons-la par rapport à une des dérivées partielles:

(1) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Je dis que l'équation (1) admettra une solution, z, qui, pour $x=0$, se réduira à une fonction arbitraire de y, $\varphi'(y)$. En effet, en développant z par la formule de Maclaurin, suivant les puissances croissantes de x, on aura :

$$(2)\qquad z(x,y)=z(0,y)+x\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{x=0}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\left[\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right]_{x=0}+\cdots\cdots$$

Or l'équation différentielle (1) permet de calculer la valeur, pour $x=0$, de tous les coefficients de ce développement.

Le premier terme en effet, $z(0,y)$ est égal, d'après l'hypothèse, à $\psi(y)$:

$$z(0,y)=\psi(y)$$

Or je dis que si on connaît les n premiers coefficients :

$$z(0,y);\ \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{x=0};\cdots\cdots\left[\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right]_{x=0},$$

on pourra calculer le suivant, c'est-à-dire $\left[\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right]_{x=0}$. En effet, l'équation proposée, (1), dérivée $(n-1)$ fois par rapport à x, donne :

$$(3)\qquad \frac{\partial^n z}{\partial x^n}=\text{fonction de}\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\cdots\frac{\partial^{n-1}z}{\partial x^{n-1}},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x},\cdots\frac{\partial^n z}{\partial y\,\partial x^{n-1}}\right)$$

Faisons dans cette relation $x=0$; les valeurs de :

$$z(0,x),\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{x=0},\cdots\left[\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right]_{x=0}$$

sont des fonctions de y supposées connues ; soit :

$$\left[\frac{\partial^h z}{\partial x^h}\right]_{x=0}=\varphi_h(y);\quad (h=0,1,2,\ldots n-1)$$

on en déduit

$$\left[\frac{\partial^{h+1} z}{\partial y\,\partial x^h}\right]_{x=0}=\varphi_h'(y)$$

et par suite, toutes les quantités qui figurent au second membre de (3) (où $x=0$) sont connues, ce qui donne la valeur de $\left[\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right]_{x=0}$.

Le premier terme du développement (2) étant connu, on pourra ainsi, de proche en proche, calculer tous les autres, et ce développement

donnera une fonction, z, de x, y, satisfaisant à l'équation proposée (1), et prenant, pour $x=0$, la valeur $\psi(y)$.

Il resterait à démontrer que le développement est convergent, ce qui a été établi par Cauchy : admettant cette convergence, sous certaines conditions, on voit que la solution z obtenue contient, dans son expression, la fonction arbitraire $\psi(y)$.

286. – Remarque. – Géométriquement, cette proposition s'énonce ainsi : l'équation différentielle

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

admet une solution, $z=\varphi(x,y)$, telle que la surface représentée par l'équation

$$z-\varphi(x,y)=0$$

passe par une courbe donnée, $z=\psi(y)$, du plan $x=0$.

287. – Plus généralement, on peut dire que l'équation différentielle admet une solution, $z=\varphi_1(x,y)$, telle que la surface $z-\varphi_1(x,y)=0$ passe par une courbe donnée de l'espace.

Soient en effet

$$x=F(y), \quad z=\psi(y),$$

les équations de cette courbe ; prenons pour variables indépendantes, à la place de x et y, les quantités ξ et η définies par :

$$\xi=x-F(y)\,; \quad \eta=y.$$

on aura

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=-\frac{\partial z}{\partial \xi}F'(y)+\frac{\partial z}{\partial \eta} \end{aligned}\right.$$

L'équation différentielle proposée devient, en y remplaçant $x, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, par leurs valeurs ci-dessus :

$$f_1\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)=0\,;$$

elle est toujours du premier ordre, elle admet donc une solution, $z=\varphi'(\xi,\eta)$, telle que la surface $z-\varphi'(\xi,\eta)=0$ passe par la courbe $\xi=0$, $z=\psi(\eta)$; ce qui revient à

dire que l'équation différentielle primitive admet une solution, $z = \varphi[x - F(y), y]$, telle que la surface correspondante, $z - \varphi = 0$, passe par la courbe $x = F(y)$, $z = \psi(y)$. C. q. f. d.

288. – Mais rigoureusement, on aurait pu raisonner comme il suit. L'équation différentielle proposée admet une solution dépendant d'une fonction arbitraire, $\theta(y)$:

$$z = \text{fonction de}\left(x, y, \theta(y)\right);$$

pour que la surface représentée par cette équation passe par la courbe $x = F(y)$, $z = \psi(y)$, il suffit que la fonction $\theta(y)$ soit choisie de manière à vérifier l'équation

$$\psi(y) = \text{fonction de}\left(F(y), y, \theta(y)\right),$$

ce qui indique tout au moins la possibilité générale du problème.

289. – Le raisonnement du N°. 285 s'étend à une équation d'ordre quelconque ; par exemple, étant donnée une équation du second ordre, à deux variables indépendantes.

$$(4) \qquad f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$$

on pourra trouver une solution, z, telle que, pour $x = 0$, on ait

$$(5) \qquad \begin{cases} \left[z\right]_{x=0} = \psi(y) \\ \left[\dfrac{\partial z}{\partial x}\right]_{x=0} = \psi_1(y), \end{cases}$$

ψ et ψ_1 étant deux fonctions arbitrairement choisies de y.

Géométriquement, cela signifie que l'équation (4) admet une surface intégrale, $z = \varphi(x, y)$, passant par une courbe donnée, $z = \psi(y)$, du plan $x = 0$ et ayant, en chaque point de cette courbe un plan tangent déterminé : car le plan tangent en un point est déterminé si on connaît les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ en ce point ; or la seconde équation (5) fait connaître $\frac{\partial z}{\partial x}$ tout le long de la courbe considérée, et la première équation (5), dérivée par rapport à y, donne de même $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Plus généralement ; on verrait, comme au N°. 287, que

l'équation (4) admet une solution $z=\varphi(x,y)$, telle que la surface intégrale correspondante, $z-\varphi(x,y)=0$, passe par une courbe C de l'espace arbitrairement choisie, et touche, tout le long de cette courbe, une surface donnée quelconque (passant également par C).

290.- Nous allons maintenant indiquer les procédés connus pour intégrer les équations aux dérivées partielles, ou plutôt pour les ramener à des systèmes d'équations différentielles ordinaires (à une seule variable); nous nous bornerons au cas des équations du premier ordre, et même dans le champ ainsi restreint à des cas particuliers: 1° celui des équations linéaires par rapport aux dérivées partielles de la fonction inconnue; 2° celui des équations à deux variables indépendantes: $f(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y})=0$.

II.- Equations linéaires du premier ordre aux dérivées partielles.

1° Equations linéaires et homogènes.

291.- Considérons d'abord l'équation linéaire et homogène (sans second membre):

$$(1) \qquad X_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\dots\dots+X_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=0$$

entre les dérivées d'une fonction inconnue z, et les n variables indépendantes, $x_1, x_2 \dots\dots x_n$. Nous supposerons de plus que $X_1, X_2, \dots X_n$ sont des fonctions de $x_1, x_2, \dots x_n$, c'est-à-dire ne contiennent pas l'inconnue z.

292.- Solution. _ Pour intégrer l'équation (1) on intègrera le système d'équations différentielles ordinaires, d'ordre $n-1$:

$$(2) \qquad \frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\dots\dots=\frac{dx_n}{X_n}.$$

Son intégrale générale renfermera $(n-1)$ constantes arbitraires, c'est-à-dire qu'il y aura, entre $x_1 \dots x_n$, $(n-1)$ relations, contenant les $(n-1)$ constantes $C_1, C_2, \dots C_{n-1}$. Résolvant ces relations par rapport aux constantes, il vient :

$$(3) \qquad \begin{array}{l} C_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots x_n) \end{array}$$

les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}$ étant (N° 213) $(n-1)$ intégrales premières distinctes du système (2).

Cela posé, la solution générale de l'équation aux dérivées partielles (1) est :

$$z = f(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1})$$

f étant une fonction arbitraire ; et toutes les solutions sont comprises dans cette formule.

Démonstration. – Je dis d'abord que les fonctions $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_{n-1}$, et plus généralement une intégrale première quelconque, φ, du système (2), sont des solutions de l'équation (1). En effet, si on a, pour les valeurs de $x_1, x_2, \dots x_n$ qui satisfont au système (2) la relation

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) = C,$$

on aura, en différentiant :

$$\frac{d\varphi}{dx_1}dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}dx_n = 0,$$

équation qui a lieu pour les mêmes valeurs de $x_1, x_2, \dots x_n$; en y remplaçant $dx_1, dx_2, \dots dx_n$ par leurs valeurs proportionnelles tirées de (2), il vient :

$$(4) \qquad X_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \dots + X_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} = 0$$

Cette équation (4) ayant lieu pour toutes les valeurs de $x_1, x_2, \dots x_n$ vérifiant le système (2), sera satisfaite, en particulier, pour les valeurs initiales, lesquelles sont arbitraires ; elle aura donc lieu quels que soient $x_1, x_2, \dots x_n$, c'est-à-dire que $z = \varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$ est une solution de l'équation proposée (1).

Cela posé, il est aisé de trouver la solution générale de cette

équation (1).

Observons, à cet effet, qu'une au moins des fonctions $X_1, \dots X_n$ n'est pas nulle ; soit par exemple $X_n \gtrless 0$. Prenons alors pour variables indépendantes à la place de $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}$;[1] la solution générale cherchée, z, sera de la forme :

$$z = F(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}, x_n)$$

Ecrivons qu'elle vérifie (1), et à cet effet formons $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial z}{\partial x_n}$. On a :

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_{n-1}} \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_{n-1}} \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_2}$$

. . . .

$$\frac{\partial z}{\partial x_n} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_{n-1}} \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial x_n} ;$$

$\frac{\partial F}{\partial x_n}$ étant la dérivée partielle de F par rapport à x_n, en tant que cette variable figure explicitement dans F. Portant ces valeurs dans (1), il reste, en tenant compte des équations telles que (4), qui expriment que $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}$ sont des solutions de (1) :

$$X_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0 ;$$

d'où, puisque X_n n'est pas nul, $\frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$, c'est-à-dire que la fonction $F(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}, x_n)$ ne doit pas contenir explicitement x_n, c.à.d. doit être fonction de $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}$. On a ainsi, pour la solution générale de l'équation (1) :

$$z = F(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}),$$

F étant une fonction d'ailleurs arbitraire. C.q.f.d.

L'intégration de l'équation (4) est ainsi ramenée à celle du système (2) ; on voit que la solution la plus générale de (1) est donnée par l'intégrale première la plus générale de (2) ; (N° 213). L'intégration de l'équation (1) ou celle du système (2) sont donc deux problèmes absolument équivalents.

---

[1] c.à.d. prenons pour variables indépendantes $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}$ et x_n. Ce changement de variables est possible, c.à.d. qu'il n'y a pas de relation entre $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_{n-1}$ et x_n. En effet 1°. Il n'y a pas de relation entre $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}$, intégrales premières d'un système différentiel canonique d'ordre $n-1$ (N° 213) ; 2° il n'y a pas de relation de la forme x_n = fonct. de $(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1})$, car une telle relation exprimerait que x_n = const. est une intégrale première du système (2), ce qui entraînerait dans (2) $dx_n = 0$ et par suite $X_n = 0$, hypothèse écartée.

2° Equations linéaires à second membre.

293. – Soit maintenant l'équation :

$$(5) \qquad X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = Z,$$

où non seulement il y a un second membre, Z, mais où $X_1, X_2, \dots X_n$ et Z sont des fonctions des variables indépendantes $x_1, \dots x_n$ et de la fonction inconnue z.

Supposons que l'inconnue z soit définie par une équation implicite

$$(6) \qquad \phi(x_1, x_2, \dots x_n, z) = 0$$

et cherchons à déterminer la fonction ϕ de telle sorte que z vérifie la proposée (5). On tire de (6), en dérivant par rapport à chacune des variables indépendantes $x_1, x_2, \dots x_n$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_1} = 0;$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0;$$

. . . .

équations qui donnent $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots$

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} : \frac{\partial \phi}{\partial z}, \text{ etc} \dots\dots$$

Portant ces valeurs dans (5) on a :

$$(7) \qquad X_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \phi}{\partial x_n} + Z \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

équation aux dérivées partielles, à laquelle doit satisfaire la fonction ϕ. Pour que la fonction z, définie par $\phi(x_1, \dots x_n, z) = 0$ soit une solution de la proposée (5), il n'est pas nécessaire que l'équation (7) ait lieu identiquement, c'est-à-dire quels que soient $x_1, x_2, \dots x_n, z$; il suffit qu'elle ait lieu pour les valeurs de $x_1, \dots x_n, z$ qui vérifient $\phi(x_1, \dots x_n, z) = 0$. Si donc nous déterminons ϕ en regardant l'équation (7) comme ayant lieu identiquement, nous obtiendrons ainsi des solutions, (7), de l'équation proposée, mais nous ne serons pas sûrs d'obtenir toutes les solutions. Suivons néanmoins cette marche.

L'équation (7), supposée vérifiée quels que soient $x_1, x_2, \dots x_n, z$, est une équation aux dérivées partielles en Φ, les variables indépendantes étant $x_1, \dots x_n, z$, du type que nous savons intégrer (N°s 291 et 292) on considère à cet effet le système de n équations :

$$(8) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Z},$$

qu'on intègre, sous la forme :

$$\varphi_1(x_1, \dots x_n, z) = C_1 \;;\; \varphi_2 = C_2 \;; \dots \dots \varphi_n = C_n \;;$$

et la solution générale de (7) est

$$\Phi = f(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n),$$

f étant une fonction arbitraire. Donc une solution, z, de l'équation proposée (5) sera définie par la relation implicite :

$$(9) \qquad f(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n) = 0$$

A priori, d'après ce qui a été dit plus haut, on ne doit pas s'attendre à avoir ainsi la solution la plus générale : mais on peut établir que la solution (9) ne laisse échapper que des solutions exceptionnelles, ne renfermant pas de constante arbitraire :

Soit en effet $\Phi(x_1, x_2, \dots x_n, z) = C$ une solution de la proposée (5) dépendant d'une constante arbitraire, C[1] ; en tirant de cette relation $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots$ comme on l'a fait plus haut, et portant dans (5), on retombe sur l'équation (7) :

$$(7) \qquad X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} + Z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

équation où C ne figure pas explicitement et qui doit avoir lieu pour les valeurs de $x_1, x_2, \dots x_n, z$ vérifiant la relation $\Phi(x_1, x_2, \dots x_n, z) = C$. Or C étant une constante arbitraire, cette relation est vérifiée par des valeurs simultanément arbitraires de $x_1, \dots x_n, z$, c. à. d. que (7) doit avoir lieu identiquement quels que soient $x_1, \dots x_n, z$.

Par suite, d'après ce qui précède, Φ est une fonction de $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$; c. à. d. que la solution $\Phi(x_1, \dots x_n, z) = C$

[1] On suppose l'équation entre $x_1, x_2, \dots x_n, z$ et C résolue par rapport à la constante C, ce qui ne diminue pas la généralité.

est comprise dans la solution (9):

$$f(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n) = 0,$$

où f est une fonction arbitraire.

Donc, comme nous l'avons annoncé, s'il existe d'autres solutions que la solution (9), ce sont des solutions ne renfermant pas de constante arbitraire, qu'on nomme solutions singulières.

294.– Voici donc l'énoncé de la règle d'intégration qui comprend, comme cas particulier, celle du N° 292.

Règle.– Soit l'équation :

$$(5)\qquad X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = Z$$

où $X_1, X_2, \dots Z$ sont des fonctions de $x_1, x_2, \dots x_n, z$. Pour l'intégrer, on intégrera le système d'équations différentielles ordinaires :

$$(8)\qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Z}$$

ce qui donnera n relations, qu'on résoudra par rapport aux n constantes arbitraires :

$$c_1 = \varphi_1(x_1, \dots x_n, z); \quad c_2 = \varphi_2; \dots\dots c_n = \varphi_n.$$

La solution générale de l'équation proposée sera donnée par la relation implicite :

$$f(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n) = 0,$$

f étant une fonction arbitraire : mais certaines solutions (singulières, ne renfermant pas de constante arbitraire) pourront échapper à cette formule.

295. Exemples.– 1° Soit à intégrer l'équation (dite des fonctions homogènes):

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = mz$$

Le système (8) est ici :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{mz},$$

d'où

$$y = c_1 x; \quad z = c_2 x^m \dots\dots \begin{cases} c_1 = \dfrac{y}{x} \\ c_2 = \dfrac{z}{x^m} \end{cases}$$

L'intégrale générale de la proposée sera :

$$f\left(\frac{z}{x^m}, \frac{y}{x}\right) = 0; \ldots\ldots \text{ou} \ldots \frac{z}{x^m} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

φ étant une fonction arbitraire. L'inconnue z est donc une fonction homogène quelconque de x, y, d'ordre m. (Voir le cours de 1ère année, p. 44).

2°. Soit l'équation :

$$ay - bx + \frac{\partial z}{\partial x}(cy - bz) + \frac{\partial z}{\partial y}(az - cx) = 0,$$

Le système (8) est ici :

(8 ter) $$\frac{dx}{cy - bz} = \frac{dy}{az - cx} = \frac{dz}{ay - bx} \ldots\ldots \text{posons} = dK, \text{ pour un instant :}$$

on a :

$$dx = dK(cy - bz)$$
$$dy = dK(az - cx)$$
$$dz = dK(ay - bx)$$

Multipliant ces trois équations respectivement par a, b, c et ajoutant, on trouve :

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0\,;$$

de même multipliant par x, y, z et ajoutant :

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0.$$

Les deux dernières relations s'intègrent de suite et donnent :

$$C_1 = ax + by + cz$$
$$C_2 = x^2 + y^2 + z^2\,;$$

c'est l'intégrale générale du système différentiel (8 ter); la solution de la proposée est donc fournie par l'équation implicite :

$$F(ax + by + cz,\ x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

qui représente une surface de révolution autour de la droite $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

3° Interprétation géométrique de la méthode d'intégration (Monge).

---

296. – Soit l'équation différentielle à deux variables indépendantes, x et y :

(10) $$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = R,$$

qui est l'équation (5), dans le cas de $n=2$: P, Q, R sont des fonctions de x, y, z.

Considérons la droite D ayant pour équations :

(D) $$\frac{X-x}{P} = \frac{Y-y}{Q} = \frac{Z-z}{R};$$

à chaque point x, y, z de l'espace correspond ainsi une droite D, passant par ce point.

Soit $z = \varphi(x, y)$ une surface intégrale de l'équation (10) : cette équation (10) exprime que le plan tangent à la surface au point (x, y, z) contient la droite D relative à ce point, car ce plan tangent est :

$$(X-x)\frac{\partial z}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial z}{\partial y} - (Z-z) = 0$$

Cela posé, appelons courbe caractéristique une courbe qui, en chacun de ses points, admette pour tangente la droite D correspondant à ce point : les courbes caractéristiques seront définies analytiquement par le système différentiel :

(C) $$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R};$$

dont l'intégrale générale, qui renferme deux constantes arbitraires, est de la forme :

(11) $$C_1 = \varphi_1(x, y, z); \qquad C_2 = \varphi_2(x, y, z)$$

Ces deux équations (11) sont celles des courbes caractéristiques ; celles-ci sont en nombre doublement infini.[1]

Or toute surface engendrée par des caractéristiques, associées

---

[1] Les équations (11) donnent la solution générale du système différentiel (C) ; elles ne donnent pas toutes les solutions. Les solutions singulières du système, s'il en existe, ne sont pas nécessairement comprises dans les formules (11).

suivant une loi quelconque, est une intégrale de l'équation proposée (10); car en chaque point (x, y, z) de cette surface, le plan tangent contient la tangente à la caractéristique qui passe en x, y, z, c'est-à-dire la droite D relative à ce point :

Réciproquement, sur toute surface intégrale de l'équation (10), il y a une infinité de caractéristiques. En effet, on peut tracer sur une surface quelconque, S, une série infinie de lignes définies par la condition de toucher, en tout point de S, une droite déterminée située dans le plan tangent : (ainsi les lignes de courbure sont celles qui touchent, en chaque point, un des axes de l'indicatrice). Or, pour une surface intégrale de (10), en tout point, M, la droite D relative à M est dans le plan tangent, puisque l'équation (10) exprime précisément cette propriété : on en conclut qu'il y a bien, sur la surface, une série infinie de lignes touchant, en chacun de leurs points, la droite D correspondante, c'est-à-dire une série de caractéristiques[1].

L'intégrale générale de (10) est donc une surface quelconque, engendrée par les caractéristiques : pour que la caractéristique (11)

$$C_1 = \varphi_1(x, y, z)\ ; \quad C_2 = \varphi_2(x, y, z),$$

engendre une surface, il suffit d'établir une relation, quelconque d'ailleurs, entre C_1 et C_2, $f(C_1, C_2) = 0$, de sorte que les surfaces intégrales cherchées sont données par l'équation :

$$f(\varphi_1, \varphi_2) = 0$$

f étant une fonction arbitraire. On retrouve ainsi, par une voie géométrique, les résultats analytiques du N° 294.

297. – Remarque. – Si l'on veut trouver la surface intégrale qui contient une courbe donnée, on prendra les caractéristiques qui passent par les divers points de cette courbe ; leur lieu sera la surface cherchée. De même on obtiendra une surface intégrale circonscrite

---

[1] Ce raisonnement peut souffrir des exceptions. En effet, les courbes qui touchent en chacun de leurs points la droite D correspondante ne sont pas nécessairement des caractéristiques, parce que le système différentiel (C) peut admettre comme solutions (singulières) d'autres courbes que les caractéristiques. Mais si de telles courbes existent, elles ne peuvent dépendre que d'une constante arbitraire, au plus, puisqu'elles ne constituent pas la solution générale du système (C) ; elles ne peuvent dès lors engendrer qu'une seule surface, dont l'équation ne renferme aucune constante arbitraire. Cette surface est d'ailleurs, quand elle existe, une solution singulière de l'équation proposée (10) : on démontre qu'elle est l'enveloppe des caractéristiques.

à une surface donnée en prenant les caractéristiques qui touchent cette surface.

298. – Exemples. – 1° Dans l'intégration de l'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution, on a trouvé pour les caractéristiques :

$$C_1 = ax + by + cz \; ; \quad C_2 = x^2 + y^2 + z^2 \; ;$$

les caractéristiques sont donc des cercles, situés dans des plans perpendiculaires à l'axe $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, et ayant leurs centres sur cet axe (parallèles).

2° Déterminer une surface telle que le plan tangent en un quelconque de ses points, M, rencontre l'axe OZ en un point qui soit équidistant du point M et de l'origine.

Le plan tangent en $M(x, y, z)$ étant :

$$Z - z = \frac{\partial z}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y - y),$$

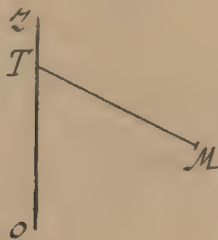
l'équation du problème est :

$$x^2 + y^2 + \left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left[z - x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}\right]^2,$$

ou, en réduisant :

(12) $$2x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2 - x^2 - y^2}{z}$$

C'est une équation linéaire par rapport à $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$, qu'on intégrerait aisément par la méthode analytique générale ; il sera plus intéressant de l'intégrer géométriquement.



Soit M un point quelconque d'une surface intégrale ; désignons par T le point de OZ équidistant de M et de O : le plan tangent à la surface intégrale en M doit passer par T, c'est-à-dire contenir la droite MT. C'est là la condition nécessaire et suffisante que doivent vérifier les surfaces intégrales ; c'est celle qu'exprimerait analytiquement l'équation (12).

Il en résulte que MT est la droite D qui correspond au point M.

Cherchons maintenant les caractéristiques, c'est-à-dire les courbes qui admettent pour tangente en un point quelconque M, la droite D (c. à. d. MT) relative à ce point. L'égalité $TO = TM$ montre que la droite MT est tangente, en M, au cercle qui passe par M et qui touche Oz au point O; par suite les cercles (en nombre doublement infini) qui passent par l'origine O et touchent en ce point l'axe Oz sont les caractéristiques.

La surface intégrale est donc une surface quelconque engendrée par des cercles touchant Oz en O; un tel cercle est situé 1° dans un plan mené par Oz; 2° sur une sphère passant par l'origine O, et touchant en ce point un plan arbitrairement choisi mené par Oz, le plan $x = 0$, par exemple. Les caractéristiques ont donc pour équations :

$$y = C_1 x \, ; \quad x^2 + y^2 + z^2 = C_2 x,$$

d'où, pour l'équation d'une surface engendrée par ces lignes :

$$f\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x}, \frac{y}{x}\right) = 0$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 = x\,\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

ψ étant une fonction arbitraire. On a ainsi trouvé les surfaces cherchées sans même se servir de l'équation (12), qui les définit analytiquement. En intégrant celle-ci on arriverait aux mêmes résultats.

III. – Equations du premier ordre aux dérivées partielles à deux variables indépendantes (non linéaires).

---

299. – Ce sont les équations de la forme :

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \tag{1}$$

en posant, pour simplifier l'écriture :

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Lagrange a donné, pour intégrer l'équation (1) une méthode extrêmement remarquable.

On suppose connue (et nous verrons plus loin le moyen de l'obtenir) ce qu'on appelle une solution ou intégrale complète, c. à. d. une relation entre x, y, z et deux constantes arbitraires, α et β :

$$(2) \qquad \Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0\,;$$

telle que la fonction z définie par cette relation soit une ~~relation~~ solution de la proposée (1), quelles que soient les valeurs des constantes α et β.

Une telle fonction Φ étant connue, on peut en déduire l'équation différentielle (1); car on a, en dérivant (2) par rapport aux variables indépendantes x, y :

$$(3) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + p\,\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0\,,$$

$$(4) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} + q\,\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0\,,$$

et, en éliminant α et β entre (2), (3) et (4), on arrive a une relation :

$$(5) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0$$

que je dis être identique à la proposée (1). Car, s'il en était autrement, entre les relations (1) et (5), (que vérifie la fonction z de x, y, définie par (2),) éliminons q : nous obtenons une relation $\theta(x. y, z, p) = 0$, vérifiée par cette même fonction. Or en choisissant convenablement α et β dans (2), on peut faire en sorte que, pour x et y donnés, z et $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ aient des valeurs arbitraires[1] : il ne saurait donc exister de relation entre x, y, z, p ; d'où la nécessité que les équations (1) et (5) soient les mêmes.

---

[1] Voici comment on peut rendre ce raisonnement absolument rigoureux. Résolvons l'équation (2) par rapport à β :

$$(2\text{ bis}) \qquad \beta = \varphi(x, y, z, \alpha).$$

Je dis d'abord que l'une au moins des dérivées partielles $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ contient α. Car on a identiquement :

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,dz + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\,d\alpha, \text{ d'où, par la formule du N}^{\circ}\text{ 9 :}$$

$$\varphi = \int_0^x \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx + \int_0^y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 dy + \int_0^z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{00} dz + \int_0^\alpha \frac{\partial \varphi(0,0,0,\alpha)}{\partial \alpha}\,d\alpha$$

et si $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ ne contiennent pas α, on voit que α ne figure dans φ qu'au

Méthode d'intégration.

300. — Voici maintenant comment Lagrange déduit de l'intégrale complète $\Phi = 0$ toutes les solutions de la proposée (1).

L'équation (1) étant, comme on vient de le voir, le résultat de l'élimination de α, β entre (2), (3) et (4), peut être remplacée par le système des trois équations (2), (3) et (4) où les inconnues sont z, α et β: en d'autres termes, intégrer (1) revient à trouver trois fonctions, z, α, β, de x et y, vérifiant (2), (3) et (4). Or si on dérive (2) par rapport à x et y, en considérant α et β comme des fonctions de x, y, il vient:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + p\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + q\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial y} = 0$$

équations qui, en tenant compte de (3) et (4), deviennent:

(6) $$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} = 0,$$

(7) $$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial y} = 0;$$

et le système des équations (2), (6) et (7) est équivalent au système (2), (3) et (4). On a donc finalement à déterminer trois fonctions, z, α, β, vérifiant (2), (6) et (7).

---

dernier terme, de sorte que $\varphi = \text{fonct}(x, y, z) + \psi(\alpha)$. L'équation (2 bis) s'écrit alors $\beta - \psi(\alpha) = \text{fonct}(x, y, z)$, et elle ne renferme en réalité qu'une seule constante, $\beta - \psi(\alpha)$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Cela posé, supposons que $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ou $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, contienne α; je dis qu'en choisissant convenablement α et β dans (2 bis) on peut faire en sorte que, pour x et y donnés, z et p aient des valeurs arbitraires. Dérivons en effet (2 bis) par rapport à x; il vient:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0;$$

équation d'où on peut tirer α en fonction de x, y, z et p, puisque α y figure par hypothèse. L'équation (2 bis) donne ensuite β.

Si α ne figure ni dans $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ni dans $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, il figure dans $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$: alors c'est p qu'il faut éliminer entre (1) et (5); on obtient ainsi une relation $\theta_1(x, y, z, q) = 0$, dont on démontre l'impossibilité comme ci-dessus.

Or les relations (6) et (7) sont linéaires et homogènes en $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}$; deux cas sont donc à ~~intégrer~~.

1° Le déterminant $\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial y}$ n'est pas nul : les relations (6) et (7) donnent alors

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0 \; ; \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = 0 \; ;$$

équations qui, jointes à (2), déterminent z, α et β, et, par élimination de α et β, l'inconnue principale z.

On obtient ainsi une solution, z, de l'équation proposée, qui ne contient rien d'arbitraire ; c'est ce que Lagrange appelle la solution ou intégrale singulière.

2° Si le déterminant (Jacobien) $\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{dy}$ est nul, cela exprime (cours de 1ère Année, page 24) qu'il existe une relation entre α et β ;

(8) $$\beta = \varphi(\alpha)$$

φ étant une fonction, quelconque d'ailleurs. Introduisant cette hypothèse dans les équations (6) et (7), celles-ci deviennent :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\varphi'(\alpha)\right] = 0 ,$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\varphi'(\alpha)\right] = 0 ;$$

auxquelles on peut satisfaire de deux manières :

a) en posant $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$; d'où $\alpha =$ constante, et en vertu de (8), $\beta =$ const on retrouve ainsi l'intégrale complète $\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$, dont on est parti.

b) en posant

(9) $$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\varphi'(\alpha) = 0 .$$

Les inconnues z, α, β sont alors déterminées par les trois équations (2), (8), (9) :

$$\Phi = 0 \; ; \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\varphi'(\alpha) = 0 \; ; \quad \beta = \varphi(\alpha) ,$$

où φ désigne une fonction arbitraire. L'élimination théorique de α et β donnerait une solution, z, dépendant d'une fonction arbitraire ; c'est cette solution que Lagrange appelle solution ou intégrale générale.

Le problème de déduire d'une intégrale complète toutes les autres intégrales est ainsi complètement résolu.

Interprétation géométrique.

---

301. — L'intégrale complète :

$$\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0,$$

où α et β sont des constantes, représente une surface ; en faisant varier α et β, on obtient une double infinité de surfaces qui sont toutes, par hypothèse, des surfaces intégrales de l'équation proposée (1).

L'intégrale singulière, surface obtenue en éliminant α et β entre :

$$\Phi = 0 ; \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0 ; \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = 0,$$

est l'enveloppe de ces surfaces. (Cours de 1ère année N° 245). Par exemple si les surfaces $\Phi = 0$ sont des plans, l'intégrale singulière est la surface, S, que touchent tous ces plans, chaque plan touchant l'enveloppe en un seul point.

L'intégrale générale s'obtient, en considérant dans la série doublement infinie des surfaces $\Phi = 0$, une série quelconque, simplement infinie (ce qui se fait en établissant entre α et β une relation quelconque, $\beta = \varphi(\alpha)$) et en prenant l'enveloppe des surfaces ainsi déterminées : car les équations qui définissent l'intégrale générale

$$\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0 ; \quad \beta = \varphi(\alpha) ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \varphi'(\alpha) = 0$$

donnent, en éliminant β :

$$\Phi(x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)) = 0 ; \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \varphi'(\alpha) = 0$$

La seconde équation ayant pour premier membre la dérivée de $\Phi(x, y, z, \alpha, \varphi, (\alpha))$ par rapport à α, l'élimination de α entre les deux dernières relations donnerait l'enveloppe des surfaces $\Phi(x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)) = 0$; ce qui démontre la proposition. (Voir cours de 1ère Année p. 233).

Par exemple, si les surfaces Φ sont les plans tangents d'une surface S, l'intégrale générale sera l'enveloppe d'une série simplement infinie de ces plans, c. à. d. une surface développable quelconque, circonscrite à S.

Autre exemple. - Les surfaces $\Phi = 0$ sont des sphères, de rayon donné R, ayant leurs centres dans un plan π : l'intégrale singulière enveloppe de toutes ces surfaces, est l'ensemble des deux plans parallèles au plan π, situés à une distance R de celui-ci ; l'intégrale générale est une surface-canal, enveloppe des sphères de la série dont les centres décrivent une ligne quelconque du plan π ; chacune des sphères de la série touche cette enveloppe le long d'un grand cercle.

302. - En Résumé, l'intégrale singulière est l'enveloppe des surfaces, en nombre doublement infini, représentées par l'intégrale complète, chaque surface touchant l'enveloppe en un nombre limité de points ; l'intégrale générale est l'enveloppe d'une série simplement infinie de ces surfaces, chacune des enveloppées touchant l'enveloppe le long d'une ligne. C'est le choix arbitraire de la série simplement infinie qui introduit, dans l'intégrale générale, une fonction arbitraire

303. - Remarques. - 1° Il est évident a priori que l'enveloppe de toutes les surfaces $\Phi = 0$, ou d'une infinité simple d'entre elles, sera une solution de la proposée $f(x, y, z, p, q) = 0$: car, en un quelconque de ses points, l'une ou l'autre enveloppe touche une des surfaces Φ, de sorte qu'en ce point, x, y, z, p, q sont les mêmes pour l'enveloppe et pour la surface Φ ; celle-ci vérifiant la proposée, il en est de même de l'enveloppe.

2° L'intégrale singulière est l'enveloppe, non seulement des surfaces $\Phi = 0$, qui répondent à l'intégrale complète considérée, mais de toutes les surfaces données par l'intégrale générale. Cela résulte de ce théorème de Géométrie, facile à établir. Soit une infinité simple de surfaces Φ' dont chacune touche en un ou plusieurs points, $a_1, a_2, \dots$, une surface S ; l'enveloppe des surfaces Φ', touche S le long d'une ligne, qui est le lieu des points $a_1, a_2, \dots \dots$

3° Il y a une infinité d'intégrales complètes ; on les obtient en prenant pour $\varphi(\alpha)$ une fonction renfermant deux constantes arbitraires. Elles sont donc comprises, comme cas particuliers, dans l'intégrale générale.

4° La solution singulière S, reste la même quelle que soit l'intégrale complète dont on parte : car, d'après 2° elle est aussi l'enveloppe des surfaces correspondant à l'intégrale générale, ce qui la définit complètement.

304. — Au point de vue analytique, la solution, z, de l'équation différentielle ne peut être effectivement obtenue sous sa forme générale, puisqu'il faudrait, pour cela, éliminer α et β entre :

$$\Phi = 0 \;; \qquad \beta = \varphi(\alpha) \;; \; \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\varphi'(\alpha),$$

ou encore éliminer α entre :

(10) $$\Phi\left(x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)\right) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi'_{\alpha} = 0,$$

ce qui est impossible tant qu'on ne particularise pas la fonction arbitraire φ. On ne peut donc représenter l'intégrale générale par une seule équation ; il faut les deux équations (10), qui définissent à la fois l'inconnue cherchée, z, et une inconnue auxiliaire, α.

Mais au point de vue géométrique, on peut représenter paramétriquement la surface intégrale générale, et cela d'une manière explicite. Tirons en effet des deux équations (10) les valeurs de deux des coordonnées x, y, z, par exemple de y et de z : ce calcul est possible théoriquement, puisque ni x, ni y, ni z ne sont engagés sous le signe de la fonction arbitraire φ. On aura ainsi

$$y = F_1\left(x, \alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha)\right) ; \qquad z = F_2\left(x, \alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha)\right)$$

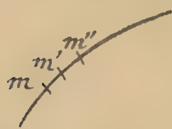
en y joignant l'équation $x = x$, on aura x, y et z exprimés en fonction de deux paramètres, x et α, ce qui définit la surface intégrale générale. Nous verrons une application de cette remarque au N° 313.

Remarques. — On peut aisément obtenir la surface intégrale qui passe par une courbe donnée ; il suffit, pour cela, de prendre les surfaces $\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$ qui touchent cette courbe ; elles sont en nombre simplement infini, et leur enveloppe est une surface intégrale qui, évidemment, contient la courbe[1].

De même, l'enveloppe des surfaces $\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$ qui touchent une surface donnée, Σ, est une surface intégrale circonscrite à Σ.

---

[1] Je dis en effet que si des surfaces Φ, en nombre simplement infini, touchent une courbe, C, leur enveloppe contient cette courbe. Car, dire qu'une surface Φ touche C, c'est dire qu'elle coupe C en deux points infiniment voisins, m et m' ; de même, une surface Φ', voisine de Φ, coupe C en m' et en un point voisin m''. Le point m' est donc commun à Φ et à Φ', et, en passant à la limite, on voit que la surface Φ est coupée par la surface infiniment voisine suivant une ligne qui passe par m. Or l'enveloppe des surfaces Φ est le lieu des lignes suivant lesquelles chacune d'elles est coupée par la surface infiniment voisine de la série ; ce lieu contient donc le lieu du point m, c. à. d. la courbe C.



Détermination d'une intégrale complète.

305. – D'après la théorie précédente, l'intégration de l'équation

$$(1) \qquad f(x, y, z, p, q) = 0$$

se ramène à la détermination d'une intégrale complète, c'est-à-dire d'une intégrale contenant deux constantes arbitraires. Lagrange a ramené ce problème à celui de la recherche d'une intégrale première d'un système différentiel ordinaire d'ordre trois, nous ne développerons la méthode de Lagrange que pour les équations du type (1) où z ne figure pas c'est-à-dire pour les équations :

$$(1') \qquad f(x, y, p, q) = 0$$

Lagrange observe que si l'on trouve deux fonctions p et q, des variables x, y : 1° vérifiant l'équation (1'), 2° dépendant d'une constante arbitraire, α, et 3° telles qu'on ait :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

l'expression $p\,dx + q\,dy$ sera (N° 11) la différentielle exacte d'une fonction z, de x et y. Cette fonction z, définie par

$$z = \int (p\,dx + q\,dy) + \beta$$

dépendra de deux constantes arbitraires, α et β, et satisfera à l'équation (1), puisque $\frac{\partial z}{\partial x} = p$; $\frac{\partial z}{\partial y} = q$. Ce sera donc une intégrale complète.

Pour trouver p et q, associons à l'équation (1') une équation de même forme :

$$(2') \qquad \varphi(x, y, p, q) = 0$$

et cherchons à déterminer φ de manière que les valeurs de p et q, tirées de (1') et (2') vérifient $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$. Formons à cet effet les dérivées partielles de p et q, en dérivant (1') et (2') par rapport à x et y. Il vient :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots \text{d'où } \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}}{\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial q}}$$

On aurait de même $\frac{\partial p}{\partial y}$; .... $\frac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial q}}{\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial p}}$;

en égalant ces deux expressions, on a :

(3') $$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Pour que la fonction $\varphi(x, y, p, q)$ convienne, il faut donc qu'elle vérifie l'équation (3'), et cela pour les valeurs de x, y, p, q qui satisfont aux équations (1') et (2'). Elle conviendra *a fortiori* si elle vérifie identiquement l'équation (3'), c'est-à-dire quelles que soient les valeurs de x, y, p, q. Sous ce point de vue, l'équation (3') est une des équations linéaires, sans second membre, dont nous savons ramener l'intégration à celle d'un système différentiel ordinaire ; ce système est ici (N° 292):

(4') $$\frac{dx}{\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)} = \frac{dy}{\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)} = \frac{dp}{-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} = \frac{dq}{-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}$$

Il est inutile d'intégrer complètement ce système, qui est d'ordre trois ; il suffit d'en connaître une seule intégrale première, $\varphi_1(x, y, p, q) = \text{const.}$ Car la solution générale de (3') étant

$$\varphi = F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$$

où F est une fonction arbitraire, et φ_2, φ_3 deux autres intégrales premières du système (4'), on aura une solution particulière de (3'), renfermant une constante arbitraire, α, en posant

$$\varphi = \varphi_1 + \alpha$$

Dès lors les deux équations :

(5') $$\begin{cases} f(x, y, p, q) = 0 \\ \varphi_1 + \alpha \quad = 0 \end{cases}$$

donneront en général, à condition que φ_1 contienne une au moins des quantités p et q, des valeurs de p et q, renfermant une constante arbitraire et vérifiant $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$. On en déduira une intégrale complète, z, de (1'):

$$z = \int (p\,dx + q\,dy) + \beta,$$

comme il a été dit plus haut.

306. – Remarque. – On peut observer que $\varphi = f$ est évidemment une solution de (3'), ce qui prouve (N° 292) que $f =$ const. est une intégrale première du système (4'). C'est une autre intégrale première de ce système qu'il faut trouver, car l'hypothèse $\varphi_1 = f$ introduite dans (5') conduirait à une absurdité, si $\alpha \gtrless 0$; ou à une indétermination, si $\alpha = 0$. Toutefois la connaissance de l'intégrale première $f = 0$ permet d'abaisser d'une unité l'ordre du système (4') – (N° 213), c'est-à-dire de le ramener au second ordre. Cette remarque donne la mesure de la difficulté du problème ; on voit ainsi que l'intégration de l'équation $f(x, y, p, q) = 0$ se ramène à la recherche d'une intégrale première d'un système canonique d'ordre deux.

307. – Exemple. – Soit à intégrer l'équation

$$px + qy = f_1(p, q)$$

Les deux dernières équations du système (4') donnent

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} \text{ ; d'où } q = \alpha p,$$

ce qui est une intégrale première de (4'). Portant la valeur $q = \alpha p$ dans la proposée, on en tirera p en fonction de x, y, α ; d'où l'on déduira $q = \alpha p$, et une intégrale complète z, par le procédé ci-dessus.

Si par exemple la proposée est :

$$px + qy = pq,$$

on aura :

$$p = \frac{1}{\alpha}(x + \alpha y) ; \qquad q = x + \alpha y ;$$

$$z = \int \left[\frac{1}{\alpha}(x+\alpha y)\,dx + (x+\alpha y)\,dy\right] = \int_0^x \frac{1}{\alpha}(x+\alpha y)\,dx + \int_0^y \alpha y\,dy + \beta \ \ldots\ldots \text{ (N° 11)}$$

c'est-à-dire

$$z = \frac{1}{2\alpha}(x+\alpha y)^2 - \frac{1}{2}\alpha y^2 + \frac{1}{2}\alpha y^2 + \beta$$

ce qui est une intégrale complète de la proposée.

308. – Dans quelques cas, il est possible de découvrir directement, sans qu'il soit nécessaire d'appliquer la méthode précédente, une intégrale complète de l'équation $f(x, y, p, q) = 0$. Voici des exemples.

1° Une des variables x, ou y, manque dans l'équation $f(x, y, p, q) = 0$: si y manque, résolvons l'équation par rapport à p ;

$$p = \varphi'(x, q),$$

on voit de suite qu'en posant $q=\alpha$, (α étant une constante), d'où $p=\psi'(x,\alpha)$, la condition dite d'intégrabilité, $\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}$ sera satisfaite, ses deux membres étant nuls. On a donc une intégrale complète par la formule :

$$z=\int\psi'(x,\alpha)\,dx+\alpha y+\beta.$$

2° Si l'équation proposée peut se mettre sous la forme :

$$f_1(x,p)=f_2(y,q)$$

On posera :

$$f_1(x,p)=f_2(y,q)=\alpha,$$

α étant une constante arbitraire ; d'où on tirera :

$$p=\varphi_1(x,\alpha)\,;\quad q=\varphi_2(y,\alpha).$$

p étant une fonction de x seul, et q de y seul, la condition $\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}$ est encore satisfaite (ses deux membres étant nuls), et une intégrale complète de la proposée sera

$$z=\int\varphi_1(x,\alpha)\,dx+\int\varphi_2(y,\alpha)\,dy+\beta.$$

On peut appliquer ce procédé aux équations :

$$pq=xy\;;\qquad p^2+q^2=x^2+y^2$$

en les écrivant

$$\frac{p}{x}=\frac{y}{q}\qquad p^2-x^2=y^2-q^2\,;\ \ldots\ldots \text{etc.}$$

309. – Cas où z figure dans l'équation $f(x,y,z,p,q)=0$. – Comme nous l'avons dit plus haut, Lagrange a indiqué un procédé pour trouver une intégrale complète de cette équation, en cherchant une intégrale première d'un système canonique ordinaire ; ce procédé ne sera pas donné ici : toutefois, les considérations précédentes permettent, dans certains cas, d'obtenir une intégrale complète.

1° Supposons qu'une des variables x, y – y par exemple – manque dans l'équation ; celle-ci est de la forme

$$f(x,z,p,q)=0.$$

Prenons pour variables indépendantes x et z; pour inconnue y. La relation

$$dz = p\,dx + q\,dy\ ; \text{ ou : } \quad dy = -\frac{p}{q}dx + \frac{1}{q}dz$$

donne :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x} = p_1 = -\dfrac{p}{q} \\ \dfrac{\partial y}{\partial z} = q_1 = \dfrac{1}{q} \end{cases} \quad \text{d'où} \dots\dots \begin{cases} p = -\dfrac{p_1}{q_1} \\ q = \dfrac{1}{q_1} \end{cases}$$

et l'équation proposée devient ainsi :

$$f\left(x, z, -\frac{p_1}{q_1}\, \frac{1}{q_1}\right) = 0\ ; \text{ ou } \psi(x, z, p_1, q_1) = 0$$

L'inconnue y n'y figurant pas, la recherche d'une intégrale complète se ramènera (N°. 305) à celle d'une intégrale première du système :

$$\frac{dx}{\psi'_{p_1}} = \frac{dz}{\psi'_{q_1}} = \frac{dp_1}{-\psi'_x} = \frac{dq_1}{-\psi'_y}$$

Soit par exemple à intégrer :

$$z = pq$$

En prenant y pour inconnue, cette équation devient :

$$q_1^2 = -\frac{p_1}{z}\ ;$$

x n'y figurant pas, on y satisfait (N°. 308, 1°.) en posant

$$p_1 = -\alpha\ ; \quad \text{d'où } q_1 = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{z}}$$

et

$$y = \int\left(-\alpha\,dx + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{z}}dz\right) = -\alpha x + 2\sqrt{\alpha z} - \beta$$

ce qui donne l'intégrale complète :

$$4\alpha z = (y + \alpha x + \beta)^2 \dots\dots\dots\dots \text{(cylindres paraboliques)}$$

2°. Parfois on peut apercevoir immédiatement une intégrale complète, comme, par exemple, dans le cas de l'équation de Clairaut généralisée :

$$z = px + qy + \psi(p,q);$$

on a une intégrale complète en prenant :

$$z = \alpha x + \beta y + \psi(\alpha, \beta),$$

α et β étant deux constantes ; car cette relation donne $p = \alpha$, $q = \beta$, et ces valeurs de z, p, q, vérifient bien la proposée. Les surfaces représentées par l'intégrale complète sont des plans, dont l'enveloppe s'obtient en éliminant α et β entre :

$$z = \alpha x + \beta y + \psi(\alpha, \beta) \; ; \quad x + \psi'_\alpha = 0 \; ; \quad y + \psi'_\beta = 0$$

cette enveloppe est l'intégrale singulière ; l'intégrale générale est une surface développable quelconque circonscrite à la précédente (N.º 301).

IV. – Equations aux dérivées partielles d'ordre supérieur au premier.

---

310. – On se bornera à donner quelques exemples d'intégration d'équations aux dérivées partielles du second ordre : l'intégrale générale d'une telle équation contient (N.º 289) deux fonctions arbitraires.

Cas particuliers divers.

311. – Il peut arriver que tous les termes de l'équation soient des dérivées exactes par rapport à une des variables ; soit par exemple l'équation :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x};$$

on en tirera de suite, en intégrant les deux membres par rapport à x :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z + \varphi(y)$$

$\varphi(y)$ étant une fonction arbitraire de y (car la constante d'intégration ne doit être constante que par rapport à x). On est ainsi ramené à une équation du premier ordre linéaire par rapport aux dérivées partielles, et à laquelle s'applique la méthode générale du N.º 294.

312. — Si dans l'équation différentielle proposée il n'entre que des dérivées prises par rapport à une des variables, on regardera les autres variables comme des constantes, et on aura à intégrer une équation différentielle ordinaire à une inconnue et à une variable ; seulement on aura soin de remplacer les constantes introduites dans l'intégration par des fonctions arbitraires des variables regardées comme constantes. Soit, par exemple, l'équation :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 3x\frac{\partial z}{\partial y} + 2x^2 z = 0\,;$$

en y regardant x comme constant, c'est une équation linéaire, à coefficients constants, sans second membre. L'équation caractéristique (N° 230) est :

$$S^2 - 3xS + 2x^2 = 0,$$

ce qui donne $S = x$ et $S = 2x$. L'intégrale générale est donc :

$$z = C_1 e^{xy} + C_2 e^{2xy},$$

C_1 et C_2 étant des fonctions arbitraires de x.

313. — Donnons une application géométrique de ces considérations.

Problème. — Trouver les surfaces sur lesquelles les lignes de courbure d'un système sont situées dans des plans parallèles.

Soit $z = f(x,y)$ la surface cherchée, posons comme d'ordinaire $\frac{\partial z}{\partial x} = p\,; \ldots \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \ldots\,;$ l'équation différentielle des lignes de courbure (N° 181) est :

$$(C)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left[pqt - s(1+q^2)\right] + \frac{dy}{dx}\left[(1+p^2)t - (1+q^2)r\right] + s(1+p^2) - pqr = 0.$$

Si nous prenons pour plan des xz un plan parallèle à ceux des lignes de courbure du système considéré, l'équation ci-dessus devra être vérifiée pour $dy = 0$, c'est-à-dire qu'on aura, pour déterminer z, l'équation aux dérivées partielles du second ordre :

$$(1)\qquad s(1+p^2) - pqr = 0$$

qu'on peut écrire :

$$\frac{pr}{1+p^2} = \frac{s}{q}\,; \quad \text{ou} \quad \frac{p\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)}{1+p^2} = \frac{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)}{q}$$

car $r = \frac{\partial p}{\partial x}$; $s = \frac{\partial q}{\partial x}$. Sous cette dernière forme les deux membres de l'équation différentielle sont des dérivées exactes par rapport à x; (N° 311) intégrons :

$$\frac{1}{2} \log(1+p^2) + \text{Const.} = \log q ,$$

la constante étant une fonction arbitraire de y, que nous désignerons par $\log \varphi'(y)$. On a ainsi :

(2) $$q = \sqrt{1+p^2}\ \varphi'(y) ;$$

équation aux dérivées partielles du premier ordre, qui ne renferme ni z ni x. On aura donc une intégrale complète (N° 308, 1°) en posant $p = \alpha$, d'ou $q = \sqrt{1+\alpha^2}\,\varphi'(y)$, α étant une constante, ce qui donne :

$$z = \int (p\,dx + q\,dy) = \alpha x + \sqrt{1+\alpha^2}\,\varphi(y) + \beta ;$$

intégrale complète avec les deux constantes arbitraires α et β.

L'intégrale générale de (2), c'est-à-dire la surface cherchée, s'obtiendra donc, suivant la méthode de Lagrange, en éliminant le paramètre α entre les deux équations :

$$Z = \alpha x + \sqrt{1+\alpha^2}\,\varphi(y) + \psi(\alpha),$$

$$0 = x + \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,\varphi(y) + \psi'(\alpha)$$

$\psi(\alpha)$ étant une fonction arbitraire du paramètre α. On peut, pour obtenir une représentation paramétrique de la surface cherchée (N° 304) résoudre ces deux équations par rapport à x et à z, ce qui donne :

$$x = -\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,\varphi(y) - \psi'(\alpha)$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,\varphi(y) + \psi(\alpha) - \alpha\,\psi'(\alpha)$$

En y joignant :

$$y = y ;$$

on a trois équations, qui définissent les coordonnées d'un point de la surface cherchée en fonction de deux paramètres α et y, et où φ et ψ sont deux fonctions arbitraires.

On peut simplifier cette représentation paramétrique en

posant $\varphi(y) = u$; d'où $y = F(u)$, F étant évidemment une fonction arbitraire, puisque φ l'est.

On a ainsi :

$$(\S) \quad \begin{cases} x = -\dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\, u - \psi'(\alpha), \\ y = F(u) \\ z = \dfrac{u}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \psi(\alpha) - \alpha\,\psi'(\alpha), \end{cases}$$

les deux paramètres sont maintenant α et u.

Équations linéaires aux dérivées partielles.

314. – Une équation aux dérivées partielles, linéaire par rapport à l'inconnue, z, et à ses dérivées, jouit de propriétés évidentes, analogues à celles des équations différentielles linéaires ordinaires.

Tout d'abord, si elle a un second membre, on pourra le faire disparaître si l'on connaît une solution particulière, z_0, de cette équation ; il suffira de poser $z = z_0 + t$, t étant l'inconnue nouvelle.

Une équation linéaire sans second membre possède les deux propriétés suivantes : 1° si z est une solution, Cz en est une autre, C désignant une constante arbitraire ; 2° si z_1 et z_2 sont des solutions, $C_1 z_1 + C_2 z_2$ en est une autre, C_1 et C_2 désignant des constantes arbitraires.

315. – On rencontre à chaque instant, en Physique mathématique, des équations linéaires, aux dérivées partielles, à coefficients constants : pour ces équations, on peut toujours trouver une solution renfermant autant de constantes arbitraires que l'on veut. Soit en effet l'équation :

$$az + \left(a_1 \frac{\partial z}{\partial x} + b_1 \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(a_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c_2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \cdots = 0$$

les $a, b, c, \ldots$ étant des constantes, et dont l'ordre est quelconque. Je dis qu'on a des solutions de la forme $z = e^{\alpha x + \beta y}$, α et β étant des constantes : substituons en effet dans la proposée cette valeur de z, il vient, après suppression du facteur $e^{\alpha x + \beta y}$:

$$(3) \qquad a + (a_1 \alpha + b_1 \beta) + (a_2 \alpha^2 + b_2 \alpha \beta + c_2 \beta^2) + \cdots\cdots = 0$$

équation entre α et β. Si donc on prend pour α et β les coordonnées d'un point quelconque de la courbe que représente cette équation, $z = e^{\alpha x + \beta y}$ sera solution de la proposée ; on a ainsi autant de solutions particulières qu'on veut, et en les ajoutant, après les avoir multipliées par des constantes, on obtient une solution :

$$z = \sum C_i \, e^{\alpha_i x + \beta_i y}$$

renfermant autant de constantes arbitraires C_i, que l'on veut. On peut même en déduire une solution dépendant d'une fonction arbitraire.

En effet, le long de la courbe (3), β est une fonction de α, $\beta = \varphi(\alpha)$; soit $F(\alpha)$ une fonction arbitraire de α, on aura une solution de la proposée par la formule :

$$z = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} F(\alpha) \, e^{\alpha x + \varphi(\alpha) y} \, d\alpha,$$

car z n'est autre chose qu'une somme de solutions particulières.

Fin.



Table des Matières

Première Partie.

Compléments de la Théorie des Intégrales définies; fonctions Eulériennes.

Chapitre I.

Fonctions représentées par une intégrale définie.

I. _ Dérivation sous le signe ∫.

II. _ Intégration sous le signe ∫.

Chapitre II.

Fonctions Eulériennes.

Chapitre III.

Intégrales curvilignes.

Deuxième Partie

Fonctions d'une variable imaginaire; fonctions elliptiques.

Chapitre I.

Fonctions d'une variable imaginaire.

I. – Généralités.

II. – Intégrales définies complexes.

III. – Intégrale de Cauchy.

IV. – Développements en série.

V. – Théorème des résidus.

VI. – Applications.

Chapitre II.

Fonctions elliptiques.

I. – Généralités.

II. – Les fonctions $\theta(u)$; σu ; ζu ; pu.

III. – Relation entre pu et $p'u$.

IV. – Expressions diverses d'une fonction elliptique.

V. – Formules d'addition.

VI. – Les fonctions $\sqrt{pu - e_2}$ et Snu.

VII. – La fonction pu considérée comme fonction de u, g_2, g_3.

Chapitre III.

Applications des fonctions elliptiques.

I. – Calcul des Intégrales elliptiques.

II. – Pendule simple.

III. – Cubiques planes.

IV. – Courbes de genre un.

Chapitre IV

Calculs numériques des fonctions elliptiques.

Troisième Partie.

Équations différentielles.

Chapitre I.

Équations du premier ordre.

I. – Définitions et généralités.

II. – Équations du premier ordre qu'on sait intégrer.

III. - Équations générales du premier ordre ; artifices d'intégration.

IV. - Applications.

V. - Équation d'Euler.

Chapitre II.

Équations d'ordre quelconque.

I. - Cas de réductibilité

II. - Applications.

Chapitre III.

Systèmes d'équations différentielles.

I. – Généralités; Théorème de Cauchy.

II. – Application du Théorème de Cauchy.

Chapitre IV

Équations linéaires.

I. – Généralités.

II. – Équations linéaires particulières.

III. – Systèmes linéaires.

IV. – Étude des intégrales d'une équation linéaire.

Chapitre V.

Équations aux dérivées partielles.

I. - Généralités.

II. - Équations du premier ordre linéaire par rapport aux dérivées.

III. - Équations de la forme $f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$.

IV. - Équations d'ordre supérieur au premier.

